

Тема 1. Математика в 5-6 класах,
цілі і зміст вивчення, проблеми
організації диференційованого
вивчення. Методика вивчення
натуральних чисел та десяткових
дробів. Методика вивчення
звичайних дробів, додатніх та
від'ємних чисел.

Мета вивчення предмета «Математика» в 5—6-х класах

- повторення, систематизація, розширення і поглиблення відомостей про натуральні числа, вдосконалення навичок дій над ними;
- введення відомостей про звичайні й десяткові дроби, додатні й від'ємні числа, формування навичок дій з цими числами;
- формування початкових уявлень про використання букв для запису виразів і властивостей дій над числами;
- формування навичок розв'язування текстових задач арифметичними способами і складання за умовою текстової задачі нескладних лінійних рівнянь та їх розв'язування, продовження ознайомлення учнів з геометричними фігурами, формування навичок побудови геометричних фігур і вимірювання геометричних величин.
- Цей предмет має на меті підготовку учнів до вивчення систематичних курсів алгебри та геометрії.

Основний зміст математики 5—6-х класів

- раціональні числа (цілі й дробові, додатні й від'ємні).

Учні цих класів мають навчитися:

- розрізняти різні види раціональних чисел,
- додавати, віднімати, множити і ділити їх,
- знати назви компонентів і результатів дій,
- мати уявлення про квадрат і куб числа, округлення чисел, середнє арифметичне, модуль числа,
- розкладання чисел на прості множники, НСД, НСК,
- розв'язувати задачі на знаходження частини числа, числа за відомою частиною, відсотків від числа, числа за відсотками, відсоткового відношення двох чисел чи значень величин, на пропорційний поділ.

У пропедевтичному плані передбачається ознайомлення учнів з найпростішими і важливими геометричними поняттями:

точка

відрізок

промінь

ламана

кут

трикутник

паралелограм

многокутник

прямокутник

квадрат

коло

круг

куб

прямокутний
паралелепіпед

пряма призма

циліндр

куля

Повторення, систематизація, узагальнення і поглиблення відомостей про натуральні числа і дії над ними

Відомості про натуральні числа в 5 класі повторюються, систематизуються, поглиблюються, уточнюються і розширюються в таких основних напрямках:

- поглиблення знань учнів про нумерацію багатоцифрових чисел;
- розкриття ролі нуля як числа і дії натуральних чисел з нулем;
- систематизація відомостей про чотири арифметичні дії, про зв'язок між прямими і оберненими діями, формування умінь виконання дій над багатоцифровими числами;
- узагальнення знань учнів про закони арифметичних дій і застосування їх до раціоналізації обчислень.

У результаті вивчення теми всі учні повинні оволодіти знаннями і вміннями, що задають рівень обов'язкової підготовки:

- мати уявлення про натуральні числа і нуль;
- читати, записувати і порівнювати натуральні числа;
- виконувати усно арифметичні дії в межах складності прикладів на додавання і віднімання двоцифрових чисел, множення і ділення (без остачі) двоцифрового числа на одноцифрове;
- виконувати письмово чотири арифметичні дії над натуральними числами, в запису яких є кілька десяткових розрядів (включаючи складні випадки переносу з розряду в розряд і використання нулів у запису числа);
- розв'язувати текстові задачі за допомогою арифметичних прийомів, у яких використовуються дії над натуральними числами.

Перш ніж розглядати питання про читання і записування багатоцифрових натуральних чисел, треба повторити з учнями поняття про розряди і розрядні одиниці, класи десяткової системи числення, співвідношення між розрядними одиницями, записування числа у вигляді суми розрядних одиниць, домогтися правильного і вживання учнями слів «цифра» і «число». Щоб учні розрізняли поняття «цифра», «число» і правильно вживали ці терміни, треба звернути їхню увагу на те, що цифри - це умовні знаки для позначення чисел.

Під час записування багатоцифрових чисел учні допускають найбільше помилок, якщо відсутні певні розряди або цілі класи. Пов'язано це з тим, що частина учнів недостатньо усвідомлює ідею поділу чисел на класи і розряди, погано знає назви класів, починаючи від класу одиниць аж до класу мільярдів і, навпаки, починаючи від класу мільярдів аж до класу одиниць.

Під час повторення поняття класів варто дати учням орієнтир щодо назви класів, оскільки учні часто припускаються в цьому помилок. Назва класу визначається назвою розряду, в якому стоїть остання цифра класу. Практика свідчить, що міцні навички читання багатоцифрових чисел в учнів швидше формуються й усвідомлюються, якщо сформулювати їм правило читання багатоцифрових натуральних чисел.

Щоб
прочитати
багатоцифрове
натуральне
число, треба:

- 1) розбити число на класи справа наліво;
- 2) якщо найвищий клас містить три цифри, то прочитати зліва направо кожний клас як трицифрове число і додати назву класу; назва останнього класу (класу одиниць) не додається;
- 3) якщо найвищий клас містить одну або дві цифри, то прочитати його як одноцифрове або двоцифрове число і додати назву цього класу; решта класів читаються так само, яку попередньому випадку.

Дії над натуральними числами.

Їхню увагу треба зосередити на питаннях теоретичного обґрунтування правила виконання кожної дії, розв'язуванні складніших комбінованих вправ, раціоналізації обчислень, розв'язування складніших текстових задач. Для тих, у кого є прогалини її знаннях і навичках, основну увагу варто зосередити на виробленні міцних навичок виконання дій. Удосконалення навичок усних обчислень важливе для всіх учнів.

Отже, насамперед доцільно провести діагностику знань, навичок і умінь учнів з тим, щоб ефективно здійснювати диференційоване навчання, з погляду як складності навчального матеріалу, так і рівня вимог до окремих категорій учнів. Наприклад, на рівні обов'язкових результатів навчання не варто вимагати від учнів теоретичного обґрунтування виконання чотирьох дій на основі їх законів, відомостей про розряди і властивості десяткової системи числення. Для тих, хто навчається на «4» і «5», така вимога потрібна.

Додавання.

У методиці викладання математики неодноразово обговорювалось питання, чи треба означати в школі дію додавання натуральних чисел і як це робити.

І. К. Андронов і В. М. Брадїс робили спробу означити дію додавання на базі поняття об'єднання скінченних множин. При цьому спочатку вводились означення доданків і суми, а потім додавання означалось як дія знаходження суми доданків.

Оскільки чинна програма не передбачає вивчення в школі операцій над множинами, такий методичний варіант прийняти нині неможливо. Найсприятливішим у сучасних умовах є методичний підхід, за якого дія додавання натуральних чисел не означається.

Вважається, що поняття додавання інтуїтивно зрозуміле для учнів з досвіду навчання в початковій школі і з практичного досвіду.

Віднімання.

- ▶ Воно означається в шкільних підручниках як дія, обернена додаванню. Найвдаліше це означення подається в такому формулюванні: відняти від числа a число b означає знайти таке число x , яке в сумі з числом b дає a . Позначається: $b + x = a$.

На цьому етапі навчання важливо вдосконалити навички віднімання багатозначних натуральних чисел, звернути особливу увагу на складні випадки віднімання.

Важливо, щоб учні усвідомили можливість двох способів перевірки дії віднімання:

1) додаванням, знаходячи зменшуване за від'ємником і різницею;

2) відніманням, знаходячи від'ємник за зменшуваним і різницею.

Можна також скористатися мікрокалькулятором або рахівницею.

По змозі доцільно розглянути зміну результату дії віднімання від зміни компонентів.

Повторення дії віднімання доцільно завершити нагадуванням типів задач, які розв'язуються за допомогою цієї дії.

Множення.

Вже з початкової школи учні знають, що множенням натуральних чисел називають додавання однакових доданків.

На етапі повторення важливо, щоб учні після розв'язування певної кількості прикладів змогли виконати узагальнення і сформулювати означення для двох чисел a і b у вигляді: помножити число a на число b означає знайти суму b доданків, кожний з яких дорівнює a .

Доцільно звернути увагу учнів на те, що це означення поширюється лише на випадки натурального числа b , відмінного від 1. Для добутку $a \cdot 1$ потрібна спеціальна домовленість (означення), що $a \cdot 1 = a$. Так само для дії $a \cdot 0$.

У системі вправ варто передбачити як прямі завдання (записати у вигляді добутку суму: а) $6 + 6 + 6 + 6$; б) $m + m + m + m$), так і обернені (записати у вигляді суми добуток: а) $125 \cdot 4$; б) $a \cdot 7$).

Множення одиниці на натуральне число a ($1 \cdot a = a$) і нуля на число a ($0 \cdot a$) обґрунтовують, виходячи з означення дії множення.

Слід приділити увагу попередженню помилок, яких частина учнів припускається, множачи на числа, які закінчуються нулями або містять нулі всередині числа.

Перевіряють дію множення множенням шляхом перестановки множників.

Основні закони множення, як і додавання, треба повторювати, ілюструючи їх застосування для раціоналізації обчислень. Наприклад, переставний закон дає змогу швидше обчислити добуток $42 \cdot 837 \cdot 269$, якщо переставити співмножники $837 \cdot 269 \cdot 42$. Переставляючи третій множник з другим, можна обчислити усно добуток:

$$25 \cdot 639 \cdot 4 = 25 \cdot 4 \cdot 639 = 100 \cdot 639 = 63 \cdot 900.$$

Розподільний закон також часто використовується для раціоналізації обчислень. Наприклад, $33 \cdot 125 = (32 + 1) \cdot 125 = 32 \cdot 125 + 125 = 32(100 + 25) + 125 = 4000 + 125 = 4125$.

Дія ділення.

Дія ділення означається аналогічно дії віднімання як дія, обернена множенню: поділити число a на число b означає знайти таке число x , при множенні якого на число b дістанемо число a . Це означення треба закріпити усними вправами типу: поясніть, що означає поділити число 96 на 32. Внаслідок міркувань за означенням учні складають рівність $x \cdot 32 = 96$.

Зразу ж можна обґрунтувати рівність $0 : a = 0$. Вона випливає з рівності $0 \cdot a = 0$. «Заборона» ділення на нуль приймається за означенням. Проте доцільність прийняття його можна пояснити відповідною рівністю, записаною на основі означення дії ділення. Справді, припустимо, що ми хочемо число 8 поділити на 0. Це означає: треба знайти таке число x , що $x \cdot 0 = 8$. Однак ця рівність не виконується за жодного значення x , бо за будь-якого x добуток $x \cdot 0$ дорівнює 0 (це також приймається за означенням при введенні дії множення).

З погляду ідеї дальшого розширення поняття числа корисно звернути увагу на виконуваність дії ділення у множині натуральних чисел. Вона не завжди можлива, як і дія віднімання. Наприклад, число 7 не ділиться без остачі на число 2, бо немає такого натурального числа x , при якому б виконувалась рівність $x \cdot 2 = 7$.

З усіх чотирьох арифметичних дій найбільша кількість помилок, які допускає частина учнів, припадає на дію ділення.

Правило і сама дія ділення на натуральне число найгірше сприймаються у випадках, коли серед цифр частки є нулі всередині. Наприклад, ділячи 105 105 на 35, дістають 33 замість 3003.

Рекомендації щодо уникнення таких помилок: *треба навчити учнів попередньо ще до виконання ділення визначати кількість цифр у частці.*

Треба наголосити, що під час ділення треба щоразу зносити по одній цифрі і виконувати ділення одержаного числа так, щоб остача була завжди меншою від дільника.

Завершити систематизацію відомостей про дію ділення доцільно повторенням типів простих задач, які розв'язуються цією дією. Основні з них:

1) відшукування невідомого множника за відомим добутком і другим множителем;

2) задачі на кратне порівняння (у скільки разів одне число (величина) більше (менше), ніж друге);

3) ділення на частини (наприклад, $15 \text{ см} : 3 = 5 \text{ см}$);

4) ділення на вміщення (наприклад, $45 \text{ см} : 3 \text{ см} = 5$) коли з'ясується, скільки разів одна однорідна величина вміщується в другій.

З метою підготовки до вивчення десяткових дробів важливо звернути увагу учнів на залежність результату дії ділення від зміни діленого і дільника, зокрема сформулювати основну властивість частки.

Десяткові дроби і проценти

Чинна програма передбачає всі основні відомості про десяткові дроби і проценти і вивчати в 5 класі.

У традиційному шкільному курсі математики 60-х рр. десяткові дроби і проценти були останніми темами курсу арифметики і вивчались в 6 класі (нині 7 клас). Досвід вивчення в школі цих тем протягом останніх трьох десятиріч свідчить про те, що на рівні 5 класу десяткові дроби сприймаються учнями, але із задачами на проценти становище значно гірше.

Учні 5 класу зі значними труднощами сприймають основні задачі на проценти, частина випускників середньої школи не вміє виконувати розрахунки з процентами. Однією з причин такого стану є невдале місце процентів у програмі.

Досвід показує, що їх доцільніше вивчати пізніше, - зокрема в 6 класі, а складніші задачі на проценти зробити предметом вивчення в курсі алгебри. Це тим більше актуально в наш час, коли потреби виробництва, ринкової економіки вимагають вільно і свідомо оперувати процентними обчисленнями. Тому в новій програмі передбачене саме таке місце процентів у шкільному курсі.

Основна мета вивчення десяткових дробів у 5 класі:

- сформувані вміння читати, записувати, порівнювати й округлювати десяткові дроби, виконувати чотири арифметичні дії над ними.

Вимоги до знань і умінь:

- розуміти смисл десяткового дроби як форми запису числа,
- мати чітке уявлення про його розряди, десяткові знаки,
- знати правила порівняння, округлення і виконання чотирьох арифметичних дій;
- вміти читати, записувати, порівнювати, округлювати десяткові дроби і виконувати чотири арифметичні дії над ними.

Основна мета вивчення процентів:

- ввести поняття про проценти як форму запису числа.
- Навчити учнів розв'язувати три основні задачі на проценти (у тому числі і пов'язані з продуктивністю праці, ринковою економікою та ін.).

Вимоги до знань і умінь:

- розуміти проценти як форму запису цілих і дробових чисел;
- вміти записувати проценти у вигляді звичайного і десяткового дробів і подавати будь-яке число у вигляді процентів;
- вміти знаходити: проценти від числа, число за його процентом і процентне відношення чисел;
- вміти застосовувати знання про проценти до розв'язування найпростіших задач міжпредметного, виробничого і економічного змісту.

Звичайні дроби

Ідея розширення поняття числа послідовно розвивається в шкільному курсі математики, Проте послідовність введення нових чисел не збігається з логічною схемою $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

У школі прийнята «історична» схема розвитку числа $N \subset N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$, в якій додатні дробові числа вводяться зразу після вивчення розширеної нулем множини натуральних чисел.

За чинною програмою звичайні дроби в школі вивчаються в три етапи.

На першому, пропедевтичному, етапі в 3 класі початкової школи учнів ознайомлюють і з поняттями «дріб», «чисельник», «знаменник», вчать порівнювати найпростіші дроби, знаходити дріб числа і число за його дробом двома діями.

На другому етапі в 5 класі перед вивченням десяткових дробів передбачено розширення відомостей про звичайні дроби.

Тут повторюються відомості з 3 класу і, крім того, вводяться нові поняття - «правильний і неправильний дріб», «ціла і дробова частина числа». Учні вчать виділяти цілу частину дробового числа і розв'язувати обернену задачу, порівнюють дроби з однаковими знаменниками, додають і віднімають такі дроби.

На третьому етапі в 6 класі продовжується вивчення звичайних дробів.

Тут розглядаються основна властивість дробу, скорочення, порівняння, додавання і віднімання дробів з різними знаменниками, множення і ділення звичайних дробів.

Основна мета вивчення звичайних дробів у 5 класі

- ознайомити учнів з початковими відомостями про них в обсязі, достатньому для вивчення десяткових дробів.

Вимога до знань і умінь на цьому етапі навчання такі:

- розуміти суть звичайного дроби, чисельника і знаменника, правильного і неправильного дроби, цілої і дробової частини числа;
- знати правила порівняння, додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками;
- читати і записувати дробові числа; порівнювати, додавати і віднімати звичайні дроби з однаковими знаменниками;
- розв'язувати текстові задачі, пов'язані зі звичайними дробами, арифметичними способами.

Основна мета вивчення звичайних дробів в 6 класі

- сформувати міцні навички перетворення дробів і виконання чотирьох арифметичних дій над ними.

Вимоги до знань і умінь на третьому етапі такі:

- знати основну властивість дроби і застосовувати її до скорочення дробів і зведення дробів до найменшого спільного знаменника;
- знати правила додавання і віднімання дробів з різними знаменниками, множення і ділення дробів;
- вміти виконувати чотири арифметичні дії над довільними звичайними дробами;
- розв'язувати арифметичними способами текстові задачі, де використовуються звичайні дроби.

Введення поняття звичайного дробу. Перетворення дробів.

Вчитель повинен розуміти принципову відмінність між поняттями «дріб» і «дробове число». Про зміст цих понять, зв'язок і відмінність між ними йдеться в статті А. М. Колмогорова з циклу статей про теоретичні основи шкільного курсу математики.

Дріб - це лише форма, символ для запису числа (так само десятковий дріб, проценти) як дробового, так і цілого. Наприклад, дробове число можна записати не тільки у формі звичайного дробу, а й за допомогою десяткового дробу (0,5) або процентів (50 %).

Будь-яке ціле число також можна записати у кількох формах.

Для учнів 5-6 класів, з дидактичних міркувань, для скорочення математичної мови терміни «дробове число» і «дріб» часто вживаються як синоніми, і в цьому немає великої біди. Водночас треба поступово привчити учнів до розуміння поняття «дріб» як форми запису числа (а пізніше і алгебраїчного виразу).

У 3 класі і в курсі математики 5-6 класів дріб трактується спочатку як частина цілого (яблука, круга, відрізка тощо), а в 6 класі і як частка від ділення двох натуральних чисел.

Під час формування поняття звичайного дробу, порівняння дробів з однаковими знаменниками варто широко залучати *наочність* і *практичні дії* учнів на розбивання відрізків, круга, прямокутників та інших об'єктів на рівні частини і позначення за допомогою дробу різних частин цілого, а також пов'язувати вивчення цього матеріалу з метричною системою мір (довжина, площа, об'єм, грошові одиниці, час тощо) і вимірювань різних величин, що природно показує учням походження дробів з практики вимірювань.

Важливо розглянути зображення дробів на координатному промені і розв'язування оберненої задачі. На координатному промені ефективно ілюструється основна властивість дробу і порівняння дробів.

Дії над звичайними дробами.

Введення дробових чисел є важливим етапом у процесі розширення поняття числа. На кожному з етапів розширення виникає потреба навчитись порівнювати нові числа і виконувати чотири арифметичні дії над ними. При цьому треба умовитись, що розуміти під сумою, різницею, добутком і часткою нових чисел.

Додавання і віднімання. Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками не викликає труднощів в учнів. Після розв'язування попередніх прикладів доцільно звернути увагу учнів на те, що додавання (віднімання) таких дробів полягає в підрахунку суми (різниці) однакових частин цілого. У цьому розумінні зазначені дії мало чим відрізняються від відповідних дій над натуральними числами. На початковому етапі

розв'язування вправ можна скористатися і такими формами запису: $\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2+1}{5} = \frac{3}{5}$;

$$\frac{7}{9} - \frac{2}{9} = \frac{7-2}{9} = \frac{5}{9}$$

На завершальному етапі варто виконати узагальнення і вжити записи $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$;

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}, \quad a > c \text{ або } a = c, \quad b \neq 0.$$

Для частини учнів трохи важчими виявляються вправи на додавання і віднімання дробових чисел, які містять цілу і дробову частини з однаковими знаменниками.

Свідомість і міцність навичок виконання додавання і віднімання дробів з різними знаменниками значною мірою залежить від сформованості умінь зводити дроби до спільного знаменника, вміння знаходити найменше спільне кратне (НСК) знаменників. Тому насамперед слід з'ясувати стан цих умінь у різних категорій учнів і провести повторення відповідного матеріалу.

Для уникнення помилок не варто поспішати переходити до короткого запису. Доцільно на першому етапі розв'язування вправ вимагати докладних пояснень і розгорнутих записів.

На етапі скорочення записів слід періодично вимагати від учнів пояснення виконаних проміжних обчислень.

Розв'язання системи вправ має завершуватись складнішими випадками віднімання дробових чисел, коли дробова частина від'ємника більша від дробової частини зменшуваного. Такого характеру вправи необхідно починати з віднімання правильного дроби від одиниці, від цілого числа, потім - віднімання дробового числа, що містить цілу і дробову частини, від цілого числа і, нарешті, найскладніший для учнів випадок - коли дробова частина від'ємника більша за дробову частину зменшуваного

Множення і ділення дробів.

За новою програмою і нинішніми підручниками прийнятий інший методичний підхід до введення дії множення на дріб. Він потребує значно менше навчального часу і має такі особливості.

Виклад починається із введення загального правила множення дробу на дріб, а множення дробу на натуральне число і натурального числа на дріб розглядаються як окремі випадки, якщо натуральне число подати у вигляді дробу зі знаменником 1. Дія ділення на дріб зводиться до множення на обернений дріб.

Обґрунтування доцільності прийняття саме такого правила множення на дріб здійснюється шляхом розгляду відомої учням задачі про площу прямокутника. Опора на цю задачу допомагає обґрунтуванню, оскільки однакові за математичним змістом задачі мають розв'язуватися тією самою дією незалежно від числових даних, які фігурують в задачі.

Задачі про знаходження дробу числа і числа за його дробом вводяться пізніше, ніж задачі на застосування дій множення і ділення на дріб.

Зазначимо труднощі психологічного характеру, які пов'язані з дією множення дробів.

Перша пов'язана з тим, що учнів треба переконати в непридатності старого означення дії множення на натуральне число для множення на звичайний дріб. Справді, не можна повторити співмножник доданком, наприклад, $2 \cdot 3 = 3 + 3$ рази. І мова в цьому разі може йти не про означення, а про встановлення лише правила множення звичайних дробів.

Друга трудність пов'язана з тим, що дія множення на будь-яке натуральне число, відмінне від 1, завжди давала результат, більший за будь-який із співмножників. У випадку множення на правильний дріб добуток завжди менший за будь-який із співмножників. Проте це не повинно бути несподіваним для учнів, оскільки під час множення на десятковий дріб з таким випадком вони вже стикалися. На конкретних прикладах треба переконати учнів у тому, що закони множення натуральних чисел поширюються і на звичайні дроби. У зв'язку з множенням дробових чисел з цілою частиною числа на ціле можна не обмежуватись перетворенням числа в звичайний дріб, а показати можливість використання розподільного закону для виконання дії.

Дякую за увагу!