Я слышу и забываю.
Я вижу и запоминаю.
Я делаю и понимаю.

Конфуций

Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы

Повторим.

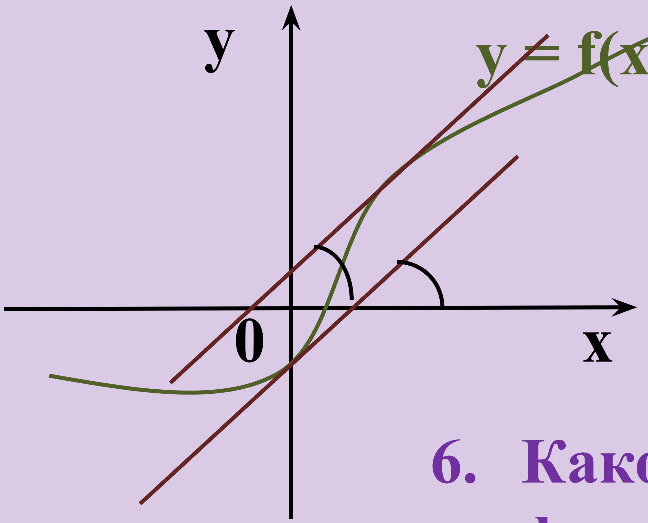
1. **Функция f(x) называется возрастающей на некотором промежутке, если**

   на заданном промежутке большему значению аргумента соответствует большее значение функции, а меньшему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

2. **Функция f(x) называется убывающей на некотором промежутке, если**

   на заданном промежутке большему значению аргумента соответствует меньше значение функции, а меньшему значению аргумента соответствует большее значение функции.

3. **Как направлен график возрастающей функции?**



4. **Под каким углом к положительному направлению оси абсцисс расположена касательная к графику?**

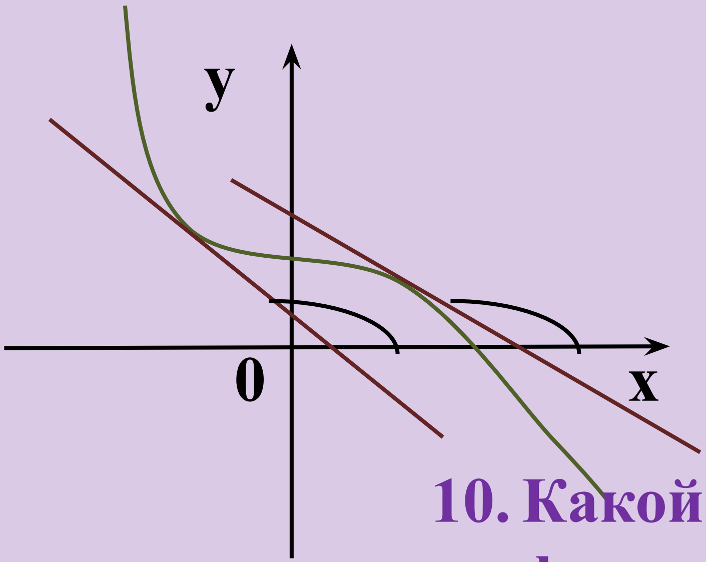
5. **Какой знак имеет угловой коэффициент касательной к графику данной функции?**

6. **Какой знак имеет производная данной функции на заданном промежутке?**

Вывод. **Если на заданном промежутке функция возрастает, то то производная на этом промежутке положительна.**

Обратно. **Если на заданном промежутке производная положительна, то функция на этом промежутке возрастает.**

7. Как направлен график убывающей функции?



8. Под каким углом к положительному направлению оси абсцисс расположена касательная к графику?

9. Какой знак имеет угловой коэффициент касательной к графику данной функции?

10. Какой знак имеет производная данной функции на заданном промежутке?

Вывод. Если на заданном промежутке функция убывает, то то производная на этом промежутке отрицательна.

Обратно. Если на заданном промежутке производная отрицательна, то функция на этом промежутке убывает.

Исследовать функцию на монотонность – это значит выяснить, на каких промежутках области определения функция возрастает, на каких – убывает.

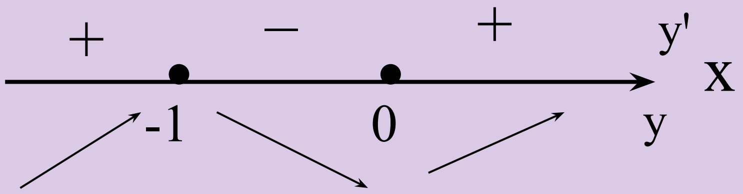
Пример 1. Исследовать функцию $y = 2x^3 + 3x^2 - 1$ на монотонность .

1. Найдем производную данной функции. $y' = 6x^2 + 6x$

2. Найдем нули производной. $6x^2 + 6x = 0$

3. Нанесем их на числовую прямую.

4. Найдем знак производной на каждом промежутке.



5. Определим поведение функции на каждом промежутке.

Функция возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[0; +\infty)$.

Функция убывает на промежутке $[-1; 0]$.

Характеристика точек x = -1, x = 0.

В точках $x = -1$, $x = 0$ меняется монотонность функции.

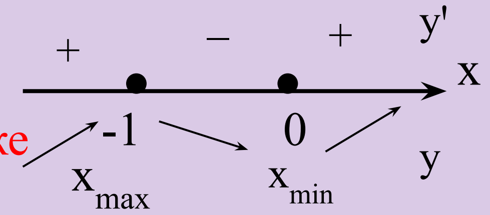
Касательная к графику функции в этих точках параллельна оси Ox.

Производная в этих точках равна нулю.

Внутренние точки области определения функции, в которых $f'(x) = 0$, называются **стационарными**.

$x = -1$, $x = 0$ – стационарные точки

Точку $x = x_0$, в которой данная функция переходит с возрастания на убывание, а производная данной функции переходит с «+» на «-», называют **точкой максимума** (x_{max}), а значение функции в этой точке называют **максимальным значением функции** (y_{max}).



Точку $x = x_0$, в которой данная функция переходит с убывания на возрастание, а производная данной функции переходит с «-» на «+», называют **точкой максимума** (x_{min}), а значение функции в этой точке называют **максимальным значением функции** (y_{min}).

Точки максимума и минимума называют **точками экстремума**, а значение производной в этих точках – **экстремумами функции**.

Пример 2. Найти точки экстремума функции $y = 3x^4 – 16x^3 + 24x^2 – 11$ и найти значение функции в этих точках.

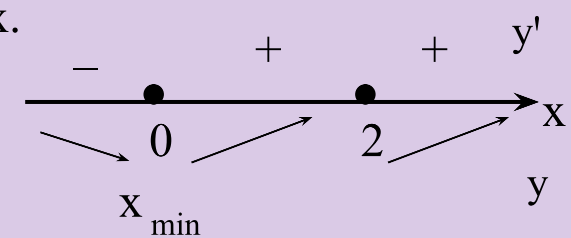
$y' = 12x^3 – 48x^2 + 48x$

$y' = 12x(x^2 – 4x + 4)$

$y' = 12x(x – 2)^2$

$12x(x – 2)^2 = 0$

$x = 0$ и $x = 2$



$x_{min} = 0$ $y_{min} = y(0) = –11$

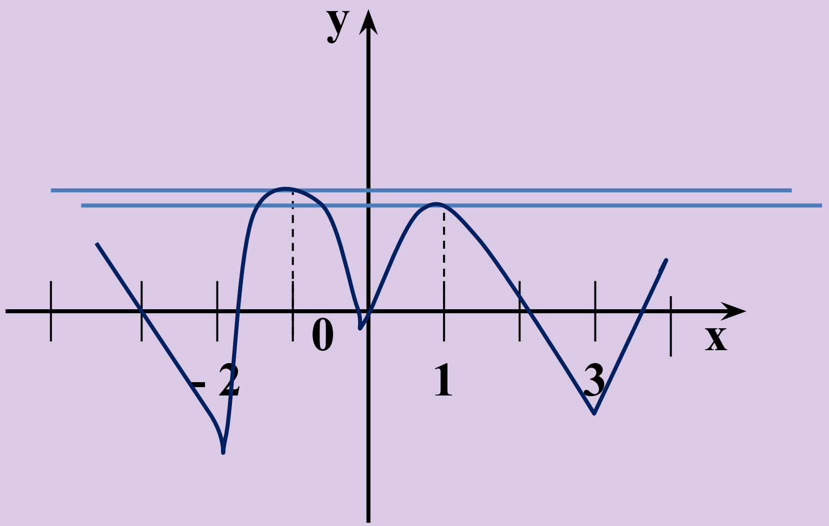
Ответ: $x_{min} = 0$, $y_{min} = – 11$

Точку, в которой производная данной функции не меняет знак , называют **точкой перегиба**.

Рассмотрим график некоторой функции.

Можно ли провести касательную к графику функции в точках $x = -1$; $x = 1$**?**

Чему равна производная в заданных точках? $y'(-1) = y'(1) = 0$

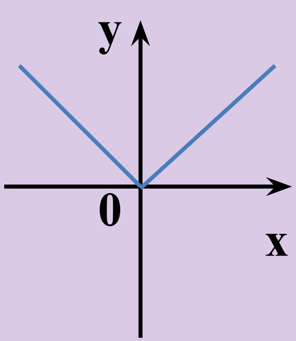


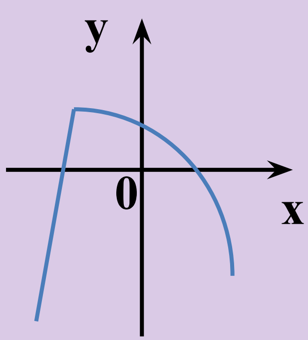
Можно ли провести касательную к графику функции в точках $x = -2$; $x = 0$; $x = 3$**?**

Существует ли производная данной функции в заданных точках?

Внутренние точки области определения функции, в которых производная не существует, называются **критическими**.

Примеры графиков функций, имеющих критические точки





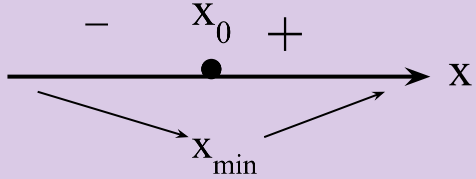
Критические точки так же как и стационарные называются **точками экстремума**.

Если функция в данной точке имеет экстремум, то производная в этой точке либо не существует, либо равна нулю.

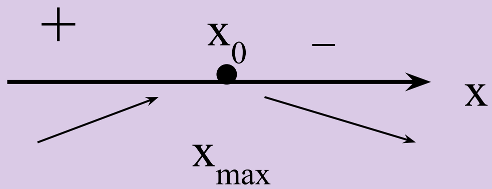
Достаточные условия экстремума.

Пусто функция $y = f(x)$ **непрерывна на некотором промежутке и имеет внутри промежутка точку экстремума** $x = x_0$**. Тогда:**

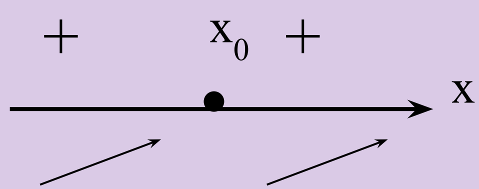
а) $x = x_0$ - точка минимума, если в ней данная функция переходит с убывания на возрастание, а производная данной функции переходит с «-» на «+».



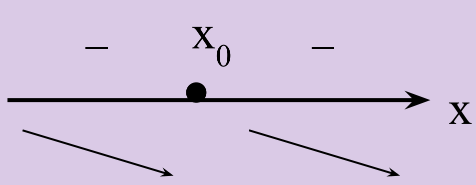
б) $x = x_0$ - точка максимума, если в ней данная функция переходит с возрастания на убывание, а производная данной функции переходит с «+» на «-».



в) в точке $x = x_0$ экстремума нет, если по обе стороны от этой точки функция не меняет монотонность, а производная имеет одинаковый знак.



Экстремума нет, точка перегиба



Экстремума нет, точка перегиба