# Структура методики дослідження операцій

# Склад методики дослідження операцій

Складом методики дослідження операцій є наступні заходи:
1) Визначення цілей.
2) Складання плану розробки проекту, операції.
3) Формулювання проблем.
4) Побудова моделі.
5) Розробка обчислювального методу.
6) Розробка технічного завдання на програмування, програмування та відлагодження програми.
7) Збір даних.
8) Перевірка моделі.
9) Реалізація результатів.

# Типові класи задач дослідження операцій

**Основні класи задач дослідження операцій:**

- управління запасами;
- розподілу ресурсів;
- ремонту та заміни обладнання; масового обслуговування;
- упорядкування та координації;
- вибору маршруту;
- пошуку;
- змагальні;
- комбіновані.

**Задачі управління запасами**. Можна виділити, принаймні, **чотири** основні причини, що призводять до необхідності створення запасів:

- необхідність гарантувати безперебійність виробничого процесу;
- періодичність виробництва окремих матеріальних ресурсів у постачальників;
- особливості транспортування від постачальників до споживачів (невідповідність вантажопідйомності транспортних засобів і розмірів споживання);
- незбіжність ритму виробництва та постачання виробничих ресурсів із ритмом їх споживання.

**Задачі управління запасами можна класифікувати**:

- за кількістю періодів управління (поповнення запасів) – на одноперіодні та багатоперіодні;
- за характером поповнення запасів – із неперервною системою поповнення запасів (миттєве) і періодичне (із затримкою);
- за урахуванням попиту – на детерміновані і ймовірнісні (статистичні);
- за кількістю типів ресурсів – на однопродуктові і багатопродуктові;
- за видом цільової функції – на задачі з пропорційними та непропорційними втратами.

**Задачі розподілу ресурсів** пов'язані з розподілом обмежених ресурсів по роботах, які треба виконати. При цьому можуть бути задані як роботи, так і ресурси, або тільки роботи. Перекидання, передавання ресурсів з однієї роботи на іншу, якщо не всі роботи можна виконати найефективніше через відсутність ресурсів, призводить до зменшення спільної ефективності усіх робіт, взятих разом. Тому задачі розподілу ресурсів полягають у відшуканні такого розподілу ресурсів, при якому максимізується спільний прибуток або результат чи мінімізуються витрати. Задачі розподілу ресурсів дуже різноманітні за змістом і багато з них має спеціальну назву: **транспортна задача; задача про призначення; задача про суміші; задача вибору оптимальних технологій тощо**.

**Задачі ремонту та заміни обладнання** виникають у тих випадках, коли технічні характеристики працюючого обладнання погіршуються за рахунок старіння, спрацювання та інших причин. Це призводить до необхідності заміни обладнання з метою зменшення сумарних витрат на експлуатацію або попередження нового виходу з ладу. В деяких випадках виникає потреба раціональної організації профілактичного обслуговування, тобто попереджувально-відновлювального ремонту.

Задачі цього класу розподіляють таким чином:

1. За характером заміни обладнання: задача заміни обладнання довгострокового використання; задача заміни обладнання з метою попередження відмов; задачі вибору оптимального плану попереджувального ремонту та профілактичного обслуговування.
2. За характером урахування витрат на обладнання – на дискретні та неперервні.
3. За виходом із ладу обладнання – на детерміновані та випадкові.
4. За стратегією заміни обладнання – на планові та змішані.
5. За часом урахування витрат на обладнання – з приведенням та без приведення витрат більш пізніх років до розрахункового.

**Задачі масового обслуговування** умовно поділяють на задачі **аналізу** та задачі **синтезу** – оптимізації систем масового обслуговування.

Задачі **аналізу** припускають оцінку ефективності функціонування систем при незмінних, наперед відомих вихідних характеристиках системи масового обслуговування: структурі системи; дисципліни обслуговування; потоках вимог і законах розподілу часу їх обслуговування.

Задачі **синтезу** спрямовані на пошук оптимальних параметрів системи масового обслуговування (вибір числа каналів, їх послідовності, включення до роботи, пропускної здатності) і характеристик функціонування (формування вхідного потоку вимог, вибір дисципліни обслуговування тощо).

**Задачі упорядкування та координації**.

Задачі **упорядкування** пов'язані з визначенням оптимальної послідовності обробки виробів, масивів інформації тощо.

Задачі **координації** відносяться до комплексів операцій, та складаються з певної сукупності окремих операцій, які повинні виконуватися за часом у заданій послідовності. Це – задачі сіткового планування й управління.

В цьому класі задач розглядаються співвідношення між строками закінчення комплексу операцій та моментами початку усіх операцій комплексу.

**Задачі вибору маршруту** зустрічаються при дослідженні різноманітних процесів на транспорті, в системах зв'язку. Типова задача полягає у відшуканні найкращого маршруту, який пов'язує декілька пунктів. На допустимі маршрути може накладатися ряд обмежень, коли забороняється повернення до пройденого пункту або у кожному пункті можна побути тільки одного разу.

Серед цих задач найбільш відомими є: **задача вибору найкоротшого шляху між довільними пунктами; задача комівояжера; задача про максимальний потік.**

**Задачі пошуку** складаються у відшуканні найкращого засобу отримання інформації, яка однозначно визначала б розв'язок. Критерієм у такій задачі є **мінімум витрат** двох видів: **вартості отримання інформації й ціни помилки**. У першому випадку йдеться про вартість вибірки, тобто вартості вибору спостережень, у другому – про помилки двох видів: помилки вибірки (виявлення того, що насправді є відсутнім) і помилки спостереження (пропускання того, що насправді має місце). Якщо на проведення пошуку виділені фіксовані ресурси, то чим більше буде розмір вибірки, тим менше обсяг ресурсів на кожне спостереження. Таким чином, при бажанні зменшити помилки вибірки, як правило, зростає помилка спостереження і навпаки. В обмеженій задачі пошуку обсяг ресурсів, які виділені на пошук, є заданим, і задача полягає у розробці плану пошуку, який **мінімізує ціну помилки**.

У загальній задачі кількість ресурсів можна змінювати таким чином, що її метою є мінімізація сумарних витрат ресурсів і ціни помилки.

**Змагальні задачі** – клас задач дослідження операцій, що виникають під час прийняття рішень в умовах конфліктів, незбігу інтересів осіб. Особливе місце в дослідженні проблем конфлікту займає вибір і порівняльний аналіз можливих (допустимих) способів поведінки сторін, що дає основу для прийняття кожною стороною розумних рішень відносно своїх дій. Особи, які приймають рішення, повинні врахувати не тільки свої цілі, але й цілі, які переслідують інші учасники конфлікту. Відповідну інформацію вдається отримати не завжди, що складає додаткові труднощі як для дослідників, так і осіб, які приймають остаточне рішення.

**Комбіновані задачі** містять декілька типових задач одночасно.

# Предмет математичного програмування

**Загальна задача математичного програмування**

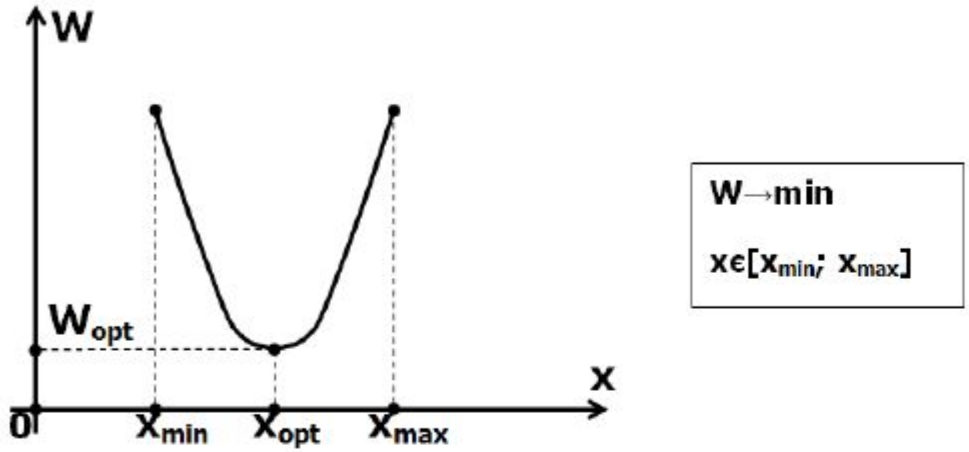
Послідовність розв’язання задачі пошуку найкращих дій за заданим показником ефективності W (задача дослідження операцій) складається з наступних етапів:

1) якісна (неформальна, змістова, вербальна) постановка задачі дослідження операцій;
2) побудова математичної моделі;
3) математична постановка задачі;
4) розробка методу розв’язання задачі (метод оптимізації);
5) розробка методики та алгоритму реалізації запропонованого методу;
6) розробка комп’ютерної програми;
7) розрахунок (чисельний експеримент), імітаційне моделювання;
8) інтерпретація отриманого результату.

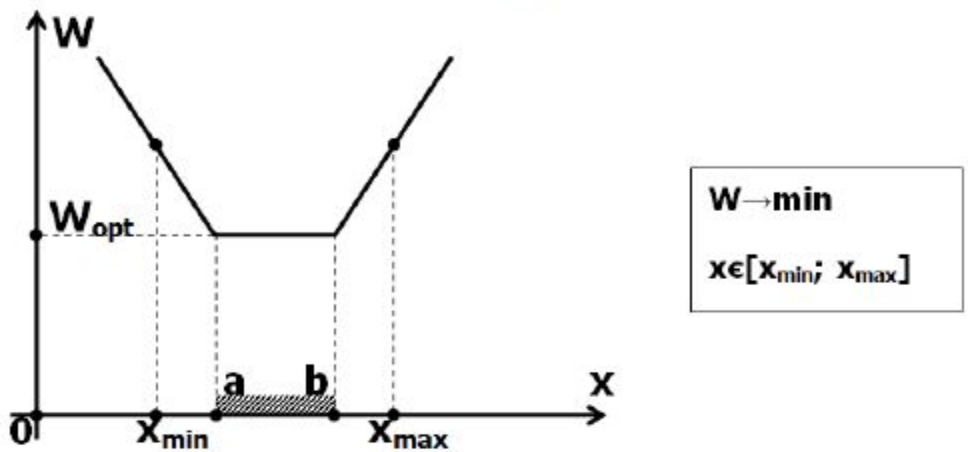
Загальною ***задачею математичного програмування*** є знаходження глобального *екстремуму* показника ефективності W на області допустимих значень G. Тобто математичне програмування дозволяє виконати 4) та 5) етапи задачі дослідження операцій.

Окрім терміну математичне програмування, ще використовують термін математична модель оптимізації, або математична модель розв'язання задач на екстремум. Набір змінних $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, який задовольняє обмеженням G називають ***планом задачі математичного програмування***.

Система обмежень повинна бути сумісною, інакше множина планів буде порожньою множиною. Множина планів може бути як обмеженою, так і не обмеженою. План, що надає показнику ефективності оптимальне значення називається оптимальним, оптимальний розв'язок не завжди єдиний (рис. 1).




а) точка оптимуму єдина




б) $x_{opt} \in [a;b]$ – континуум

Рис. 1. Графічна ілюстрація можливостей існування єдиного та безлічі оптимальних планів

## Класифікація задач математичного програмування

Задачі математичного програмування поділяються на **класичні** та **некласичні**.

Ознаками віднесення задач математичного програмування до **класичних** є вимоги:

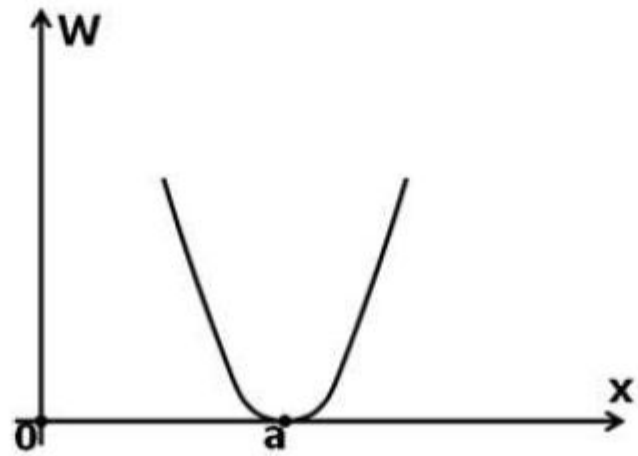
1. неперервності показника ефективності та обмежень по відношенню до керуючих змінних;
2. існування за керуючими змінними перших та других частинних та мішаних частинних похідних від показника ефективності.

Простою ознакою **некласичності** даних задач математичного програмування є вимога стосовно дискретності керуючих змінних.

***Класичні задачі*** можливо поділити на 2 підкласи:

1) задачі пошуку безумовного екстремуму;
2) задачі пошуку умовного екстремуму

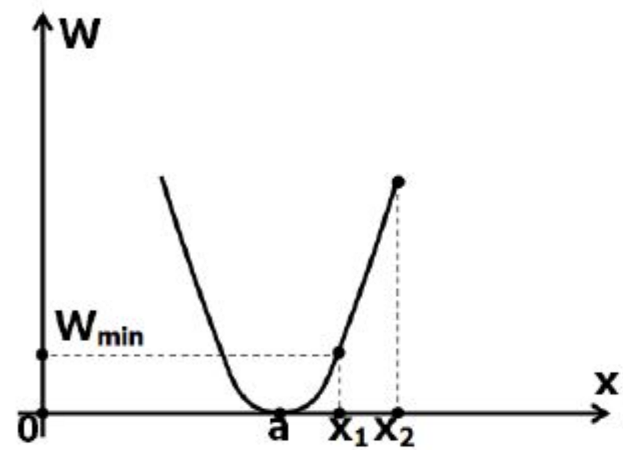
Рис. 2. Графічна ілюстрація класифікації класичних задач математичного програмування: а) безумовний екстремум; б) умовний екстремум.




а) $W_{\min} = 0,\ x_{\min} = a$

$W \to \min \quad x \in R$

$W_{min} = W(a)$




б) $W_{\min} = W(x_1),\ x_{\min} = x_1$

$W \to \min$

$x \in [x_1;\ x_2]$

$W_{min} = W(x_1)$

***Некласичні задачі*** математичного програмування поділяють на **спеціальні** та **неспеціальні**. До основних типів спеціальних задач математичного програмування відносяться:

1) Задача лінійного програмування (ЗЛП).
2) Задача квадратичного програмування (ЗКП).
3) Задача сепарабельного програмування (ЗСП).
4) Задача геометричного програмування (ЗГП).
5) Задача опуклого програмування (ЗОП).
6) Задача дискретного програмування (ЗДП)
7) Задача стохастичного програмування (ЗСтП)

Загальна постановка ЗЛП має вигляд:

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{X \in G}$$

де $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$, $G$ – область допустимих розв‘язків, яка задається обмеженнями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad i = \overline{1, m}, \; x_j \in \mathbb{R},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}$$

В записаних виразах $c_j$, $a_{ij}$, $b_i$ $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ – параметри, $x_j$ $(j = \overline{1, n})$ – керуючі змінні.

Загальна постановка **ЗКП** відрізняється від задачі лінійного програмування формою запису показника ефективності:

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{k_j} x_k x_j \to \max_{X \in G}$$

де $d_{k_j}$ $(k = \overline{1,n}, j = \overline{1,n})$ параметри.

Загальна постановка **ЗСП** відрізняється від задач лінійного програмування формою запису показника ефективності:

$$W = \sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \to \max_{X \in G}$$

адитивний показник ефективності

$$W = \prod_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right) \to \max_{X \in G}$$

мультиплікативний показник ефективності де $f_j(x_j)$ $(j = \overline{1,n})$ – відомі функції.

Загальна постановка **ЗГП** набуває вигляду:

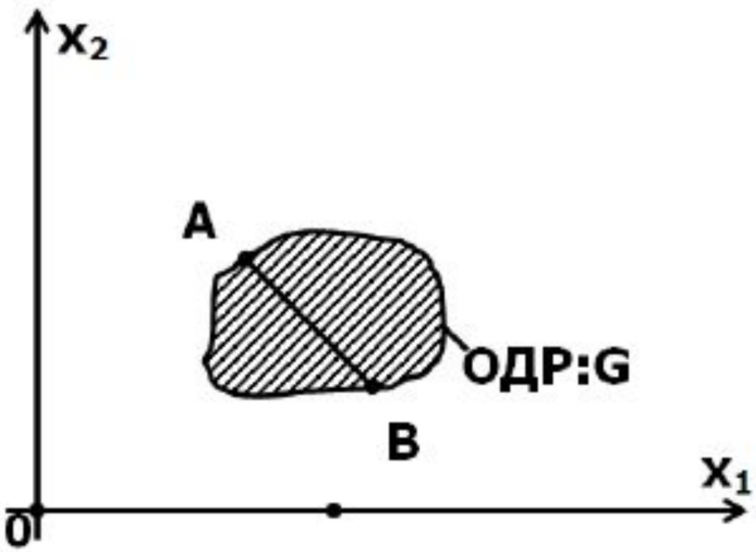
$$W = \sum_{k=1}^{L} c_k \left( \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{k_j}} \right) \to \max_{X \in G}$$

де $G$ – область допустимих розв‘язків, що задається нерівностями:

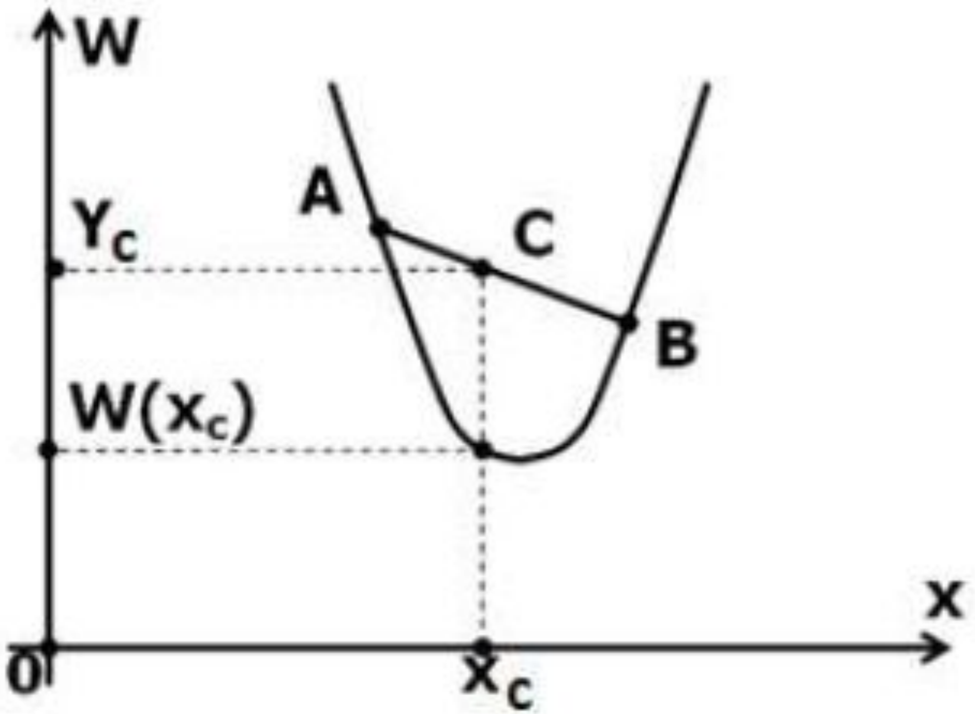
$$\sum_{k=1}^{L} c_{ik} \left( \prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_{ik_j}} \right) \le b_i, \ i = \overline{1,m}, \ x_j \ge 0, \ j = \overline{1,n}$$

де $c_k$, $c_{ik}$, $\alpha_{k_j}$, $\alpha_{ik_j}$, $b_i$ $(k = \overline{1,L})$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ – параметри.

Загальна постановка **ЗОП** полягає в тому, що показник ефективності і обмеження є опуклими функціями.




а) точки А, В належать границі області допустимих розв'язків (ОДР). Якщо всі точки відрізка АВ належать ОДР при будь якому розташуванні А, В на границі ОДР, то ОДР – опукла.




б) W – показник ефективності, опуклий (вигнутий) донизу. Показник ефективності вважається опуклим донизу, якщо при будь-якому розташуванні точок А та В ордината точки С буде більша за значення показника ефективності в цій точці: $Y_c > W(x_c)$ .

Рис. 3. Графічна ілюстрація щодо пояснення змісту терміну «опукла область допустимих рішень» та «опуклий показник ефективності»

**Задача дискретного програмування (ЗДП),** яка виникає у випадку, якщо будь-яку із попередніх задач доповнити умовою, що хоча б одна із компонент $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ може приймати окремі значення, наприклад, цілочисельні. **Задача стохастичного програмування (ЗСтП),** яка виникає в будь якому із попередніх випадків, коли всі або деякі, перелічені в пунктах 1, 2, 3, 4, параметри є випадковими величинами.

Всі інші види задач математичного програмування відносяться до неспеціальних, некласичних задач математичного програмування.

## Теорема про достатні умови глобального максимуму

В загальній задачі математичного програмування вектор змінних $\hat{X}$ є ***точкою глобального максимуму***, якщо він належить області існування планів задачі $G$ і показник ефективності набуває на ньому значення не менше, ніж в будь якій допустимій точці:

$$\hat{X} \in G \text{ та } W(\hat{X}) \geq W(X)\ \forall X \in G.$$

Якщо $W(\hat{X}) \geq W(X)\ \forall X \in G$, то ***глобальний максимум*** називається ***строгим*** або ***сильним***.

Вектор змінних є ***точкою локального максимуму***, якщо він належить допустимій множині та на ньому досягається значення показника ефективності більше або рівне значенню показника ефективності в деякому малому околі цього вектора

$$\hat{X} \in G \text{ та } W(\hat{X}) \geq W(X)\ \forall X \in G \cap M_\varepsilon(\hat{X}),$$

де $M_\varepsilon(\hat{X})$– $\varepsilon$-окіл вектора $\hat{X}$, який в даному випадку є множиною точок, що задовольняють умові

$$\left|X - \hat{X}\right| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \hat{x}_j\right)^2} \leq \varepsilon .$$

Якщо $W(\hat{X}) > W(X), \forall X \in G \cap M_\varepsilon(\hat{X})$, то ***локальний максимум*** називається ***строгим*** або ***сильним***.

***Теорема 1.*** Припустимо, що допустима множина G обмежена і замкнена(границя входить до складу ОДР G), ще й опукла, а неперервний показник ефективності є опуклим догори на $G$ . Тоді локальний максимум є глобальним. Якщо $W(X)$ строго вигнута догори функція, то розв'язок задачі пошуку максимуму єдиний (існує єдиний глобальний максимум).

* Достатні умови існування глобального максимуму формулює теорема Веєрштраса.

***Теорема 2.*** Припустимо, що допустима множина $G$ – обмежена, замкнена і опукла, тоді неперервний показник ефективності W($X$) досягає глобальний максимум у внутрішній або граничній точці множини $G$ .

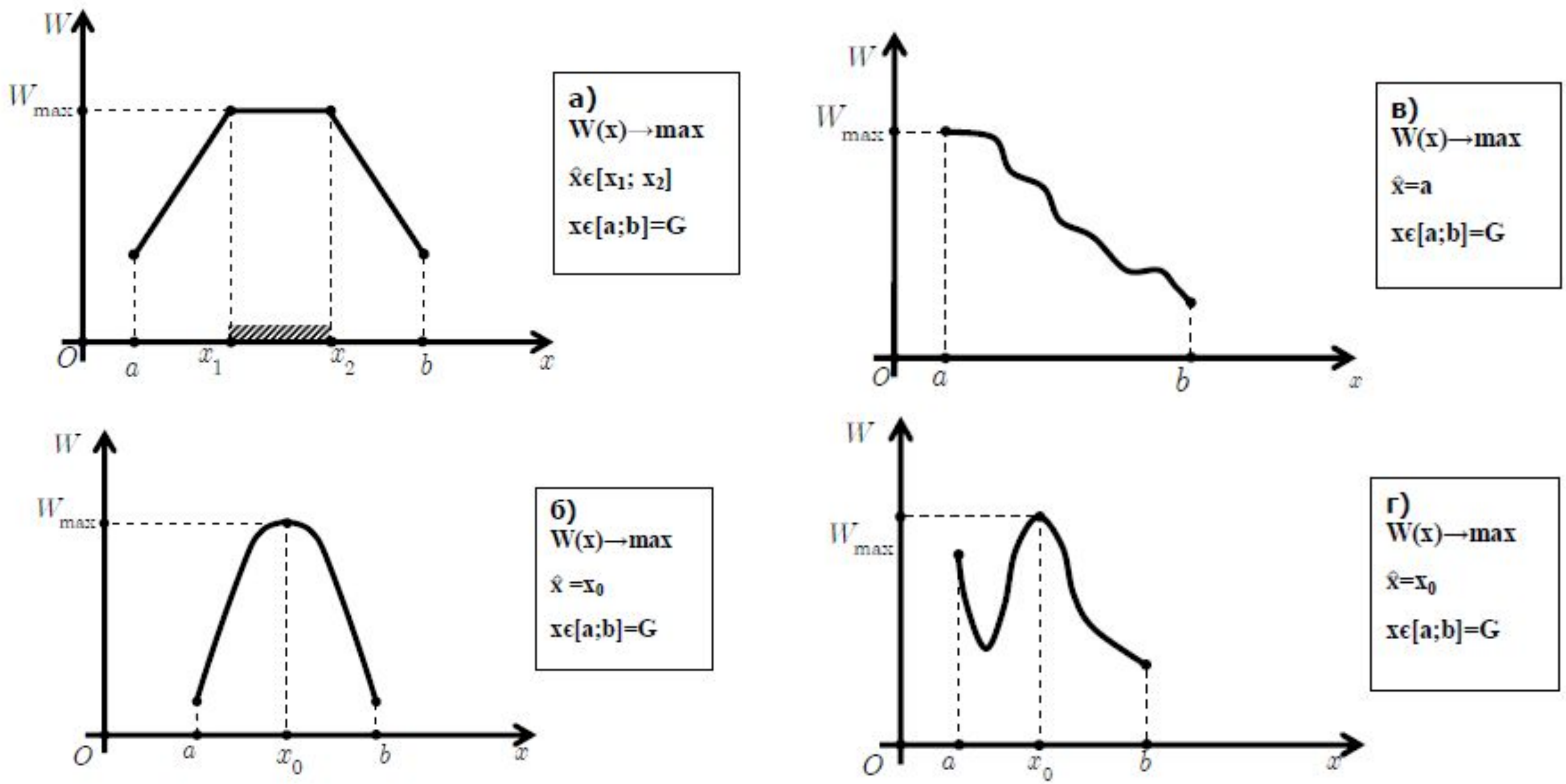



Рис. 4. Графічна ілюстрація теоремі про глобальний максимум вигнутої вгору функції (а,б) та теореми Веєрштраса (в,г).