Решение тригонометрических уравнений.

10 класс

Корельская Г.Ю.
Романенко Е.Л.
МБОУ СОШ №33
г.Архангельск

Нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям де[illegible]тельного мира.

Н.И.Лобачевский

тригонометрических уравнений

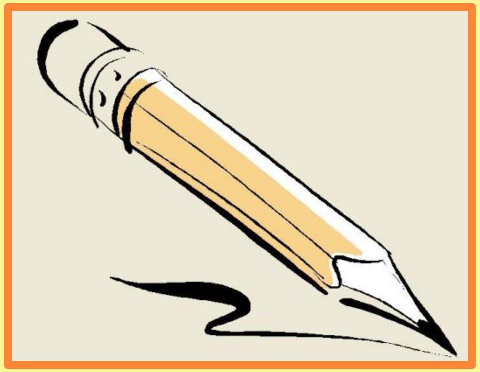
sinx=a

если $|a| > 1$, то корней нет

если $|a| \leq 1$, то x=(-1)^{k}arcsina+πk, k∈ Z

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$$

arcsin(-a)=-arcsina



Частные случаи:

$\sin x=0$

$x=\pi n,\ n\in Z$

$\sin x=1$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

$\sin x=-1$

$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z$

тригонометрических уравнений

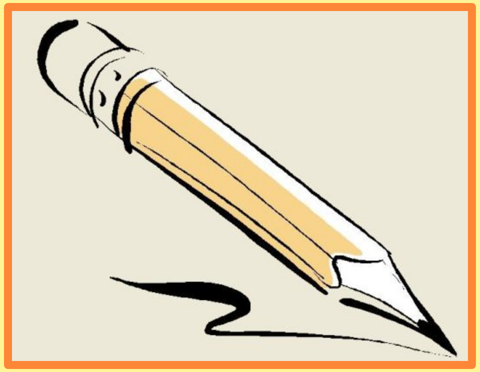
cosx=a

если $|a| > 1$, то корней нет

если $|a| \leq 1$, то $x=\pm\arccos a+2\pi k,\ k\in Z$

$$0 \leq \arccos a \leq \pi$$

$\arccos(-a)=\pi-\arccos a$



Частные случаи:

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

$\cos x=1$

$x=2\pi n,\ n\in Z$

$\cos x=-1$

$x=\pi+2\pi n,\ n\in Z$

тригонометрических уравнений

tgx=a, a∈ R

x=arctga+πn, n∈ Z

$$-\frac{\pi}{2} < arctga < \frac{\pi}{2}$$

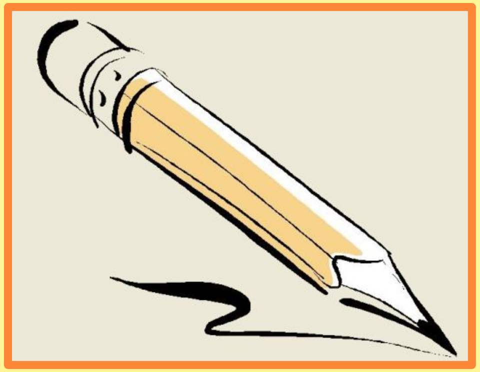
arctg(-a)=-arctga

arcctg(-a)=π-arcctga

ctgx=a, a ∈R

x=arcctga+πn, n∈Z

$$0 < arcctga < \pi$$



Блиц-опрос

Решить уравнения:

$\sin x = \frac{1}{2}$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\mathrm{tg}\, x = 0$ $\mathrm{ctg}\, x = 1$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos x = -\frac{1}{2}$ $\mathrm{tg}\, x = -\sqrt{3}$ $\mathrm{ctg}\, x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Основные методы решения:

- разложение на множители;
- способ замены;
- сведение к однородным уравнениям;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- введение вспомогательного аргумента.

Решение уравнений разложением на множители

Пример: sin2x-cosx=0

Решение: применим формулу синуса двойного угла

2sinxcosx-cosx=0

cosx(2sinx-1)=0

cosx=0 или 2sinx-1=0

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$ $\qquad$ $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+\pi k$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in Z$

помощью замены переменных

Пример: $\cos^2 x+\cos x-2=0$

Решение: пусть $\cos x=t$, тогда

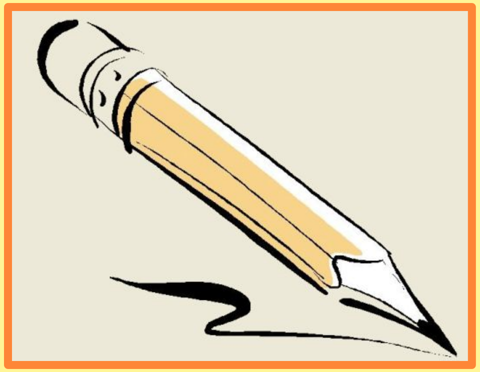
$$t^2+t-2=0$$

$t_1=1$ $t_2=-2$, то есть

$\cos x=1$ | $\cos x=-2$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$ | корней нет

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$



уравнений и уравнений, сводящихся к ним

Однородные уравнения:

$a_o\sin x + a_1\cos x = 0$ – 1 степени

$a_o\sin^2 x + a_1\sin x\cos x + a_2\cos^2 x = 0$ – 2 степени.

Решаются путем деления обеих частей уравнения на высшую степень $\cos x \neq 0$

Пример: sin5x+cos5x=0

Решение: разделим обе части уравнения на cos5x≠0, получим

tg5x+1=0

tg5x=-1

5x= $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, k $\in$ Z

x= $-\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}k$, k $\in$ Z

Ответ: $-\frac{\pi}{20}+\frac{\pi}{5}\kappa$, k $\in$ Z

Решение уравнений преобразованием суммы тригонометрических функций в произведение

Пример: $\cos\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)$-sin2x=0

Решение: используя формулу приведения, получим: sin3x-sin2x=0

Используем формулу разности синусов:

$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2}=0$

$\sin\frac{x}{2}=0$ или $\cos\frac{5x}{2}=0$

$x=2\pi n,\ n\in Z$ $x=\frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n,\ n\in Z$

Ответ: $2\pi n;\ \frac{\pi}{5}+\frac{2\pi}{5}n,\ n\in Z$

Решение уравнений преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму

Используются формулы:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

Пример: sin2xsin6x=cosxcos3x

Решение: $\frac{1}{2}\left[\cos(2x-6x)-\cos(2x+6x)\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\cos(x-3x)+\cos(x+3x)\right]$

cos4x-cos8x=cos2x+cos4x

cos2x+cos8x=0

2cos5xcos3x=0

cos5x=0 **или** cos3x=0

x= $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n$, n $\in$ Z x= $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, n $\in$ Z

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi}{5}n$; $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n$, n $\in$ Z

Решение уравнений с помощью формул понижения степени

Пример: $\sin^2 2x+\cos^2 5x=1$

Решение: воспользуемся формулами:

$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$ $\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$

Получим:

$$\frac{1}{2}(1-\cos 4x)+\frac{1}{2}(1+\cos 10x)=1$$

$$-\frac{1}{2}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 10x=0$$

$\cos 10x-\cos 4x=0$

$-2\sin 3x\sin 7x=0$

$\sin 3x=0$ или $\sin 7x=0$

$x=\frac{\pi}{3}n$, $n\in Z$ $x=\frac{\pi}{7}n$, $n\in Z$

Ответ: $\frac{\pi}{3}n$; $\frac{\pi}{7}n$, $n\in Z$

Решение уравнений с помощью введения вспомогательного аргумента

Применяется для решения уравнений вида:
asinx+bcosx=c

Введем: $\sin\gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Тогда:
asinx+bcosx= $\sqrt{a^2+b^2}$ (sinxcosγ+cosxsinγ)=

= $\sqrt{a^2+b^2}$ sin(x+γ), где γ находится из уравнения

$\operatorname{tg}\gamma = \frac{b}{a}$

Пример: $\sqrt{3}$ sinx − $\sqrt{2}$ cosx = −$\sqrt{5}$

Решение: $\sqrt{3}$ sinx − $\sqrt{2}$ cosx = −$\sqrt{5}$

$\sqrt{5}$ sin(x-γ)=- $\sqrt{5}$, где γ=arctg $\sqrt{\frac{2}{3}}$

sin(x-γ)=-1

x-γ= $-\frac{\pi}{2}$+2πn, n $\in$ Z

x= $-\frac{\pi}{2}$+γ+2πn, n $\in$ Z

x= $-\frac{\pi}{2}$+arctg $\sqrt{\frac{2}{3}}$+2πn, n $\in$ Z

Ответ: $-\frac{\pi}{2}$ +arctg $\sqrt{\frac{2}{3}}$ +2πn, n $\in$ Z

Проверь себя:

1)$\sin x+\cos x=\sin x\cos x+1$

2)$2\sin^2 x-\cos x-1=0$

3)$\mathrm{tg}x-2\mathrm{ctg}x+1=0$

4)$3\sin^2 x+4\cos^2 x=13\sin x\cos x$

5)$\cos 3x+\cos 5x=0$

6)$\sin x+\sin 3x+\sin 5x=0$

7)$\cos 7x\cos 10x=\cos 2x\cos 15x$

8)$\sin^2 6x+8\sin^2 3x=0$

9)$5\sin x-12\cos x=13$

Ответы:

1) $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n \in Z$

2) $2\pi n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n \in Z$

3) $\frac{\pi}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}2+\pi n,\ n \in Z$

4) $\operatorname{arctg}4+\pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi n,\ n \in Z$

5) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}n$; $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n \in Z$

6) $\frac{\pi}{3}n$; $\pm\frac{2\pi}{3}+\pi n,\ n \in Z$

7) $\frac{\pi}{8}n$; $\frac{\pi}{5}n,\ n \in Z$

8) $\frac{\pi}{3}n,\ n \in Z$

9) $2\operatorname{arctg}5+2\pi n,\ n \in Z$

МОЛОДЦЫ

- Спасибо за работу!
- Удачи в изучении тригонометрии!

Литература

1. Кравцев С.В. Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных.-М.: «Экзамен», 2005.- 544с.
2. Энтина С.Б., Юдовин М.Э. Сборник задач с ответами и решениями. Темы: Тригонометрические функции. Показательные и логарифмические неравенства. Интеграл и его свойства. Учебн. пособ.-СПб.: СВЕТ, 1995.-187с.
3. Макеева А.В. Карточки по тригонометрии. 10-11 классы: Дидактический материал для учителей.- ,Саратов: Лицей, 2003.-128с.