Уравнения и неравенства с модулем

Урок алгебры в 9 классе (занятие элективного курса) по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащих модули».   Учитель математики МБОУ СОШ №6 г. Железнодорожного Московской области

Лодина Виолетта Сергеевна.

«Модуль» (от лат. modulus-мера) ввёл английский математик Р. Котес (1815-1716г.г.) Знак модуля - немецкий математик (в 1841г.) К. Вейерштрасс (1815-1897г.г.)

Модуль числа a есть расстояние от нуля до точки a, $|a| = \begin{cases} a, a \geq 0 \\ -a, \ a < 0 \end{cases}$

Модуль разности двух чисел равен расстоянию между точками числовой прямой, соответствующим этим точкам.

$$|x - b| = a, a \geq 0, \qquad \left[\begin{array}{l} x - b = a \\ x - b = -a \end{array}\right.$$

Используя определение модуля и его геометрический смысл, можно решить простейшие уравнения и неравенства с модулем. Простейшие уравнения и неравенства удобно решать с помощью равносильных преобразований: возведение в квадрат и т.д.

ВВЕДЕНИЕ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ И ЕГО ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ.

Классификация уравнений и неравенств с модулем

На занятии изучается методика решения уравнений и неравенств, содержащих модули. Даётся подробная классификация уравнений и неравенств с модулем.

УРАВНЕНИЯ

НЕРАВЕНСТВА

- $|f(x)| = a$

  $a \geq 0\,, a - const$

  $\left[\begin{array}{l} f = a \\ f = -a \end{array}\right.$

- $|f(x)| \leq a,$

  $-a \leq f(x) \leq a, \quad \begin{cases} f \leq a \\ f \geq -a \end{cases}$

- $|f(x)| \geq a, a \geq 0, \left[\begin{array}{l} f \geq a \\ f \leq -a \end{array}\right.$

$1)\, |x^2 - 5x| = 6$

$2)\, |2x - 3| = 1$

$3)\, \big||x| - 2\big| = 4$

$1)\, |x^2 - 5x| \leq 6$

$2)\, |5x - 3| \leq 4$

$3)\, \left|\frac{x-1}{x+2}\right| \leq 2$

$1)\, |x^2 - 5| \geq 4$

$2)\, |5x - 3| \geq 2$

$3)\, |2x - 6| \geq 3$

1 РАЗДЕЛ

ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнения

Неравенства

$$❑\ |f(x)| = g(x)$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right. \\ g \geq 0 \end{cases}$$

$$❑\ |f(x)| \leq g(x)$$

$$-g \leq f \leq g \qquad \begin{cases} f \leq g \\ f \geq -g \end{cases}$$

$$❑\ |f(x)| \geq g(x), \quad \left[\begin{array}{l} f \geq g \\ f \leq -g \end{array}\right.$$

1) $|x^2 + x - 1|$=2x-1
2) $|x^2 + 3x - 10|$=3x-1
3) $x^3 - |x - 1|$=1

1) $|x - 1| \leq 2x + 1$
2) $|x^2 - x| \leq$x
3) $|x^2 - x| \leq$x+2

1) $\left|\frac{x-2}{x+1}\right| \geq$x
2) $|3x + 2|$+x>1
3) $\left|\frac{1}{x} - 1\right|$ >x+2

2 РАЗДЕЛ
ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Уравнения

Неравенства

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} = p \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $x|x| + 7x + 12 = 0$

2) $x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$

3) $x^2 - 3x + \frac{3{,}5-x}{|x-3{,}5|} = 0$

1) $\frac{|x-2|}{x+4} < 1$

2) $\frac{|x-1|+x+1}{2-x} \geq 2$

3) $\frac{1+|4-x|-x}{3-x} < 1$

$$\square \frac{|f(x)|+g}{v} \geq p \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \end{array}\right.$$

3 РАЗДЕЛ

СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ

Уравнения

Неравенства

$$\square\, |f(x)| = |g(x)|$$

$$\left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right.$$

$$\square\, |f(x)| \geq |g(x)|$$

$$(f - g)(f + g) \geq 0$$

1) $|x - x^2 - 1| = |2x + 3 - x^2|$
2) $|4 - y| = |2y + 1|$
3) $|x - 2| = 3|3 - x|$

1) $|x + x^2 - 3| \leq |x - 3 + 2x^2|$
2) $|3x - 1| < |2x - 5|$
3) $|2x + x^2 - 3| < |6x - 6|$

4 РАЗДЕЛ
ДВА МОДУЛЯ

Уравнения

Неравенства

- Метод промежутков.
- Находим корни подмодульных выражений.
- Составим совокупность нескольких систем.

1) $2|x-1|-3|x+4|=1$

2) $\frac{4|x-3|-x}{2-|x-2|}=4$

3) $|x^2-x|+|x-2|=x^2-2$

1) $|x^2-2x|+|x-1|\le x^2$

2) $|3-x|-|x-2|\le 5$

3) $|2x-6|+|4-x|\le |x-2|$

5 РАЗДЕЛ

НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ

Уравнения	Неравенства

- $|f(x)| = t,\ t \geq 0,$
  $f^2 = t^2$

- $a \leq |x| \leq b,\ \left[\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -b \leq x \leq -a \end{array}\right.$
- $|x| \geq a,\ \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a, \end{array}\right. \quad a \geq 0$

1)$(x-2)^2 - 8|x-2| + 15 = 0$
2)$x^2 + |x| - 6 = 0$
3)$x^2 - 2x - 5|x-1| + 5 = 0$

1)$x^2 - |x| - 12 \geq 0$
2)$20 - 3x^2 + 11|x| > 0$
3)$x^2 - 2x + 1 < 2|x-1|$

6 РАЗДЕЛ
ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнения	Неравенства
❑ Совокупность систем	❑ Замена переменной

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С МОДУЛЕМ

$$|f(x)| = a,\ \ a \geq 0,\quad \left[\begin{array}{l} f = a \\ f = -a \end{array}\right.$$

$$|f(x)| = g(x),\quad \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right. \\ g \geq 0 \end{array}\right.$$

Пример №1 $|x^2 - 5x| = 6$

Решение $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 6 \\ x^2 - 5x = -6 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 6, x_2 = -1 \\ x_1 = 2, x_2 = 3 \end{array}\right.$$

Ответ $\{-1;\ 2;\ 3; 6\}$

Пример №1 $|x^2 + x - 1|$=2x-1

Решение $\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 1 = 2x - 1 \\ x^2 + x - 1 = -2x + 1 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{array}\right. \qquad \boldsymbol{x \geq 0,5}$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ x_1 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2} \end{array}\right.$$

Ответ $\left\{1; \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\right\}$

1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ С МОДУЛЕМ

САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$|2x - 3| = 1$ **ОТВЕТ** $\{1;\ 2\}$

$$|f(x)| \le a, a \ge 0\ , a - const$$

$$-a \le\ f(x) \le a, \quad \begin{cases} f \le a \\ f \ge -a \end{cases}$$

$$|f(x)| \ge a, \quad \left[\begin{array}{l} f \ge a \\ f \le -a \end{array}\right.$$

$$a \ge 0, \quad \mathbf{a - const}$$

Пример №1 $|x^2 - 5x| \le 6$

Решение $-6 \le x^2 - 5x \le 6$

$$\begin{cases} x^2 - 5x \le 6 \\ x^2 - 5x \ge -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 5x - 6 \le 0 \\ x^2 - 5x + 6 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \le x \le -6 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ $[-1; 2]\ U[3; 6]$

Пример №1 $|x^2 - 5| \ge 4$

Решение

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - 5 \ge 4 \\ x^2 - 5 \le -4 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 \ge 9 \\ x^2 \le 1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{c} x \ge 3 \\ x \le -3 \\ -1 \le x \le 1 \end{array}\right.$$

Ответ $(-\infty; -3]\ U[-1; 1]\ U[3; +\infty)$

1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$|5x - 3| \le 4$ **ОТВЕТ** $[-0,2; 1,4]$

$$|f(x)| = a, \left[\begin{array}{l} f = a \\ f = -a \end{array}\right.$$
$$a \geq 0, \mathrm{a} - \mathrm{const}$$

$$|f(x)| \geq a, \quad \left[\begin{array}{l} f \geq a \\ f \leq -a \end{array}\right.$$
$$a \geq 0, \quad \mathrm{a} - \mathrm{const}$$

$$|f(x)| = g(x), \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right. \\ g \geq 0 \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \leq a, a \geq 0\,, a - const$$
$$-a \leq f(x) \leq a, \quad \left\{\begin{array}{l} f \leq a \\ f \geq -a \end{array}\right.$$

Пример №2 $|2x - 3| = 1$

Решение $\left[\begin{array}{l} 2x - 3 = 1 \\ 2x - 3 = -1 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right.$$

Ответ $\{1;\ 2\}$

Пример №2 $|5x - 3| \leq 4$

Решение

$$-4 \leq 5x - 3 \leq 4,$$
$$-1 \leq 5x \leq 4,$$
$$-0{,}2 \leq x \leq 1{,}4$$

Ответ $[-0{,}2;\, 1{,}4]$

1-2 РАЗДЕЛ ПРОСТЕЙШИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

❑ $$\frac{|f(x)|+g}{v}=p \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f\ge 0\\ \dfrac{f+g}{v}=p\end{cases}\\ \begin{cases} f<0\\ \dfrac{-f+g}{v}=p\end{cases}\end{array}\right.$$

❑ $$\frac{|f(x)|+g}{v}\ge p \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} f\ge 0\\ \dfrac{f+g}{v}\ge p\end{cases}\\ \begin{cases} f<0\\ \dfrac{-f+g}{v}\ge p\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример №1 $\frac{|x-2|}{x+4}<1$ **Ответ** $(-\infty;-4]\cup[-1;+\infty)$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2\ge 0\\ \dfrac{x-2}{x+4}<1\end{cases}\\ \begin{cases} x-2<0\\ \dfrac{-x+2}{x+4}<1\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 2\\ \dfrac{x-2-x-4}{x+4}<0\end{cases}\\ \begin{cases} x<2\\ \dfrac{-x+2-x-4}{x+4}<0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 2\\ \dfrac{-6}{x+4}<0\end{cases}\\ \begin{cases} x<2\\ \dfrac{-2x-2}{x+4}<0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 2\\ x+4>0\end{cases}\\ \begin{cases} x<2\\ \dfrac{2x+2}{x+4}>0\end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x\ge 2\\ x>-4\end{cases}\\ \begin{cases} x<2\\ \left[\begin{array}{l} x>-1\\ x<-4\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

3 РАЗДЕЛ СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ

САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$x^2-5x-\frac{6|x|}{x}=0$ **ОТВЕТ** $x=6$

- $\frac{|f(x)|+g}{v} = p$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} = p \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} = p \end{cases} \end{array}\right.$

- $\frac{|f(x)|+g}{v} \geq p$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f \geq 0 \\ \frac{f+g}{v} \geq p \end{cases} \\ \begin{cases} f < 0 \\ \frac{-f+g}{v} \geq p \end{cases} \end{array}\right.$

Пример №2 $x^2 - 5x - \frac{6|x|}{x} = 0$ **Решение**

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 5x - 6 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ x_1 = 6, x_2 = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ x_1 = 2,\ x_2 = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ $x = 6$

3 РАЗДЕЛ СОВОКУПНОСТЬ ДВУХ СИСТЕМ

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

$$|f(x)| = |g(x)|, \left[\begin{array}{l} f = g \\ f = -g \end{array}\right.$$

$$|f(x)| \geq |g(x)|,$$
$$(f - g)(f + g) \geq 0$$

№1 $|-x^2 + x - 1| = |-x^2 + 2x + 3|$

Решение

$$\left[\begin{array}{l} -x^2 + x - 1 = -x^2 + 2x + 3 \\ -x^2 + x - 1 = x^2 - 2x - 3 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -4 \\ 2x^2 - 3x - 2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -4, \\ x_1 = \frac{-1}{2}, x_2 = 2 \end{array}\right.$$

Ответ $\{-4;\ 2; -0,5\}$

№1 $|x + x^2 - 3| \leq |x - 2 + 2x^2|$

Решение

$$(2x + 3x^2 - 5)(-x^2 - 1) \leq 0$$
$$(2x + 3x^2 - 5)(x^2 + 1) \geq 0$$
$$(2x + 3x^2 - 5) \geq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq -\frac{5}{3} \end{array}\right.$$

Ответ $\left(-\infty; -\frac{5}{3}\right] \cup [1; +\infty)$

4 РАЗДЕЛ ДВА МОДУЛЯ

САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$|3x - 1| < |2x - 5|$ **ОТВЕТ** $(-4; 1,2)$

Пример №2. $|3x-1|<|2x-5|$

$(3x-1+2x-5)(3x-1-2x+5)<0$

$(5x-6)(x+4)<0\ ,-4\le x\le 1{,}2$

Ответ $(-4;1{,}2)$

Уравнения

Пример №1. $2|x-1|-3|x+4|=1$

Решение $\boldsymbol{x_1=1,x_2=-4}$

а) $\begin{cases} x\le -4 \\ -2x+2+3x+12=1 \end{cases}$ $x=-13$

б) $\begin{cases} -4\le x\le 1 \\ -2x+2-3x-12=1 \end{cases}$ $x=-2{,}2$

в) $\begin{cases} x>1 \\ 2x-2-3x-12=1 \end{cases}$ $x=-15$-не уд.

Ответ $\{-13;\ -2{,}2\}$

5 РАЗДЕЛ
НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ
МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ

Пример №1. $|x^2-2x|+|x-1|\le x^2$

Решение. $|(x-2)x|+|x-1|\le x^2$, $x_1=0, x_2=2, x_3=1,$

а) $\begin{cases} x\le 0 \\ x^2-2x-x+1\le x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\le 0 \\ x\ge \frac{1}{3} \end{cases}$, $\varnothing$

б) $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ -x^2+2x-x+1\le x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 2x^2-x-1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le -0{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$, $\varnothing$

в) $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ -x^2+2x+x-1\le x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ 2x^2-3x+1\ge 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1\le x\le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 1 \\ x\le 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$ $[1;2]$

г) $\begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-2x+x-1\le x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} x\ge 2 \\ x\ge -1 \end{cases}$ $(2:+\infty)$ **Ответ** $[1;+\infty)$

Неравенства

5 РАЗДЕЛ

НЕСКОЛЬКО МОДУЛЕЙ

МЕТОД ПРОМЕЖУТКОВ

- $|f(x)| = t,\ t \geq 0$
  $f^2 = t^2$

- $a \leq |x| \leq b,\ \left[\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -b \leq x \leq -a \end{array}\right.$
- $|x| \geq a,\ \left[\begin{array}{l} x \geq a \\ x \leq -a \end{array}\right.,\quad a \geq 0$

№1 $(x-2)^2 - 8|x-2| + 15 = 0$

Решение. $|x-2| = t,\ t > 0$

$t^2 - 8t + 15 = 0,\quad t_1 = 5, t_2 = 3$

$$\left[\begin{array}{l} |x-2| = 5 \\ |x-2| = 3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-2 = 5 \\ x-2 = -5 \\ x-2 = 3 \\ x-2 = -3 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 7 \\ x_2 = -3 \\ x_3 = 5 \\ x_4 = -1 \end{array}\right.$$

Ответ $\{-3; -1; 5;\ 7\}$

Пример №1. $x^2 - |x| - 12 \geq 0$

Решение. $|x| = t,\ t > 0$

$t^2 - t - 12 = 0,\ \left[\begin{array}{l} t \geq 4 \\ t \leq -3 \end{array}\right.$

$|x| \geq 4,\ \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ x \leq -4 \end{array}\right.$

Ответ $(-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$

6 РАЗДЕЛ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ
САМОСТОЯТЕЛЬНО ПРИМЕР №2

$x^2 + |x| - 6 = 0$ **ОТВЕТ** $x_1 = -2, x_2 = 2$

Замена переменной

№2. $x^2 + |x| - 6 = 0$

Решение. $|x| = t,\ t > 0$

$t^2 + t - 6 = 0$,

$t_1 = -3,\ t_2 = 2,\ |x| = 2,$

$x_1 = -2, x_2 = 2$

Ответ $x_1 = -2, x_2 = 2$

Домашнее задание

1) $||x| - 2| = 4$

3) $\left|\frac{x-1}{x+2}\right| \leq 2$

2) $|2x - 6| \geq 3$

4) $x^3 - |x - 1| = 1$

5) $|x^2 - x| \leq x+2$

6) $\left|\frac{1}{x} - 1\right| > x+2$

7) $x^2 - 3x + \frac{3,5-x}{|x-3,5|} = 0$

8) $\frac{1+|4-x|-x}{3-x} < 1$

9) $|x - 2| = 3|3 - x|$

10) $|2x + x^2 - 3| < |6x - 6|$

11) $|x^2 - x| + |x - 2| = x^2 - 2$

12) $|2x - 6| + |4 - x| \leq |x - 2|$

13) $x^2 - 2x - 5|x - 1| + 5 = 0$

14) $x^2 - 2x + 1 < 2|x - 1|$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ.

ПРИМЕРЫ №3 (1-6 РАЗДЕЛЫ).