Скалярное произведение векторов

Геометрия 9 класс

Автор: Николаева Е.В., учитель математики МОУ СОШ № 33

Угол между векторами

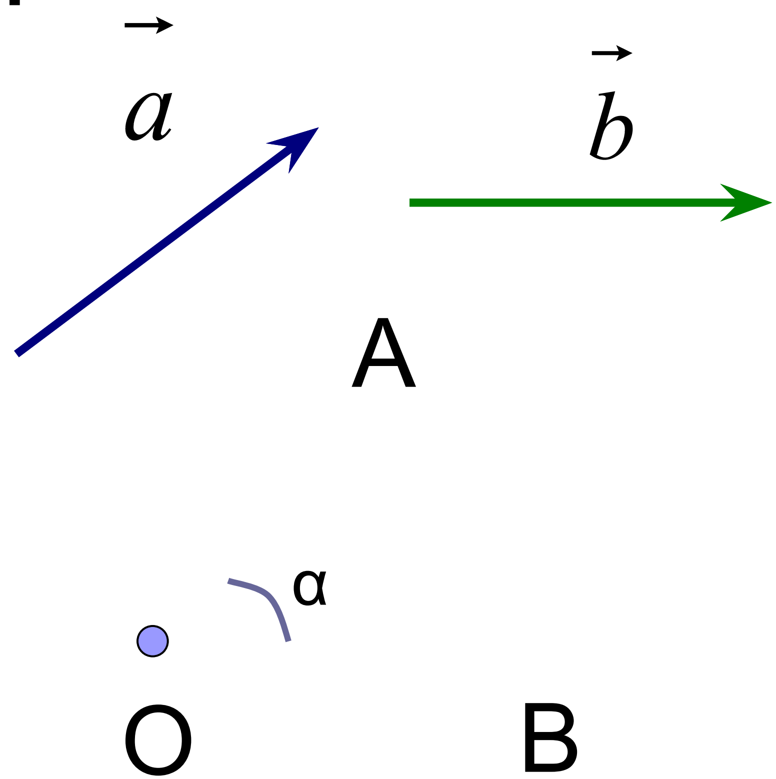
$\vec{a}$ и $\vec{b}$ не являются сонаправленными

O –произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

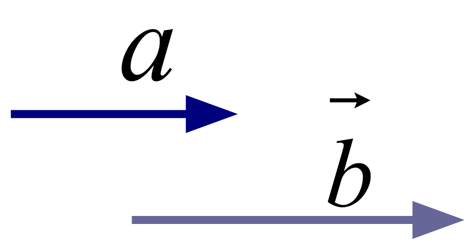
$\angle AOB = \boldsymbol{\alpha}$

$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = \boldsymbol{\alpha}$

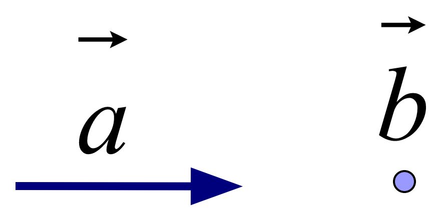


Угол между векторами

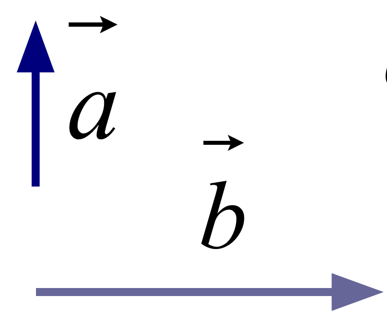
- Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, в частности один из них или оба нулевые, то угол между векторами равен 0°.
- Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^\circ$$



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 0^\circ$$



$$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 90^\circ$$

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

Найдите угол между векторами

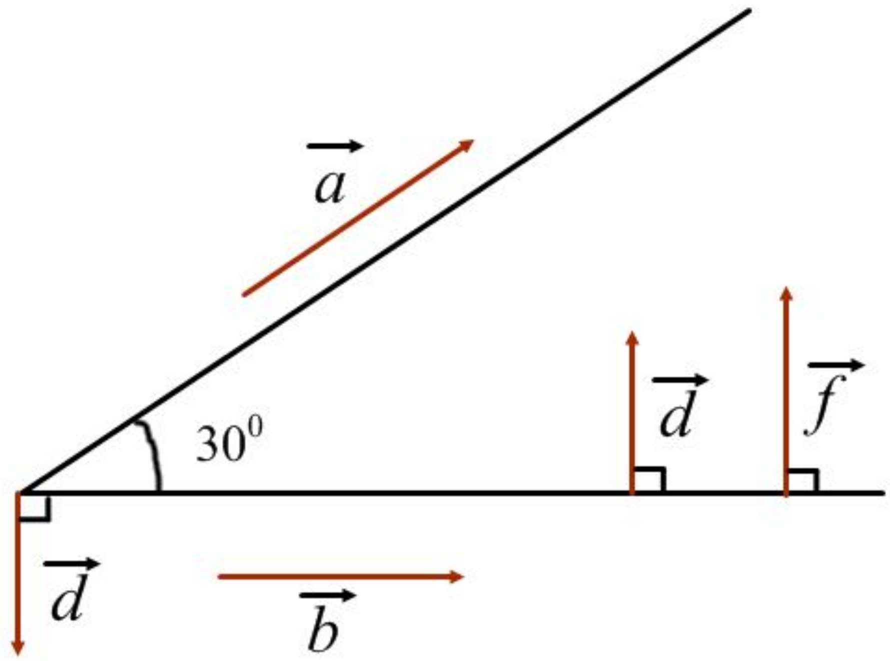
$\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$

$\widehat{\vec{a}\,\vec{c}}$

$\widehat{\vec{c}\,\vec{b}}$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{f}}$

$\widehat{\vec{d}\,\vec{c}}$



Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)$$

Пример:

$$\left|\vec{a}\right|=2,\quad \left|\vec{b}\right|=3,$$

α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\alpha=135^0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|cos\,\alpha$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot3\cdot cos135^0=6\cdot\left(-cos\,45^0\right)=-6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-3\sqrt{2}$$

Задача

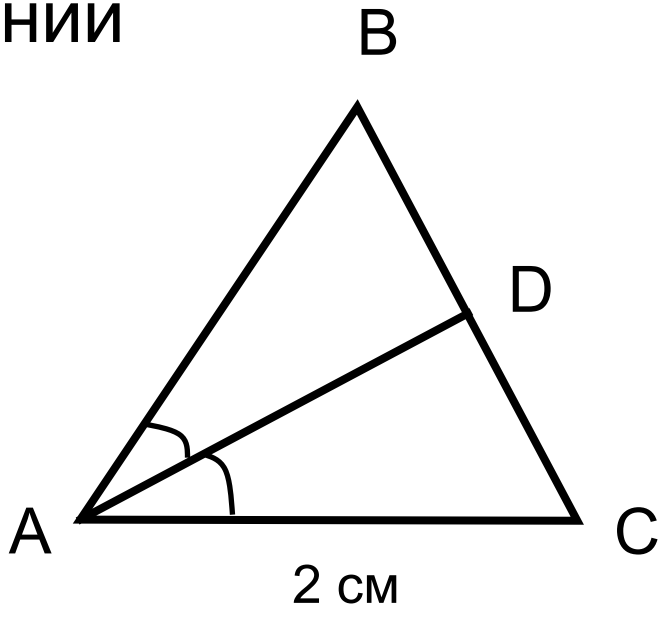
Дано: ΔABC – равносторонний

AC = 2 см

Найти:

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DB}$$



Необходимое и достаточное условие равенства нулю скалярного произведения

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда когда эти векторы перпендикулярны

$$1)\quad \left.\begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \perp \vec{b} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \qquad 2)\quad \left.\begin{array}{l} \vec{a} \neq \vec{0} \\ \vec{b} \neq \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$1)\quad \left.\begin{array}{l}\vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\\ \vec{a}\perp\vec{b}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$2)\quad \left.\begin{array}{l}\vec{a}\neq\vec{0}\\ \vec{b}\neq\vec{0}\\ \vec{a}\cdot\vec{b}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|cos\,90^0$$

$$cos\,90^0=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)=0$$

$$\vec{a}\neq\vec{0}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|\neq 0;\ \vec{b}\neq\vec{0}\Rightarrow\left|\vec{b}\right|\neq 0$$

$$cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right)=0\ \Rightarrow\ \widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=90^0$$

$$\vec{a}\perp\vec{b}$$

Скалярный квадрат

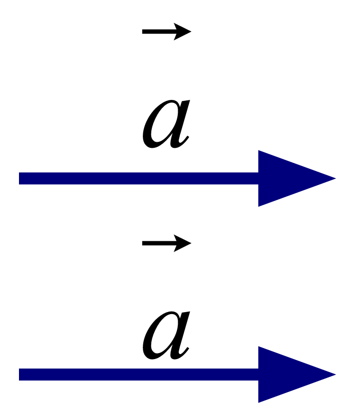
Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{a}$$

называется скалярным квадратом вектора

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| cos\left(\widehat{\vec{a}\;\vec{a}}\right)$$

$$cos\left(\widehat{\vec{a}\;\vec{a}}\right) = cos\,0^0 = 1$$



$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{a}\right|^2$$

Свойство.

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

Домашнее задание

- Пп. 101-102
- №1040
- № 1041
- № 1042

Применение скалярного произведения в физике

- Работа A постоянной силы $\vec{F}$ при перемещении тела из точки M в точку N, равна произведению длин векторов силы и перемещения на косинус угла между ними.
- Т.е. работа силы $\vec{F}$ равна скалярному произведению векторов силы и перемещения

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MN}\right| \cdot \cos\varphi$$

$$A = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MN}$$

Самое главное

- Скалярным произведением векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними
- Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда когда эти векторы перпендикулярны
- Скалярное произведение вектора самого на себя называется скалярным квадратом вектора
- Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.