Решение квадратных уравнений содержащих параметры в 9 классе.

- При решении задач с параметрами приходится всё время производить несложные, но последовательные рассуждения, составлять для себя логическую схему решаемой задачи. Поэтому такие задачи – незаменимое средство для тренировки логического мышления. Их решение позволяет намного лучше понять обычные, без параметров, задачи. А привычка к математическим рассуждениям очень полезна при изучении высшей математики и использовании полученных знаний впоследствии.

- Для квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0,$$

выделяем три случая:

1. Если D= b^2-4ac <0, то действительных решений у квадратного уравнения нет.
2. Если D= $b^2 - 4ac = 0$, то решение квадратного уравнения принимает вид $x = -\frac{b}{2a}$.
3. Если D= $b^2 - 4ac > 0$, то квадратное уравнение имеет два корня и для этих корней x_1 ,x_2 справедливо соотношение

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- 1. Важную роль при решении задач с параметром для квадратных уравнений играет *теорема Виета*. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, где x_1, x_2 - корни уравнения (случай D≥о), выполнено равенство

  $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)(x - x_2)$. Отсюда вывод теоремы Виета:

  $$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a};$$

  $$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

- 2. Второе важное замечание состоит в том, что при решении задач, сводящихся к исследованию квадратных уравнений, нужно помнить о геометрической интерпретации квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = a(x - x_в)^2 + y_в$, где $(x_в; y_в)$ – координаты вершины параболы. При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, причем абсцисса вершины параболы является точкой минимума. При $a < 0$ ветви параболы направлены вниз, причем абсцисса вершины параболы является точкой максимума.

- **Пример 1**. (ЕГЭ, 2005, $В_6$). При каких значениях а функция у = $\frac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$ имеет максимум при х = 4?

Решение. Исходную функцию представим в виде

$y = 2^{-x^2+ax+7}$.

Поскольку 2>1, то данная функция монотонно возрастает и максимум данная функция достигает в той точке, что и у квадратичной функции

$f(x) = -x^2 + ax + 7$. У этой параболы ветви направлены вниз, следовательно, максимум достигается в вершине параболы, т.е. в точке $x_в = \frac{a}{2}$. Согласно условию $x_в = 4$, следовательно $a = 8$. **Ответ:** $\boldsymbol{a = 8}$**.**

Пример 2. Решите уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0.$$

Решение. По виду это уравнение представляется квадратным. Но (внимание!) значение параметра a нам неизвестно, и оно вполне может оказаться равным 1; в этом случае коэффициент перед x^2 обращается в нуль и уравнение становится линейным. Квадратные и линейные уравнения решаются по разным алгоритмам.

Итак нам надо рассмотреть два случая: $a = 1$ и $a \neq 1$.

- Пусть a =1, тогда уравнение принимает вид: $0 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x + 7 = 0$, т. е. $6x + 7 = 0$.Решив это уравнение , получаем: x = - $\frac{7}{6}$.

Частичный ответ: если a = 1, то x = - $\frac{7}{6}$.

- Пусть $a \neq 1$. Мы имеем квадратное уравнение

$(a - 1)x^2 + 2(2a + 1)x + (4a + 3) = 0$.

Найдем его дискриминант: $D = (2(2a+1))^2 - 4(a-1)(4a+3) = \quad 20a + 16$.

Итак, $D = 20a + 16$.

Дальнейшие рассуждения зависят от знака дискриминанта. Если $D < 0$, то квадратное уравнение не имеет действительных корней; если $D = 0$, то уравнение имеет один корень; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня. Дискриминант обращается в нуль при $a = -\frac{4}{5}$, положителен при $a > -\frac{4}{5}$, отрицателен при $a < -\frac{4}{5}$. Именно эти три случая нам предстоит теперь рассмотреть.

- Пусть $a < -\frac{4}{5}$, тогда дискриминант меньше нуля и квадратное уравнение не имеет корней.

Частичный ответ: при $a < -\frac{4}{5}$, корней нет.

Пусть $a > -\frac{4}{5}$ (но, напомним $a \neq 1$). В этом случае дискриминант больше нуля и квадратное уравнение имеет два корня, которые мы найдем по формуле корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}.$$

Частичный ответ: при $a > -\frac{4}{5}$ $(a \neq 1)$ $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$.

- Осталось рассмотреть случай, когда $a = -\frac{4}{5}$. Используя формулу корней квадратного уравнения, получаем $x_1 = x_2 = -\frac{1}{3}$.

Частичный ответ: при $a = -\frac{4}{5}$, $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: если $a = 1$, то $x = -\frac{7}{6}$; если $a = -\frac{4}{5}$, то $x = -\frac{1}{3}$;

если $a > -\frac{4}{5}$ $(a \neq 1)$, то $x_{1,2} = \frac{-(2a+1) \pm \sqrt{5a+4}}{a-1}$; если

$a < -\frac{4}{5}$, корней нет.

- **Пример 3.** При каких значениях параметра a корни уравнения $2ax^2$-$2x - 3a - 2 = 0$ меньше 1?

Решение.

Если а = 0, то уравнение примет вид $2x - 2 = 0$. Корень этого уравнения будет $x = -1$. Этот корень удовлетворяет условию $x<1$.

Частичный ответ: при $a = 0$, $x = -1$.

- Если а $\neq 0$, то заданное уравнение является квадратным. График функции y=f(x), где f(x)= $2ax^2$-2x-3a-2 является парабола с ветвями вверх, если $2a>0$, и ветвями вниз, если 2a<0. Поскольку корни этого уравнения, по условию, должны быть меньше 1, то парабола на координатной плоскости должна располагаться как показано на рис. 1 (для $2a>0$) или на рис. 2

(для 2a<0).

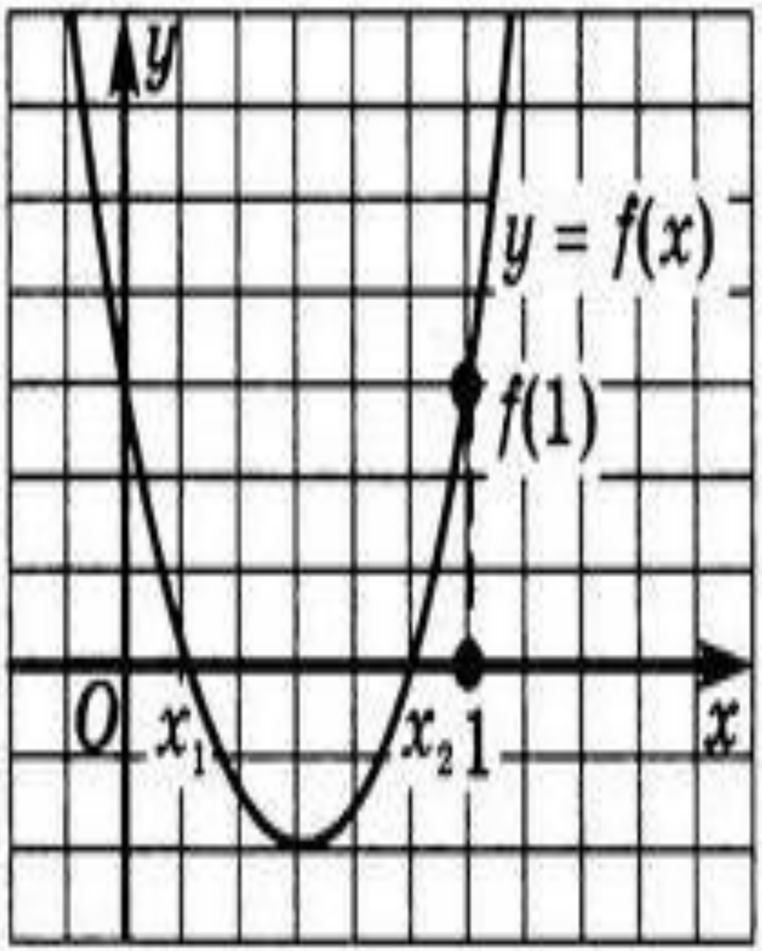

Рис. 1

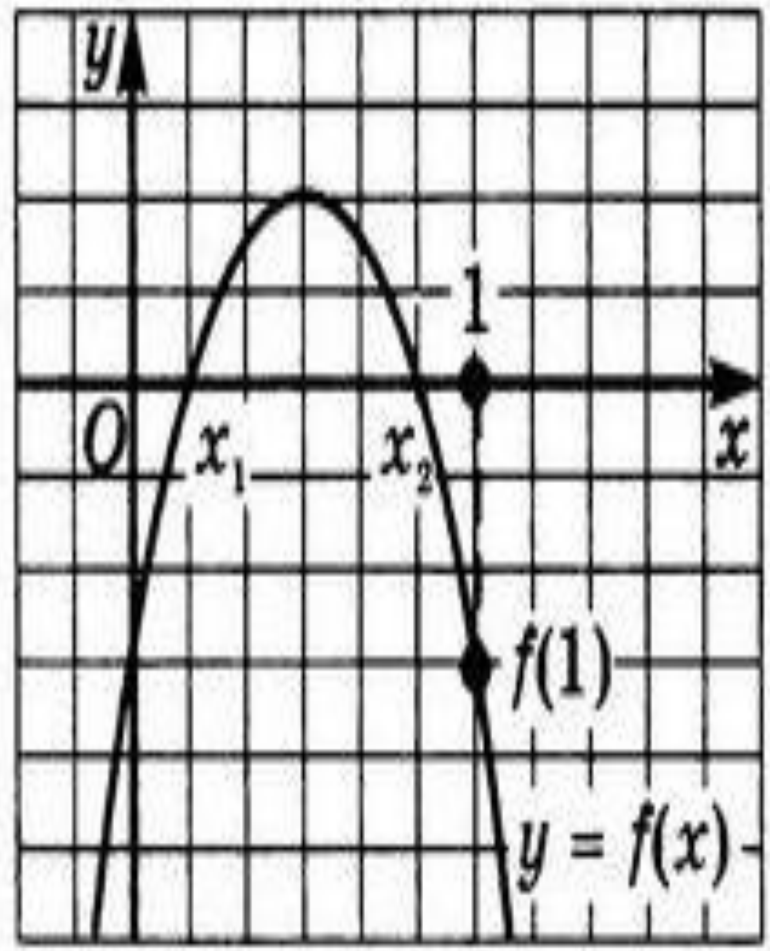

Рис. 2

- Дадим аналитическое описание геометрической модели, представленной на рис.1. Во-первых, напомним, при $2a>0$ ветви параболы направлены вверх. Во-вторых, парабола обязательно пересекается с осью Ох (в крайнем случае касается её), иначе у квадратного уравнения не будет корней. Корни есть, значит дискриминант не отрицателен. В-третьих, в точке $x=1$ имеем $f(1)>0$. В четвертых, $x_в<1$.

- Итак получаем систему неравенств – аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис.1.

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ D \geq 0, \\ f(1) > 0, \\ x_{в} < 1. \end{cases}$$

- Аналогичные рассуждения позволяют составить вторую систему неравенств – аналитическую модель, дающую описание геометрической модели, представленной на рис. 2:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ D \geq 0, \\ f(1) < 0, \\ x_{в} < 1. \end{cases}$$

- Решим первую систему неравенств.

Найдем дискриминант. D=4-4·2a·(-3a-2)=24a^2+16a+4.

Найдем f(1). f(1)=2a·1^2-2·1-3a-2=-a-4.

Найдем $x_в$, $x_в=\frac{2}{4a}$. Так как $x_в < 1$, получаем: $a< 0$ и

$$a > 0{,}5$$

Таким образом, первая система неравенств имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2a > 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geq 0, \\ -a - 4 > 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$$

.

- Эта система не имеет решений, поскольку из первого её неравенства получаем $a>0$, а из третьего получаем $a < -4$, что не может одновременно выполняться ни при каких значениях a.

Вторая система неравенств имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 2a < 0, \\ 24a^2 + 16a + 4 \geq 0, \\ -a - 4 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$$

.

- Сразу обратим внимание на то, что квадратный трехчлен $24a^2 + 16a + 4$ имеет отрицательный дискриминант (D=16^2 - 4·4·24<0) и положительный старший коэффициент. Значит при всех значениях a выполняется неравенство $24a^2+16a+4>0$, а потому квадратное неравенство в данной системе неравенств можно отбросить. Далее имеем: $\begin{cases} a < 0, \\ a > -4, \\ \left[\begin{array}{l} a < 0 \\ a > 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases}$

Решением данной системы является $-4<a<0$.

Итак, мы нашли все интересующие нас значения параметра *а*: $a=0$; $-4<a<0$.

Ответ: $-4<a\leq 0$

Пример 4. Какие значения может принимать сумма квадратов действительных, различных корней уравнения x^2+2ax+2a^2- 2 – 12=0?

Решение. Квадратное уравнение имеет два различных действительных корня, когда дискриминант больше нуля. Решим неравенство D>0. $(2a)^2$-4· (2a^2-2-12)>0,

получаем a ∈(-3;4).

По теореме Виета x_1+x_2= -2a; x_1·x_2=2a^2-a-12. Следовательно, ${x_1}^2$+${x_2}^2$= $(x_1+x_2)^2$-2x_1x_2= 2a+24. Т.к. a∈ $(-3;4)$, то $2a+24\in(18;32)$. **Ответ**: $(18;32)$.

Вывод: основой для усвоения материала является здравый смысл ученика, а не только и не столько его предварительные знания.

Спасибо за внимание.