Теория игр

Основные понятия

Предмет изучения

- **Теория игр** – раздел теории исследования операций, изучающий формальные модели принятия оптимальных решений в конфликтных ситуациях.
- Математическая модель конфликтной ситуации называется **игрой.**

Основные понятия теории игр

- **Конфликтной** называется ситуация, в которой взаимодействует несколько сторон, и при этом каждый из участников старается достичь своей цели доступным ему способом, а результат взаимодействия зависит от действий каждого участника.
- **Черты конфликтной ситуации:**

✔ наличие заинтересованных сторон
✔ наличие своих интересов (целей) у каждой стороны
✔ наличие набора возможных действий у каждой из сторон
✔ часто недостаток информации (неопределенность)

- <u>ПРИМЕРЫ</u>

- Покупатель и продавец
- Работник и работодатель
- Спортивные состязания
- Вооруженные конфликты

Игроки – заинтересованные стороны в игре (участники игры).

Парная игра – игра, в которой принимают участие два игрока.

Множественная игра – игра с числом участников более двух.

Коалиция - объединение игроков

- коалиции действия, коалиции интересов

Стратегия – любое возможное действие (комплекс действий) игрока

Ход - выбор действия игроками (личный ход *)

Ситуация (исход игры) – состояние, в котором оказываются игроки после очередного хода

Будем предполагать, что каждый из участников <u>парной</u> игры обладает своим набором чистых стратегий:
$S_A=\{A_1,A_2,\ldots,A_m\}$, $S_B=\{B_1,B_2,\ldots,B_n\}$

В условиях конфликта каждый игрок делает свой ход, т.е. выбирает одну из своих возможных стратегий.

Сделав ход, игроки оказываются в ситуации $X_{ij}=\{A_i, B_j\}$.

Правила игры могут запрещать отдельные ситуации, которые называются «запрещенными».

Если в процессе игры возникает запрещенная ситуация, то игра считается несостоявшейся.

Функция выигрыша – степень удовлетворения интересов игрока (F_A).

Функция выигрыша определена на множестве ситуаций (S_A, S_B) и ставит в соответствие каждой ситуации X_{ij} некоторое число $F(X_{ij})$, называемое **выигрышем** игрока А в данной ситуации.

Реализация игры – выбор игроками своих возможных стратегий и получение в сложившейся ситуации своего выигрыша.

Предполагается, что игра происходит по определенным правилам (без этого не возможна формализация задачи).

Правила - система условий, которые описывают:

-возможные действия каждого из игроков;

- объем информации, которую может получить каждая из сторон о возможных действиях противника;

- исход (результат) игры после каждой совокупности «ходов» противника

Цель теории игр – выработка рекомендаций для удовлетворительного поведения игроков в конфликте и выявления для каждого из них **оптимальной стратегии**.

Оптимальная стратегия – такая стратегия, которая при многократном повторении игры гарантирует игроку максимальный возможный средний выигрыш (при условии неопределенности –не зависящий от поведения других участников).

Замечания:

- Выбор оптимальной стратегии базируется на принципе **разумности** каждого игрока, т.е. поведение каждого из них направлено на достижение своих целей.
- Оптимальность опирается на некоторый **критерий**. Поэтому возможны случаи, когда стратегия является оптимальной в смысле одного критерия и не оптимальной в смысле другого.

Парная игра с нулевой суммой выигрыша

Определение. Игры, в которых каждый из игроков преследует противоположные интересы называются **антагонистическими.**

В антагонистической игре один из игроков выигрывает ровно столько, сколько проигрывает другой.

Следовательно: $F_A(A_iB_j) = - F_B(B_jA_i)$ или

$$F_A(A_iB_j) + F_B(B_jA_i) = 0$$

Антагонистическая парная игра определяется совокупностью $\{S_A, S_B, F_A\}$

Пусть игроки A и B имеют наборы стратегий $S_A=\{A_1\ A_2,\dots,A_m\}$ и $S_B=\{B_1,B_2,\dots,B_n\}$.

Ситуация $X_{ij}=(A_i,\ B_j)$ полностью определяет **выигрыш** игрока A, который равен значению функции выигрыша $F_A(A_iB_j)=a_{ij}$.

Это число в антагонистической парной игре одновременно **проигрыш** игрока B.

Матрица $A=\{a_{ij}\}$, в которой номер строки - номер стратегии игрока A, а номер столбца – номер стратегии игрока B, называется матрицей **выигрыша игрока** A.

Платежная матрица

$A =$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	….	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	….	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	….	a_{2n}
…..	….	….	….	….
A_m	a_{m1}	a_{m2}	….	a_{mn}

Аналогичным образом можно построить матрицу выигрышей игрока B. При этом **B= - A^{T}**. Таким образом матрица **B** полностью определяется матрицей **A.**

Матрица **A** называется также **платежной матрицей или матрицей игры.**

Замечания.

Матрица игры существенно зависит от упорядочивания множеств S_A и S_B. При иной нумерации стратегий матрица окажется другой. Т.е. одна и та же игра может быть представлена различными матрицами. Но функция F_A остается однозначно определенной.

Построение матрицы игры является весьма сложной задачей. Однако, всякую конечную игру можно привести к матричной форме.

Максиминные и минимаксные стратегии

Анализ платежной матрицы: игрок А

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	-4	3	5	-4
A_2	1	-2	1	-2
A_3	5	4	-2	-2

Если игрок **А** выбирает одну из своих стратегий (A_i), то его выигрыш – одно из значений a_{ij}, лежащее в строке i.

А исходит из того, что игрок В в ответ выберет наилучшую из своих стратегий, при которой выигрыш игрока А будет минимальным. Поэтому в каждой строке выбирается минимальное значение:

$$\boldsymbol{\alpha_i = \min(a_{ij})}$$

при $1 \le j \le n$ для всех $1 \le i \le m$

α_i – показатель эффективности стратегии A_i.

Анализ платежной матрицы: игрок А

РЕЗУЛЬТАТ**:** игрок **А** выберет ту стратегию, при которой показатель эффективности $\boldsymbol{\alpha_i}$ принимает максимальное значение:

$$\boldsymbol{\alpha = \max(\alpha_i) = \max \min(a_{ij}) \text{ при } 1 \le j \le n \text{ и } 1 \le i \le m}.$$

Данный **принцип** выбора стратегии называется ***максиминным***.. Число α – нижняя цена игры.

Число α**,** *максимин стратегий игрока А, показывает гарантированный выигрыш А, не зависящий от выбора стратегии игроком В.*

S_A^{maxmin} – множество максиминных стратегий игрока А

Анализ платежной матрицы : игрок В

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3
A_1	-4	3	5
A_2	1	-2	1
A_3	5	4	-2
β_j	5	3	5

В антагонистической игре результат игры для игрока В удобно анализировать как «проигрыш». Для стратегий B_j значения «функции проигрыша» расположены в столбцах матрицы F_A: a_{ji}.

Максимальный выигрыш игрока А :

$\boldsymbol{\beta_j = \max(a_{ji})}$ **при** $\boldsymbol{1 \leq i \leq m}$.

Интерес игрока В: выбрать такую стратегию, при которой игрок А будет иметь минимальный выигрыш:

$$\boldsymbol{\beta = \min(\beta_j) = \min\max(a_{ji})}$$

Это **минимаксный принцип**, а число

$\boldsymbol{\beta}$ – верхняя цена игры.

Объединим результаты анализа для игроков

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	-4	3	5	-4
A_2	1	-2	1	**-2**
A_3	5	4	-2	**-2**
β_j	5	**3**	5	3 \-2

Т.к.α_2=α_3, то стратегии

A_2 и A_3 – максиминные стратегии игрока **А**.

У игрока **В** стратегия B_2 минимаксная.

Игра с седловой точкой

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3	α_i
A_1	4	3	5	3
A_2	1	2	1	**1**
A_3	6	4	5	**4**
β_j	6	**4**	5	

Нижняя цена (4) игры совпадает с верхней (4).

Это число называется **ценой игры,** показывает максимальный гарантированный выигрыш для A и одновременно минимальный гарантированный проигрыш для B.

Игра решается в **чистых стратегиях:**

- оптимальная стратегия для A - A_3
- оптимальная стратегия для B - B_2

Уменьшение размерности игры

При анализе матрицы можно исключить из платежной матрицы стратегии, заведомо ***невыгодные*** по сравнению с другими стратегии.

- Для игрока A - те, которым соответствуют строки с элементами, заведомо меньшими по сравнению с элементами других строк
- Для игрока B - те, которым соответствуют столбцы с элементами, заведомо большими по сравнению с элементами других столбцов элементами, заведомо большими по сравнению с элементами других столбцов

Определение 1: стратегия A_i доминирует стратегию A_j **игрока А**, если для любой стратегии B_k , $k = 1,\ldots,n$ **игрока В**

$$F(A_i, B_k) \geq F\left(A_j, B_k\right).$$

Стратегия A_i - ***доминирующая***

Стратегия A_j - ***доминируемая***

Определение 2: стратегия B_i доминирует стратегию B_j **игрока В**, если для любой стратегии A_k , $k = 1,\ldots,m$ **игрока А**

$$F(A_k, B_i) \leq F\left(A_k, B_j\right).$$

Пример:

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	6	7	8
A_2	4	4	7	6
A_3	8	7	11	9
A_4	9	6	5	4

1) $A_1 \le A_3$, $A_2 \le A_3$. Вычеркиваем стратегии A_1, A_2.

Получаем $\begin{pmatrix} 8 & 7 & 11 & 9 \\ 9 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

2) $B_3 \ge B_4$, $B_1 \ge B_2$. Вычеркиваем стратегии B_1, B_3.

Получаем $\begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Приведение матричной игры к задаче линейного программирования

Пусть дана платежная матрица $(a_{ij})_{m \times n}$.

Все элементы a_{ij} платежной матрицы можно сделать неотрицательными. Тогда цена игры γ также будет неотрицательной величиной $\gamma \geq 0$.

Обозначим искомые оптимальные стратегии $S_A^*(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ и $S_B^*(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

При этом $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ и $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$.

При нахождения $S_A^*(p_1, p_2, \ldots, p_m)$ важно: эта стратегия дает А средний выигрыш,

не меньше, чем цена игры $\gamma \geq 0$ при любой стратегии игрока В,

Получаем систему
$$\begin{cases} a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{m1}p_m \geq \gamma \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{m2}p_m \geq \gamma \\ \ldots \\ a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + \ldots + a_{mn}p_m \geq \gamma \end{cases}.$$

Поделим каждое неравенство этой системы на γ и введем новые переменные

$x_i = p_i / \gamma$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Целевая функция: $Z = x_1 + x_2 + ... + x_n = \frac{p_1 + p_2 + ... + p_n}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \to \min$,

так как для игрока А цена игры находится как ***максимальный*** гарантированный выигрыш, а, следовательно, обратная ей величина должна исследоваться на *минимум.*

Система ограничений: $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + ... + a_{m1}x_m \geq 1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{m2}x_m \geq 1 \\ \ldots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + ... + a_{mn}x_m \geq 1 \end{cases}$.

Дополнительные условия, вытекающие из смысла переменной $\{x_i \geq 0 \ (i = 1,2,...,m)$

При нахождении оптимальной стратегии $S_B^*(q_1, q_2, \dots, q_n)$ для игрока В получаем

новую ЗЛП. В системе

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \dots + a_{1n}q_n \le \gamma \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + \dots + a_{2n}q_n \le \gamma \\ \dots \\ a_{n1}q_1 + a_{n2}q_2 + \dots + a_{nm}q_n \le \gamma \end{cases}$$

введем новые переменные $y_j = \dfrac{q_j}{\gamma}$ для всех $j = 1, 2, \dots, n$.

Целевая функция

$$F = y_1 + y_2 + \ldots + y_n = \frac{q_1 + q_2 + \ldots + q_n}{\gamma} = \frac{1}{\gamma} \to \max$$

исследуется на максимум, как обратная величина для проигрыша игрока B.

Система ограничений: $$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \le 1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \le 1 \\ \ldots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nm}y_n \le 1 \end{cases}.$$

Дополнительные условия $\{y_j \ge 0 \; (j = 1,2,\ldots,n)$.

При решении приведенных ЗЛП видим, что они являются ***двойственными*** по отношении друг к другу.

1) $\min Z = \max F = 1/\gamma$.

2) Матрицы систем ограничений по отношению задач друг к другу получаются транспонированием.

3) Система ограничений ЗЛП-1 имеет неравенства со знаками $\geq$, в ЗЛП-2 , соответственно знаки в неравенствах системы ограничений $\leq$.

4) Число переменных одной задачи равно числу неравенств в системе ограничений другой ЗЛП.