Методы оптимизации

Практика № 8

Алгоритм симплексного метода

Шаг 1. Получение начального решения.

Шаг 2. Выражение функции f только через свободные переменные.

Шаг 3. Проверка решения на оптимальность.

Преобразование систем линейных уравнений и неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ называется матрицей системы, а матрица

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$ называется расширенной матрицей системы.

Пример

Записать в канонической форме задачу

$$f = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 \leq 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20. \end{cases}$$

$$f' = -f = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3,$$

$$f' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \max.$$

Теперь перейдем к ограничениям. Первое ограничение имеет знак неравенства «≥», значит в его правой части надо вычесть переменную x_4:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10.$$

Второе ограничение имеет знак неравенства «≤», значит в левой части данного неравенства надо прибавить переменную x_5:

$$x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7.$$

Третье ограничение имеет форму уравнения, значит оно в преобразованиях не нуждается.

Таким образом, получим каноническую форму записи:

$$f' = -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_5 = 7, \\ 5x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 20. \end{cases}$$

Найти максимум функции: $F_{\max} = 4x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5$ при условиях:

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8. \end{cases} \qquad x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0$$

Пример

Максимизировать линейную целевую функцию:

$$Z_{\max} = -x_4 + x_5$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

и условиях неотрицательности:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geq 0.$$

Решение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5, \\ x_2 = 2 + x_4 - x_5, \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5. \end{cases}$$

при $x_4 = 0,\ x_5 = 0$

$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3$.

$Z_1 = 0$.

$x_4 = 0. \quad x_5 = 2,$

$x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0, x_5 = 2$ или (5, 0, 1, 0, 2).

$Z_2 = 2$

$x_5 = 2 - x_2 + x_4.$

$$\begin{cases} x_1 = 5 - 2\,x_2 + 3\,x_4, \\ x_3 = 1 + x_2 - 5x_4, \\ x_5 = 2 - x_2 + 2x_4. \end{cases}$$

$$Z = 2 - x_2 + x_4\,.$$

$$1 - 5x_4 \geq 0,$$

$$1 \geq 5x_4, \qquad x_4 = \frac{1}{5}.$$

$$x_4 \leq \frac{1}{5}.$$

$$x_4 = \frac{1}{5}, x_5 = \frac{12}{5} \text{ или } \left(\frac{28}{5},\ 0,\ 0,\ \ \frac{1}{5},\ \frac{12}{5}\right).$$

$$Z_3 = \frac{11}{5}$$

Выразим теперь $x_1,\ x_3,\ x_5$ через свободные $x_2,\ x_3$:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{28}{5} - \frac{5}{3}\,x_3 - \frac{7}{5}\,x_2, \\ x_4 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\,x_3 + \frac{1}{5}\,x_2, \\ x_5 = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}\,x_3 - \frac{3}{5}x_2 \end{cases}$$

$$Z = \frac{11}{5} - \frac{1}{5}\,x_3 - \frac{4}{5}x_2.$$

$$Z_{\max} = \frac{11}{5}.$$