ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

# Лекция по алгебре. Тема: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

# Домашнее задание:

1)Найдите сумму корней уравнения $|(x-2)^3 - 140| = 76$.

2)Укажите наибольшее решение уравнения $||1-2x|-1|=0$.

3)Укажите наименьший корень уравнения $||x-6|-6|=6$.

4)Сколько решений может иметь уравнение $|x-12|=a^2-5a+6$ в зависимости от *a* ?

5) Никольский.п.2.3(конспект- три вида ур.), №2.28(в,г), 2.29(а,б) ,2.30(а,г),2.31(а,г)

# Цель части 1

- Систематизировать знания по теме «Уравнения»: повторить рациональные уравнения, их виды, способы решения.
- Проверить: навыки решения квадратных уравнений.

# Равносильность уравнений.

# Основные определения.

1. Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными,* если они имеют одни и те же корни, или оба не имеют корней.

2. Уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называется *следствием* уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ , если каждый корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ является одновременно и корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$ .

3. *Областью определения* уравнения $f (x) = g (x)$ или *областью допустимых значений* (ОДЗ) переменной называют множество тех значений переменной $x$, при которых одновременно имеют смысл выражения $f (x)$ и $g (x)$ .

# Теоремы о равносильности уравнений.

***Теорема 1.*** **Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному .**

***Теорема 2.*** **Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному .**

***Теорема 3.*** **Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень получится уравнение, равносильное данному .**

***Теорема 4.*** **Если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение, которое:**
**а) имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения,**
**б) нигде в ОДЗ не обращается в нуль,**
**то получится уравнение, равносильное данному .**

***Следствие из теоремы 4.*** **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному .**

# Рациональные уравнения.

# Основные определения.

1. Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно Х ,называют **рациональными уравнениями** с неизвестным х .

**Пример:**

$$3x^5 - 8x^3 + 2x - 7 = 0; \qquad (3x^5 + 2)(x^2 - 5x - 6) = 0;$$

$$\frac{x^4 - 1}{x^5 + 1} = 7 + x \qquad \frac{2x^4 - 1}{x^5 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

2. **Корнем** (решением) уравнения с неизвестным х называют **число**, при подстановке которого в уравнение вместо х получается верное числовое равенство.

3. **Решить** уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.

1. Уравнение вида A(x)B(x)=0, где A(x), B(x) – многочлены относительно x , называются распадающимся уравнением.

$$A(x)\cdot B(x)=0 \ \text{равносильно} \ \left[\begin{array}{l} A(x)=0, \\ B(x)=0 \end{array}\right.$$

2. Уравнение вида A(x) / B(x)=0, где A(x), B(x) – многочлены относительно x .

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0 \ \text{равносильно} \ \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$$

3. Уравнение вида $\frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)}$,

где A(x), B(x), C(x),D(x) – многочлены относительно x .

$$\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{C(x)}{D(x)}=0, \frac{A(x)\cdot D(x)-C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}=0$$

1. Решите уравнение$(x^2-5x+6)$ $(x^2+ x-2)$.

Ответ: -2; 1; 2; 3

2. Решите уравнение

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-x-3}=0.$$

Решение:

а)Сначала решим уравнение $x^2+4x-21=0$,

$x_1= - 7; x_2 =3$

б)Подставим эти числа в знаменатель,

$x_1= - 7; x_1^2- x_1- 3 = 49 + 7- 3 \neq 0$

$x_2 = 3; x_2^2- x_2- 3 = 9 – 3 - 3 \neq 0$

Это значит ,что числа – 7; 3 являются корнями данного уравнения и других корней нет.

Ответ: -7; 3

3. Решите уравнение $\frac{x^2-5x+6}{x-3}=2x+3.$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}-\frac{2x+3}{1}=0,$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}-\frac{(2x+3)\cdot(x-3)}{x-3}=0,$$

$$\frac{x^2-5x+6-(2x+3)\cdot(x-3)}{x-3}=0,\frac{-x^2-2x+15}{x-3}=0$$

а) решим уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = 3$

б)Подставим эти числа в знаменатель,

$x_1 = - 5$; $x_1 - 3 = - 5 -3 \neq 0$

$x_2 = 3$; $x_2 - 3 = 3 – 3 - 3 = 0$

Это значит ,что только числа – 5 является корнем данного уравнения .

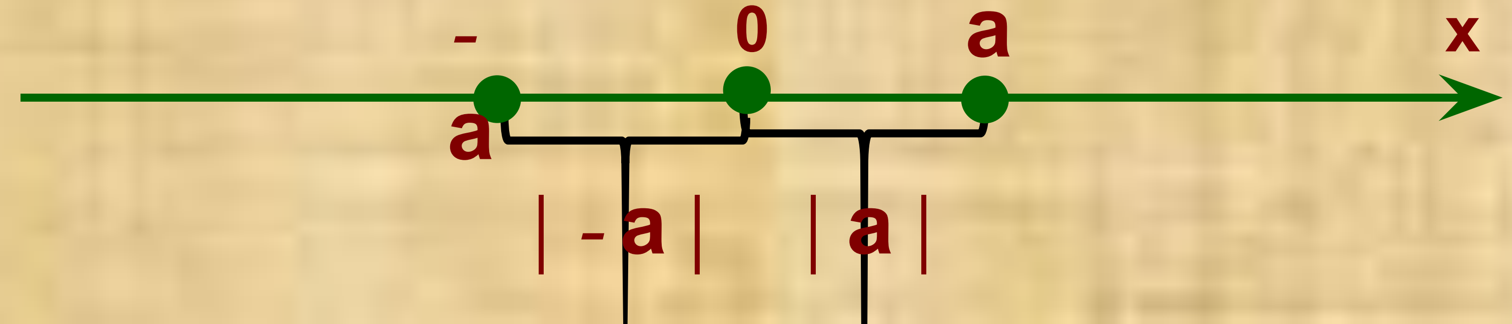
**Ответ: -5.**

# Алгоритмы решения уравнений,содержащих переменную под знаком модуля.

***Определение*** **Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют неотрицательное действительное число, определяемое равенством**

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}}$$

**Модуль – это расстояние от точки, изображающей данное число a на координатной прямой, до начала отсчёта.**



# Основные свойства модуля.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | $\lvert a \rvert \geq 0$ | 6 | $\lvert a - b \rvert = \lvert b - a \rvert$ |
| 2 | $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$ | 7 | $\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$ |
| 3 | $\lvert a \rvert^{2n} = a^{2n}$, $n \in N$ | 8 | $\lvert a : b \rvert = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert$, $b \neq 0$ |
| 4 | $\lvert a \rvert = 0$, если $a = 0$ | 9 | $\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$ |
| 5 | $\lvert a \rvert \geq a$ | 10 | $\lvert a - b \rvert \geq \lvert a \rvert - \lvert b \rvert$ |

# Раскройте модуль:.

а) $\left| 3 - \pi \right| = \pi - 3$

б) $\left| \sqrt{3} - \sqrt{5} \right| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

в) $\left| 2 - \sqrt{3} \right| = \left| \sqrt{4} - \sqrt{3} \right| = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

г) $\left| x^{4} + 1 \right| = x^{4} + 1$

*__Алгоритм решения уравнения__* $|f(x)| = a, a \in R$ .

1) Если $a < 0$ , то уравнение корней не имеет.

2) Если $a = 0$ , то уравнение примет вид :

$|f(x)| = 0$, т. е. $f(x) = 0$ .

3) Если $a > 0$ , то

$$|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$$

# Решить уравнения.

## 1

$| 2x - 3 | + 11 = 0,$

$| 2x - 3 | = -11,$

так как $| 2x - 3 | \geq 0$ для любых x,

а $-11 < 0$,
то уравнение
**не имеет корней.**

Ответ: корней нет.

## 2

$| x^2 - 4 | = 0,$

$x^2 - 4 = 0,$

$(x - 2)(x + 2) = 0,$

$x_1 = -2, x_2 = 2.$

Ответ: ± 2

## 3

$| x^2 - 5x + 4 | = 4,$

$$\left| x^2 - 5x + 4 \right| = 4,$$

$$\left[ \begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 4, \\ x^2 - 5x + 4 = -4, \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} x^2 - 5x = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0, D < 0 \end{array} \right.$$

$$x(x - 5) = 0, x_1 = 0, x_2 = 5.$$

Ответ:0;5.

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

# Лекция по алгебре. Тема: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля (2 часть)

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

# Проверка домашней работы

1) $|\,(x-2)^3 - 140|=76$.

**Решение:** $\left|(x-2)^3 - 140\right| = 76,$

$$\left[\begin{array}{l}(x-2)^3-140=76,\\(x-2)^3-140=-76,\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}(x-2)^3=76+140,\\(x-2)^3=-76+140\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}(x-2)^3=216,\\(x-2)^3=64\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x-2=6,\\x-2=4\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}x=8,\\x=6.\end{array}\right.$$

**Ответ: 6; 8.**

2) Решите $|\,|1-2x|-1|=0$.

**Решение:** $|\,|1-2x|-1|=0$ равносильно $|1-2x|-1=0$,

$$\left[\begin{array}{l}1-2x=1,\\1-2x=-1,\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}2x=0,\\2x=2,\end{array}\right.\quad\left[\begin{array}{l}x=0,\\x=1.\end{array}\right.$$

**Ответ: 0; 1.**

**3) Решите | |$x$-6|-6|=6.**

**Решение:**

$$\left[\begin{array}{l} |x-6|-6=6, \\ |x-6|-6=-6, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x-6|=12, \\ |x-6|=0; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-6=12, \\ x-6=-12, \\ x-6=0. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=18, \\ x=-6, \\ x=6. \end{array}\right.$$

**Ответ: -6; 6; 18.**

**4)Сколько решений может иметь уравнение |$x$-12|=$a^2$-5$a$+6 в зависимости от $a$ ?**

**Решение:**

**Оценим $a^2$-5$a$+6 (сравним с нулем)**

***1) Если $a^2$-5$a$+6=0, $a_1$=2, $a_2$=3***

***Тогда |$x$-12|= $a^2$-5$a$+6* равносильно |$x$-12|=0, *$x$ = 12***

***2) Если $a^2$-5$a$+6< 0,* то уравнение не имеет решения.**

**То есть** $a \in (2;3)$ **то уравнение не имеет решения.**

***3)Если $a^2$-5$a$+6>0,* то (a-2)(a-3)>0 на** $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$

**Тогда |$x$-12|= $a^2$-5$a$+6 равносильно**

$$\left[\begin{array}{l} x-12=a^2-5a+6, \\ x-12=-\left(a^2-5a+6\right), \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x=a^2-5a+18, \\ x=-a^2+5a+6, \end{array}\right.$$

**Ответ: 1.если $a_1$=2, $a_2$=3, то *$x$ = 12***

$2.\, если\ a \in (2;3), то\ уравнение\ не\ имеет\ решения$

$3.\, если\ a \in (-\infty;2)\cup(3;\infty), то\ x = a^2-5a+18,\ x=-a^2+5a+6$

## Алгоритм решения уравнения $|f(x)| = |\phi(x)|$

### 1 способ

$$|f(x)| = |\phi(x)|,$$

$$|f(x)|^2 = |\phi(x)|^2,$$

$$|f(x)|^2 - |\phi(x)|^2 = 0,$$

$$(f(x) - \phi(x))(f(x) - \phi(x)) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) - \phi(x) = 0, \\ f(x) + \phi(x) = 0. \end{array}\right.$$

### 2 способ

$$|f(x)| = |\phi(x)|,$$

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \phi(x), \\ f(x) = -\phi(x). \end{array}\right.$$

**_Пример._** Решить уравнение: $2|x + 1| = |3 - x|$

## 1 способ

$$2|x + 1| = |3 - x|, \; (2|x + 1|)^2 = |3 - x|^2,$$

$$(2|x + 1|)^2 - |3 - x|^2 = 0,$$

$$(2(x+1) - (3-x))(2(x+1) + (3-x)) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+2 - 3+x = 0, \\ 2x+2 + 3-x = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3x = 1, \\ x = -5; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1/3, \\ x = -5. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1/3$,
$x_2 = -5$.

## 2 способ

$$2|x + 1| = |3 - x|,$$

$$\left[\begin{array}{l} 2(x + 1) = 3 - x, \\ 2(x + 1) = -(3 - x); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x + 2 = 3 - x, \\ 2x + 2 = -3 + x; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1/3, \\ x = -5. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1/3$,
$x_2 = -5$.

# ***Алгоритм решения уравнения*** $|f(x)| = \phi(x)$

.

**1 способ**. Воспользуемся определением модуля.

Уравнение $|f(x)| = \phi(x)$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = \phi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -\phi(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

**2 способ**

Уравнение $|f(x)| = \phi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} \phi(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = \phi(x), \\ f(x) = -\phi(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

## Пример 1.

**Решить уравнение $| 2 - x | = 1 - 2x$.**

**Решение.**

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2 - x \geqq 0,\\ 2 - x = 1 - 2x;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2 - x < 0,\\ 2 - x = -1 + 2x;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \leqq 2,\\ x = -1;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x > 2,\\ 3x = 3;\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x \leqq 2,\\ x = -1;\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x > 2,\\ x = 1;\end{array}\right.\end{array}\right. \qquad x = -1$$

**Ответ: – 1 .**

## Пример 2.

**Решить уравнение $|x^2 + 3x - 4| = 3x$.**

**Решение.**

$$\begin{cases} 3x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 3x, \\ x^2 + 3x - 4 = -3x; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + 6x - 4 = 0; \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2, \\ x = -3 - \sqrt{13}, \\ x = -3 + \sqrt{13}; \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -3 + \sqrt{13}. \end{array}\right.$$

**Ответ:** $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -3 + \sqrt{13}. \end{array}\right.$

# Цель урока:

формирование знаний
и умений
решения уравнений вида

$|f_1 (x)| + |f_2 (x)| +| f_3 (x)| + ..+ | f_n (x)| = \phi (x)$

# План урока:

- Проверка домашнего задания.
- Объяснение нового материала.
- Закрепление нового материала.
- Закрепление навыков решения уравнений (самостоятельная обучающая работа).
- Контроль за усвоением материала (самостоятельная работа по вариантам).
- Подведение итогов урока. Обсуждение домашнего задания.

# «Цветик-семицветик»

## Повторим теорию

Сформулируйте определение модуля действительного числа.

Раскройте модуль, пользуясь определением: а) $|\pi - 3{,}2|$,

б) $\left|5 - \sqrt{5}\right|$ , в) $\left|\sqrt{10} - 2\sqrt{3}\right|$ .

Раскройте модуль выражений:

а) $2 \cdot |4 - x|$,

б) $|y + 3| - y$, в) $|x^6 + 7|$ .

**Сколько решений имеет уравнение**
**$|x| = a$ в зависимости от $a$?.**

**Приведите примеры уравнений вида $|7-4x| = c$,**
**чтобы оно имело: а) одно решение; б) два решения;**
**в) не имело решений**

**Сформулируйте алгоритм решения**
**уравнений вида $|f(x)| = g(x)$ .**

**Сформулируйте алгоритм решения**
**уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$**
**.**

# *Алгоритм решения уравнения*

$$|f_1 (x)| + |f_2 (x)| + | f_3 (x)| + \ldots + | f_n (x)| = \phi (x)$$

.

**Освободим левую часть уравнения от знака модуля. Для этого нужно:**

**1) найти значения переменной x , при которых каждый из модулей равен нулю;**

**2) отметить эти значения на числовой прямой и выделить интервалы, определить с каким знаком раскрывается каждый из модулей на каждом из интервалов, воспользовавшись определением модуля;**

**3) составить и решить совокупность смешанных систем.**

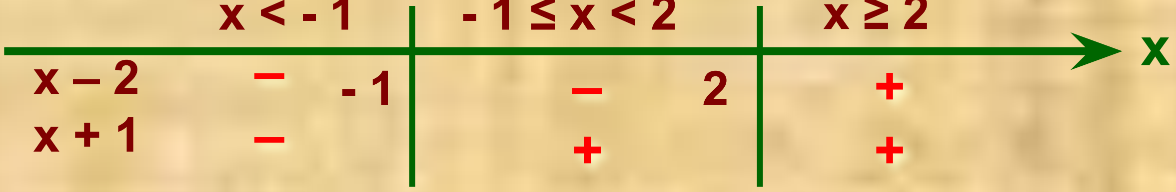
# Пример 1.

Решить уравнение $| x - 2 | + | x + 1 | = 3$.

**Решение.** 1) $| x - 2 | = 0$, $x - 2 = 0$, $x_1 = 2$.

$| x + 1 | = 0$, $x + 1 = 0$, $x_2 = -1$.

2)



|  | $x < -1$ | $-1 \le x < 2$ | $x \ge 2$ |
|---|---|---|---|
| $x - 2$ | – | – | + |
| $x + 1$ | – | + | + |

3)

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -(x - 2) - (x + 1) = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 2, \\ -(x - 2) + (x + 1) = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ (x - 2) + (x + 1) = 3; \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -x + 2 - x - 1 = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 2, \\ -x + 2 + x + 1 = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x - 2 + x + 1 = 3; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -2x = 2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 2, \\ 3 = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ 2x = 4; \end{array}\right. \end{array}\right. \Bigg|$$

верно для любого х

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x = -1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 2, \\ 3 = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2, \\ x = 2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 2, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x = -1; \end{array}\right.$$

система не имеет решений

$$\left[\begin{array}{l} -1 \leq x < 2, \\ 3 = 3; \end{array}\right.$$ верно для любого х

решением системы является весь промежуток $-1 \leq x < 2$

$$\boxed{-1 \leq x \leq 2,}$$

***Ответ:*** $[-1; 2]$

# Пример 2.

**Решить уравнение $|x| + 3|x + 2| = 2|x + 1|$.**

**Решение.** 1) $|x| = 0,\ x_1 = 0;\quad |x + 2| = 0,\ x + 2 = 0,\ x_2 = -2;$
$|x + 1| = 0,\quad x + 1 = 0,\quad x_3 = -1.$

2)

|  | $x < -2$ | $-2 \le x < -1$ | $-1 \le x < 0$ | $x \ge 0$ |
|---|---|---|---|---|
|  | $-2$ | $-1$ | $0$ | $x$ |
| $x$ | – | – | – | + |
| $x + 2$ | – | + | + | + |
| $x + 1$ | – | – | + | + |

3)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ -x - 3(x + 2) = -2(x + 1); \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < -1, \\ -x + 3(x + 2) = -2(x + 1); \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x + 3(x + 2) = 2(x + 1); \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x + 3(x + 2) = 2(x + 1); \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ -x - 3x - 6 = -2x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < -1, \\ -x + 3x + 6 = -2x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x + 3x + 6 = 2x + 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x + 3x + 6 = 2x + 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ -2x = 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 \le x < -1, \\ 4x = -8; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0, \\ 6 = 2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ 2x = -4; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x = -2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 \le x < -1, \\ x = -2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x = -2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

**Системы**

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0, \\ 6 = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x = -2 \end{array}\right.$$

**не имеют решений**

$$\boxed{x = -2}$$

***<u>Ответ:</u>*** **- 2**

СГАУ лицей-интернат естественных наук

ЛИЕН

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

# Лекция по алгебре. Тема: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля (3часть)

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

# ***Алгоритмы решения уравнений*** $|f(x)| = f(x)$ , $|f(x)| = -f(x)$ *и* $|f(x)| = -|\phi(x)|$ .

1) $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

2) $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

3) $|f(x)| = -|\phi(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ \phi(x) = 0 \end{cases}$

## 1 Найти меньший целый корень уравнения.

$|\, 3x - 5 \,| = 3x - 5\,,$

$3x - 5 \geq 0\,,$

$x \geq 5/3.$

Ответ: 2.

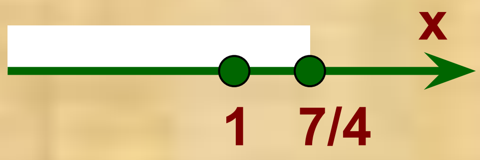
## 2 Найти больший целый корень уравнения.

$|\, 4x - 7 \,| = 7 - 4x\,,$

$|\, 4x - 7 \,| = -\,(4x - 7),$

$4x - 7 \leq 0\,,$

$x \leq 7/4.$



Ответ: 1.

## 2 Решите уравнение.

$|x^2 - 4| = -\,|x^2 - x - 2|\,,$

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\,2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\,1; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad x = 2.$$

Ответ: 2.

# Решение уравнений, в которых под знаком модуля находится выражение, содержащее модуль.

**Сначала следует освободиться от внутреннего модуля, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.**

**Пример.** **Решить уравнение $| x - | 4 - x | | - 2x = 4$.**

**Решение.**

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}4 - x \geq 0, \\ | x - (4 - x) | - 2x = 4;\end{cases} \\ \\ \begin{cases}4 - x < 0, \\ | x + (4 - x) | - 2x = 4;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 4, \\ | 2x - 4| - 2x = 4;\end{cases} \\ \\ \begin{cases}x > 0, \\ | 4 | - 2x = 4;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \le 4, \\ |2x-4| = 2x+4; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ -2x = 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \le 4, \\ x = 0; \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ -2x = 0; \end{cases} \qquad \boxed{x = 0.}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

Система не имеет решений

Ответ: 0.

---

Решим уравнение

$|2x-4| = 2x+4.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2x-4 \ge 0, \\ 2x-4 = 2x+4; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-4 < 0, \\ -(2x-4) = 2x+4; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 2, \\ -4 = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ -4x = 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Решений нет

$$\boxed{x = 0}$$

## Решение уравнений вида $a \cdot f^{2}(x) + b \cdot |f(x)| + c = 0$.

Так как $f^{2}(x) = |f(x)|^{2}$, уравнение запишется в виде

$$a \cdot |f(x)|^{2} + b \cdot |f(x)| + c = 0 .$$

Пусть $f^{2}(x) = |f(x)|^{2}$, тогда получим квадратное уравнение $a \cdot |f(x)|^{2} + b \cdot |f(x)| + c = 0$, которое решается заменой

$$t = |f(x)|, \quad t \geq 0.$$

**Пример.** Решить уравнение $x^{2} – |x| – 2 = 0.$

**Решение.** $|x|^{2} – |x| – 2 = 0, \quad t^{2} – t – 2 = 0 \ \ ( t = |x| , t \geq 0 ),$

$$\left[\begin{array}{l} t_{1} = -1 , \\ t_{2} = \ \ 2 . \end{array}\right.$$

Значит, $t = 2$, $|x| = 2$, $x = \pm 2$.

Ответ: ± 2.

# Домашнее задание.

1. Разобрать лекционный материал и выучить алгоритмы решений уравнений.

2. Галицкий М.Л. № 5.54(а,в), 5. 56(б,в), 5.59(а,в)

3. Решить уравнения:

$$1)\ |x-2| = 2|x-3|; \quad 2)\ |x+1| = -2x;$$

$$3)\ |2x-4| = |x+3|; \quad 4)\ |x-1| = 3x;$$

$$4)\ |5x-13| - |6-5x| = 5; \quad 5)\ |3x-8| - |3x-2| = 6;$$

$$6)\ |x-2| + |3x-4| - |2x+4| = 0; \quad 7)\ |x-1| + |2x+4| = |3x+1|;$$

$$8)\ |x^2+10x+16| = 2x+4; \quad 9)\ |x^2-3x-3| = |x^2+7x-13|$$