СГАУ лицей-интернат естественных наук

ЛИЕН

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ естественных наук

при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре.
Тема: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля.

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Домашнее задание:

1)Найдите сумму корней уравнения $|(x-2)^3-140|=76$.

2)Укажите наибольшее решение уравнения $||1-2x|-1|=0$.

3)Укажите наименьший корень уравнения $||x-6|-6|=6$.

4)Сколько решений может иметь уравнение $|x-12|=a^2-5a+6$ в зависимости от a ?

5) Никольский.п.2.3(конспект- три вида ур.), №2.28(в,г), 2.29(а,б) ,2.30(а,г),2.31(а,г)

Цель части 1

- Систематизировать знания по теме «Уравнения»: повторить рациональные уравнения, их виды, способы решения.
- Проверить: навыки решения квадратных уравнений.

Равносильность уравнений.

Основные определения.

1. Два уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ и $f_2(x) = g_2(x)$ называются *равносильными,* если они имеют одни и те же корни, или оба не имеют корней.

2. Уравнение $f_2(x) = g_2(x)$ называется *следствием* уравнения $f_1(x) = g_1(x)$, если каждый корень уравнения $f_1(x) = g_1(x)$ является одновременно и корнем уравнения $f_2(x) = g_2(x)$.

3. *Областью определения* уравнения $f(x) = g(x)$ или *областью допустимых значений* (ОДЗ) переменной называют множество тех значений переменной x, при которых одновременно имеют смысл выражения $f(x)$ и $g(x)$.

Теоремы о равносильности уравнений.

Теорема 1. **Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному .**

Теорема 2. **Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному .**

Теорема 3. **Если обе части уравнения неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень получится уравнение, равносильное данному .**

Теорема 4. **Если обе части уравнения умножить на одно и то же выражение, которое:**

а) имеет смысл всюду в ОДЗ уравнения,

б) нигде в ОДЗ не обращается в нуль,

то получится уравнение, равносильное данному .

Следствие из теоремы 4. **Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному .**

Рациональные уравнения.

Основные определения.

1. Уравнение, левая и правая части которого есть рациональные выражения относительно Х ,называют **рациональными уравнениями** с неизвестным х .

Пример:

$$3x^5 - 8x^3 + 2x - 7 = 0;$$

$$\left(3x^5 + 2\right)\left(x^2 - 5x - 6\right) = 0;$$

$$\frac{x^4 - 1}{x^5 + 1} = 7 + x$$

$$\frac{2x^4 - 1}{x^5 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

2. **Корнем** (решением) уравнения с неизвестным х называют **число**, при подстановке которого в уравнение вместо х получается верное числовое равенство.

3. **Решить** уравнение – значит найти все его корни или доказать, что их нет.

1. Уравнение вида A(x)B(x)=0,
где A(x), B(x) – многочлены относительно x ,
называются распадающимся уравнением.

$$A(x)\cdot B(x)=0\ \ равносильно\ \ \left[\begin{array}{l} A(x)=0, \\ B(x)=0 \end{array}\right.$$

2. Уравнение вида A(x) / B(x)=0,
где A(x), B(x) – многочлены относительно x .

$$\frac{A(x)}{B(x)}=0\ \ равносильно\ \ \begin{cases} A(x)=0, \\ B(x)\neq 0 \end{cases}$$

$$3.\ Уравнение\ \ вида\ \frac{A(x)}{B(x)}=\frac{C(x)}{D(x)},$$

где A(x), B(x), C(x),D(x) – многочлены относительно x .

$$\frac{A(x)}{B(x)}-\frac{C(x)}{D(x)}=0,\ \frac{A(x)\cdot D(x)-C(x)\cdot B(x)}{B(x)\cdot D(x)}=0$$

1. Решите уравнение$(x^2-5x+6)(x^2+x-2)$.

Ответ: -2; 1; 2; 3

2. Решите уравнение

$$\frac{x^2+4x-21}{x^2-x-3}=0.$$

Решение:

а)Сначала решим уравнение $x^2+4x-21=0$,

$x_1= -7;\ x_2=3$

б)Подставим эти числа в знаменатель,

$x_1= -7;\ x_1^2- x_1- 3 = 49 + 7- 3 \neq 0$

$x_2 = 3;\ x_2^2- x_2- 3 = 9 - 3 - 3 \neq 0$

Это значит ,что числа – 7; 3 являются корнями данного уравнения и других корней нет.

Ответ: -7; 3

3. Решите уравнение $\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}=2x+3.$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}-\frac{2x+3}{1}=0,$$

$$\frac{x^2-5x+6}{x-3}-\frac{(2x+3)\cdot(x-3)}{x-3}=0,$$

$$\frac{x^2-5x+6-(2x+3)\cdot(x-3)}{x-3}=0, \frac{-x^2-2x+15}{x-3}=0$$

а) решим уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$; $x_1 = -5$; $x_2 = 3$

б)Подставим эти числа в знаменатель,

$x_1 = -5$; $x_1 - 3 = -5 - 3 \neq 0$

$x_2 = 3$; $x_2 - 3 = 3 – 3 - 3 = 0$

Это значит ,что только числа – 5 является корнем данного уравнения .

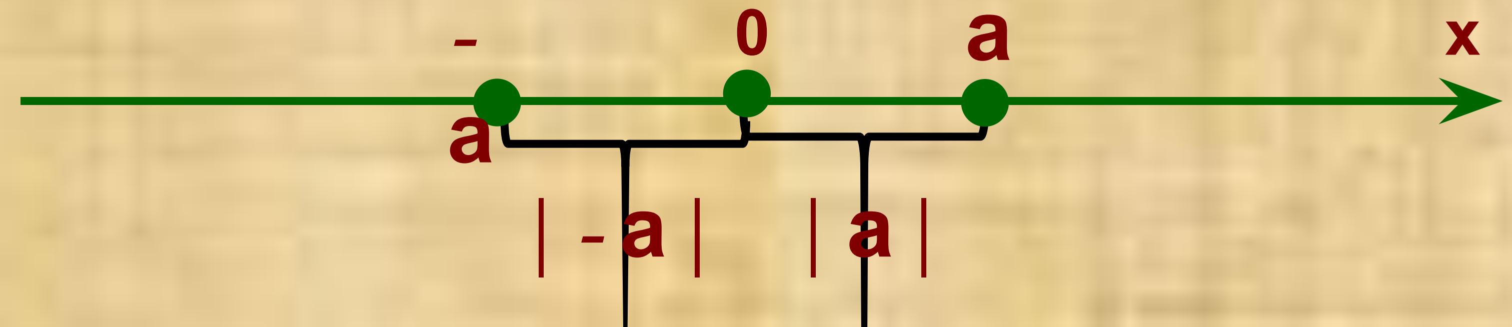
Ответ: -5.

Алгоритмы решения уравнений,содержащих переменную под знаком модуля.

Определение **Модулем (абсолютной величиной) действительного числа a называют неотрицательное действительное число, определяемое равенством**

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \geq 0, \\ -a, \text{ если } a < 0. \end{cases}}$$

Модуль – это расстояние от точки, изображающей данное число a на координатной прямой, до начала отсчёта.



Основные свойства модуля.

1	$\lvert a \rvert \geq 0$	6	$\lvert a - b \rvert = \lvert b - a \rvert$
2	$\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	7	$\lvert a \cdot b \rvert = \lvert a \rvert \cdot \lvert b \rvert$
3	$\lvert a \rvert^{2n} = a^{2n}$, $n \in N$	8	$\lvert a : b \rvert = \lvert a \rvert : \lvert b \rvert$, $b \neq 0$
4	$\lvert a \rvert = 0$, если $a = 0$	9	$\lvert a + b \rvert \leq \lvert a \rvert + \lvert b \rvert$
5	$\lvert a \rvert \geq a$	10	$\lvert a - b \rvert \geq \lvert a \rvert - \lvert b \rvert$

Раскройте модуль:.

а) $\left| 3 - \pi \right| = \pi - 3$

$б) \left| \sqrt{3} - \sqrt{5} \right| = \sqrt{5} - \sqrt{3}$

$в) \left| 2 - \sqrt{3} \right| = \left| \sqrt{4} - \sqrt{3} \right| = \sqrt{4} - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3}$

$г) \left| x^4 + 1 \right| = x^4 + 1$

__Алгоритм решения уравнения__ $|f(x)| = a$, $a \in R$.

1) Если $a < 0$, то уравнение корней не имеет.

2) Если $a = 0$, то уравнение примет вид :

$|f(x)| = 0$, т. е. $f(x) = 0$.

3) Если $a > 0$, то

$$|f(x)| = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array} \right.$$

Решить уравнения.

1	2	3
$\lvert 2x - 3 \rvert + 11 = 0,$ $\lvert 2x - 3 \rvert = -11,$ так как $\lvert 2x - 3 \rvert \geq 0$ для любых x, а $-11 < 0$, то уравнение **не имеет корней.** Ответ: корней нет.	$\lvert x^2 - 4 \rvert = 0,$ $x^2 - 4 = 0,$ $(x - 2)(x + 2) = 0,$ $x_1 = -2,\ x_2 = 2.$ Ответ: ± 2	$\lvert x^2 - 5x + 4 \rvert = 4,$ $\lvert x^2 - 5x + 4 \rvert = 4,$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x + 4 = 4, \\ x^2 - 5x + 4 = -4, \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x^2 - 5x = 0, \\ x^2 - 5x + 8 = 0, D < 0 \end{array}\right.$ $x(x - 5) = 0,\ x_1 = 0,\ x_2 = 5.$ Ответ:0;5.

СГАУ лицей-интернат естественных наук

ЛИЕН

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ естественных наук

при Саратовском государственном аграрном университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре.

Тема: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля (2 часть)

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Проверка домашней работы

1) $|(x-2)^3 - 140| = 76$.

Решение: $\left|(x-2)^3 - 140\right| = 76,$

$$\left[\begin{array}{l}(x-2)^3 - 140 = 76,\\ (x-2)^3 - 140 = -76,\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}(x-2)^3 = 76+140,\\ (x-2)^3 = -76+140\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}(x-2)^3 = 216,\\ (x-2)^3 = 64\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x-2=6,\\ x-2=4\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=8,\\ x=6.\end{array}\right.$$

Ответ: 6; 8.

2) Решите $||1-2x|-1|=0$.

Решение: $||1-2x|-1|=0$ равносильно $|1-2x|-1 = 0$,

$$\left[\begin{array}{l}1-2x=1,\\ 1-2x=-1,\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}2x=0,\\ 2x=2,\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=1.\end{array}\right.$$

Ответ: 0; 1.

3) Решите $||x-6|-6|=6$.

Решение:

$$\left[\begin{array}{l} |x-6|-6=6, \\ |x-6|-6=-6, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} |x-6|=12, \\ |x-6|=0, \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x-6=12, \\ x-6=-12, \\ x-6=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=18, \\ x=-6, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Ответ: -6; 6; 18.

4)Сколько решений может иметь уравнение $|x-12|=a^2-5a+6$ в зависимости от a ?

Решение: Оценим a^2-5a+6 (сравним с нулем)

1) Если $a^2-5a+6=0$, т.е. $a_1=2$, $a_2=3$

Тогда $|x-12|= a^2-5a+6$ равносильно $|x-12|=0$, $x = 12$

2) Если $a^2-5a+6< 0$, то уравнение не имеет решения.

То есть $a \in (2;3)$ то уравнение не имеет решения.

3)Если $a^2-5a+6>0$, то $(a-2)(a-3)>0$ на $(-\infty;2)\cup(3;\infty)$

Тогда $|x-12|= a^2-5a+6$ равносильно

$$\left[\begin{array}{l} x-12=a^2-5a+6, \\ x-12=-\left(a^2-5a+6\right), \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=a^2-5a+18, \\ x=-a^2+5a+6, \end{array}\right.$$

Ответ: 1.если $a_1=2$, $a_2=3$, то $x = 12$

$2.\ если\ a \in (2;3), то\ уравнение\ не\ имеет\ решения$

$3.\ если\ a \in (-\infty;2)\cup(3;\infty), то\ x=a^2-5a+18,\ x=-a^2+5a+6$

Алгоритм решения уравнения $|f(x)| = |\phi(x)|$

1 способ

$|f(x)| = |\phi(x)|$,

$|f(x)|^2 = |\phi(x)|^2$,

$|f(x)|^2 - |\phi(x)|^2 = 0$,

$(f(x) - \phi(x))(f(x) - \phi(x)) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} f(x) - \phi(x) = 0, \\ f(x) + \phi(x) = 0. \end{array}\right.$$

2 способ

$|f(x)| = |\phi(x)|$,

$$\left[\begin{array}{l} f(x) = \phi(x), \\ f(x) = -\phi(x). \end{array}\right.$$

Пример. Решить уравнение: $2|x + 1| = |3 - x|$

1 способ

$2|x + 1| = |3 - x|$, $(2|x + 1|)^2 = |3 - x|^2$,

$(2|x + 1|)^2 - |3 - x|^2 = 0$,

$(2(x+1) - (3-x))(2(x+1) + (3-x)) = 0$,

$$\left[\begin{array}{l} 2x+2-3+x=0, \\ 2x+2+3-x=0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 3x=1, \\ x=-5; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1/3, \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1/3$,
$x_2 = -5$.

2 способ

$2|x + 1| = |3 - x|$,

$$\left[\begin{array}{l} 2(x+1)=3-x, \\ 2(x+1)=-(3-x); \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x+2=3-x, \\ 2x+2=-3+x; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=1/3, \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Ответ: $x_1 = 1/3$,
$x_2 = -5$.

Алгоритм решения уравнения $|f(x)| = \phi(x)$.

1 способ. Воспользуемся определением модуля.

Уравнение $|f(x)| = \phi(x)$ равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = \phi(x); \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ f(x) = -\phi(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

2 способ

Уравнение $|f(x)| = \phi(x)$ равносильно системе

$$\begin{cases} \phi(x) \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = \phi(x), \\ f(x) = -\phi(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

Пример 1.

Решить уравнение | 2 – x | = 1 – 2x.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}2 - x \geq 0,\\ 2 - x = 1 - 2x;\end{cases}\\ \begin{cases}2 - x < 0,\\ 2 - x = -1 + 2x;\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 2,\\ x = -1;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 2,\\ 3x = 3;\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \leq 2,\\ x = -1;\end{cases}\\ \begin{cases}x > 2,\\ x = 1;\end{cases}\end{array}\right. \qquad x = -1$$

Ответ: – 1 .

Пример 2.

Решить уравнение $|x^2 + 3x - 4| = 3x$.

Решение.

$$\begin{cases} 3x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 3x - 4 = 3x, \\ x^2 + 3x - 4 = -3x; \end{array} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 + 6x - 4 = 0; \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 2, \\ x = -3 - \sqrt{13}, \\ x = -3 + \sqrt{13}; \end{array} \right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -3 + \sqrt{13}. \end{array} \right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -3 + \sqrt{13}. \end{array} \right.$

Цель урока:

формирование знаний
и умений
решения уравнений вида

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + .. + |f_n(x)| = \varphi(x)$$

План урока:

- Проверка домашнего задания.
- Объяснение нового материала.
- Закрепление нового материала.
- Закрепление навыков решения уравнений (самостоятельная обучающая работа).
- Контроль за усвоением материала (самостоятельная работа по вариантам).
- Подведение итогов урока. Обсуждение домашнего задания.

«Цветик-семицветик»

Повторим теорию

Сформулируйте определение модуля действительного числа.

Раскройте модуль, пользуясь определением: а) |π -3,2|,

б) $\left| 5 - \sqrt{5} \right|$, в) $\left| \sqrt{10} - 2\sqrt{3} \right|$.

Раскройте модуль выражений:

а) 2 · |4 - x|,

б) |y + 3| - y, в) $|x^6 + 7|$.

Сколько решений имеет уравнение
$|x| = a$ в зависимости от a?.

Приведите примеры уравнений вида $|7-4x| = c$,
чтобы оно имело: а) одно решение; б) два решения;
в) не имело решений

Сформулируйте алгоритм решения уравнений вида $|f(x)| = g(x)$.

Сформулируйте алгоритм решения уравнений вида $|f(x)| = |g(x)|$

.

Алгоритм решения уравнения

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + |f_3(x)| + \ldots + |f_n(x)| = \phi(x)$$

.

Освободим левую часть уравнения от знака модуля. Для этого нужно:

1) найти значения переменной x, при которых каждый из модулей равен нулю;

2) отметить эти значения на числовой прямой и выделить интервалы, определить с каким знаком раскрывается каждый из модулей на каждом из интервалов, воспользовавшись определением модуля;

3) составить и решить совокупность смешанных систем.

Пример 1.

Решить уравнение $| x - 2 | + | x + 1 | = 3$.

Решение. 1) $| x - 2 | = 0, \quad x - 2 = 0, \quad x_1 = 2.$

$| x + 1 | = 0, \quad x + 1 = 0, \quad x_2 = -1.$

2)

	$x < -1$	$-1 \le x < 2$	$x \ge 2$
	-1	2	x
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$

3)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ -(x-2)-(x+1)=3; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 2, \\ -(x-2)+(x+1)=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ (x-2)+(x+1)=3; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ -x+2-x-1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 2, \\ -x+2+x+1=3; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ x-2+x+1=3; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -2x = 2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 2, \\ 3 = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ 2x = 4; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

верно для любого x

$$\left[\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x = -1; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 2, \\ 3 = 3; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x = 2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x < 2, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < -1, \\ x = -1; \end{array}\right.$$

система не имеет решений

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x < 2, \\ 3 = 3; \end{array}\right.$$ верно для любого x

решением системы является весь промежуток $-1 \le x < 2$

$$\boxed{-1 \le x \le 2,}$$

Ответ: [- 1; 2]

Пример 2.

Решить уравнение $|x| + 3|x + 2| = 2|x + 1|$.

Решение. 1) $|x| = 0$, $x_1 = 0$; $|x + 2| = 0$, $x + 2 = 0$, $x_2 = -2$;
$|x + 1| = 0$, $x + 1 = 0$, $x_3 = -1$.

2)

	$x < -2$	$-2 \le x < -1$	$-1 \le x < 0$	$x \ge 0$
	-2	-1	0	
x	–	–	–	+
$x + 2$	–	+	+	+
$x + 1$	–	–	+	+

3)

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ -x - 3(x+2) = -2(x+1); \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < -1, \\ -x + 3(x+2) = -2(x+1); \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x + 3(x+2) = 2(x+1); \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x + 3(x+2) = 2(x+1); \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -2, \\ -x - 3x - 6 = -2x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} -2 \le x < -1, \\ -x + 3x + 6 = -2x - 2; \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x < 0, \\ -x + 3x + 6 = 2x + 2; \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 0, \\ x + 3x + 6 = 2x + 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ -2x = 4; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 \le x < -1, \\ 4x = -8; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0, \\ 6 = 2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ 2x = -4; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x = -2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} -2 \le x < -1, \\ x = -2; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x = -2; \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\boxed{x = -2}$$

Системы

$$\left[\begin{array}{l} -1 \le x < 0, \\ 6 = 2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x < -2, \\ x = -2 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \ge 0, \\ x = -2 \end{array}\right.$$

не имеют решений

<u>Ответ:</u> - 2

ЛИЦЕЙ-ИНТЕРНАТ
естественных наук
при Саратовском государственном аграрном
университете им. Н.И. Вавилова

Лекция по алгебре.
Тема: уравнения, содержащие переменную под знаком модуля (3 часть)

Преподаватели математики Хохлова С.Н., Мещенко Н.В.

Алгоритмы решения уравнений $|f(x)| = f(x)$,

$|f(x)| = -f(x)$ *и* $|f(x)| = -|\varphi(x)|$.

1) $|f(x)| = f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$

2) $|f(x)| = -f(x) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$

3) $|f(x)| = -|\varphi(x)| \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ \varphi(x) = 0 \end{cases}$

1 Найти меньший целый корень уравнения.

$|3x - 5| = 3x - 5$,

$3x - 5 \geq 0$,

$x \geq 5/3$.

Ответ: 2.

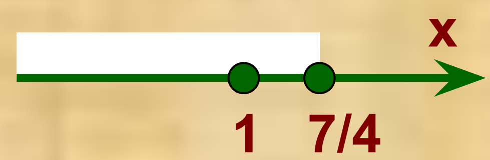
2 Найти больший целый корень уравнения.

$|4x - 7| = 7 - 4x$,

$|4x - 7| = -(4x - 7)$,

$4x - 7 \leq 0$,

$x \leq 7/4$.



Ответ: 1.

2 Решите уравнение.

$|x^2 - 4| = -|x^2 - x - 2|$,

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0, \\ x^2 - x - 2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -2; \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -1; \end{array} \right. \end{cases}$$

$x = 2$.

Ответ: 2.

Решение уравнений, в которых под знаком модуля находится выражение, содержащее модуль.

Сначала следует освободиться от внутреннего модуля, а затем в полученных уравнениях раскрыть оставшиеся модули.

Пример. Решить уравнение $| x - | 4 - x | | - 2x = 4$.

Решение.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4 - x \geq 0, \\ | x - (4 - x) | - 2x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} 4 - x < 0, \\ | x + (4 - x) | - 2x = 4; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leq 4, \\ | 2x - 4 | - 2x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ | 4 | - 2x = 4; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \le 4, \\ |2x - 4| = 2x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0, \\ -2x = 0; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x \le 4, \\ x = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ -2x = 0; \end{cases}$$

$\boxed{x = 0.}$

$$\begin{cases} x > 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

Система не имеет решений

Ответ: 0.

Решим уравнение

$|2x - 4| = 2x + 4.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} 2x - 4 \ge 0, \\ 2x - 4 = 2x + 4; \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - 4 < 0, \\ -(2x - 4) = 2x + 4; \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 2, \\ -4 = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ -4x = 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

Решений нет

$\boxed{x = 0}$

Решение уравнений вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot |f(x)| + c = 0$.

Так как $f^2(x) = |f(x)|^2$, уравнение запишется в виде

$$a \cdot |f(x)|^2 + b \cdot |f(x)| + c = 0 .$$

Пусть $f^2(x) = |f(x)|^2$, тогда получим квадратное уравнение

$a \cdot |f(x)|^2 + b \cdot |f(x)| + c = 0$, которое решается заменой

$$t = |f(x)| , \quad t \geq 0.$$

Пример. Решить уравнение $x^2 – |x| – 2 = 0.$

Решение. $|x|^2 – |x| – 2 = 0, \quad t^2 – t – 2 = 0 \quad (t = |x| ,t \geq 0)$,

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -1 , \\ t_2 = 2 . \end{array}\right.$$

Значит, $t = 2, |x| = 2, x = \pm 2.$

Ответ: ± 2.

Домашнее задание.

1. Разобрать лекционный материал и выучить алгоритмы решений уравнений.

2. Галицкий М.Л. № 5.54(а,в), 5. 56(б,в), 5.59(а,в)

3. Решить уравнения:

$$1)\ |x-2| = 2|x-3|; \quad 2)\ |x+1| = -2x;$$

$$3)\ |2x-4| = |x+3|; \quad 4)\ |x-1| = 3x;$$

$$4)\ |5x-13| - |6-5x| = 5; \quad 5)\ |3x-8| - |3x-2| = 6;$$

$$6)\ |x-2| + |3x-4| - |2x+4| = 0; \quad 7)\ |x-1| + |2x+4| = |3x+1|;$$

$$8)\ |x^2+10x+16| = 2x+4; \quad 9)\ |x^2-3x-3| = |x^2+7x-13|$$