

Системы двух уравнений с двумя переменными


Уравнение с двумя переменными – уравнение, которое можно привести к виду $f(x;y)=0$

График уравнения с двумя переменными – множество всех точек координатной плоскости, абсциссы ординаты которых являются решениями этого уравнения

Система двух уравнений с двумя переменными –

Система, которую можно записать в виде
$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Решением систем двух уравнений с двумя переменными называется пара значений x_0, y_0 , подстановка которых соответственно вместо x и y обращает оба уравнения системы в верное равенство.

- 
- **Решить систему уравнений** – значит найти её решения или доказать, что решений нет
 - **Равносильные системы** – это системы, у которых множества решений совпадают

Способы решения систем уравнений

Способ подстановки:

1. Выражают одну переменную через другую в одном из уравнений
2. Это выражение подставляют в другое уравнение системы, и в результате получают уравнение с одной переменной
3. В результате с одной переменной находят корень.
4. Подставив найденный корень, получают значение другой переменной
5. Записывают ответ

Способы решения систем уравнений

● Способ сложения:

1. Почленно складывают уравнения системы, предварительно умножив их на некоторые множители так ,чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными членами
2. Находят корень полученного уравнения с одной переменной
3. Подставляют найденное значение в любое уравнение системы и находят соответствующее значение другой переменной
4. Записывают ответ

Способы решения систем уравнений

- **Графический способ:**

1. Строят график обоих уравнений.
2. Находят координаты точек пересечения этих графиков, которые и являются решением системы.
3. Записывают ответ

Пример

- Найдите значения выражения $x \cdot y$, если $(x; y)$ -решение системы

$$\begin{cases} 5 \log_4 x + 4 \log_3 y = 13 \\ 3 \log_{\frac{1}{4}} x + 4 \log_{\frac{1}{3}} y = -11 \end{cases}$$

Решение.

Так как $\log_{\frac{1}{4}} x = \log_{4^{-1}} x = -\log_4 x$, $\log_{\frac{1}{3}} y = -\log_3 y$, то данную систему можно записать в виде .

$$\begin{cases} 5 \log_4 x + 4 \log_3 y = 13 & (1) \\ -3 \log_{\frac{1}{4}} x + 4 \log_{\frac{1}{3}} y = -11 & (2) \end{cases}$$

Пример

- Сложив сложения (1) и (2), получаем:

$2\log_4 x = 2$, $\log_4 x = 1$, $x = 4$. Подставляя $\log_4 x = 1$ в уравнение (1), находим: $5 + 4\log_3 y = 13$, $\log_3 y = 2$, $y = 9$
Значит , $x \cdot y = 4 \cdot 9 = 36$

Ответ: 36

Пример

- Найдите решение $(x ; y)$ система уравнений

$$\begin{cases} 5^x + 2y = 1 \\ \lg(x - 3) = \lg(2y + 5) \end{cases}$$

- И вычислить значение разности $x - y$

- Решение
$$\begin{cases} 5^x + 2y = 1 \\ \lg(x - 3) = \lg(2y + 5) \end{cases}$$

- первое уравнение системы равносильно уравнению $x + 2y = 0$, второе – уравнению $x - 3 = 2y + 5$, причем $x - 3 > 0$ и $2y + 5 > 0$.

Пример

- Получили систему:
$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - 3 = 2y + 5 \\ x - 3 > 0 \\ 2y + 5 > 0 \end{cases}$$
- Подставляя $x = -2y$ из первого уравнения во второе, получаем $4y = -8$, то есть $y = -2$. Число -2 удовлетворяет условию $2y + 5 > 0$. Подставив $y = -2$ в уравнение $x = -2y$, получим $x = 4$. Число 4 удовлетворяет условию $x - 3 > 0$. следовательно, пара $(4; -2)$ – решение исходной системы уравнений. Тогда $4 - (-2) = 6$

Ответ: 6

Пример

- Решите систему уравнение:

$$\begin{cases} 2\frac{x+y}{3} + 2\frac{x+y}{6} = 6 \\ x^2 + 5y^2 = 6xy \end{cases}$$

- Запишем первое уравнение системы в виде

- $\left(2\frac{x+y}{6}\right)^2 + 2\frac{x+y}{6} - 6 = 0$

- Пусть $2\frac{x+y}{6} = t, t > 0$. Тогда уравнение примет

- вид $t^2 + t - 6 = 0$. Корни этого уравнения

- $t_1 = 2; t_2 = -3$ (t_2 не удовлетворяет условию $t > 0$). Тогда $2\frac{x+y}{6} = 2$, откуда $2\frac{x+y}{6} = 1$ или $x + y = 6$

Пример

- Запишем второе уравнение системы в виде $x^2 - 6xy + 5y^2 = 0$. Решая его как квадратное относительно x , получим $x_1 = y; x_2 = 5y$. Следовательно исходная система равносильна совокупности

двух систем:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 6 \\ x = y \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 6 \\ x = 5y \end{cases} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: (3;3);(5;1)