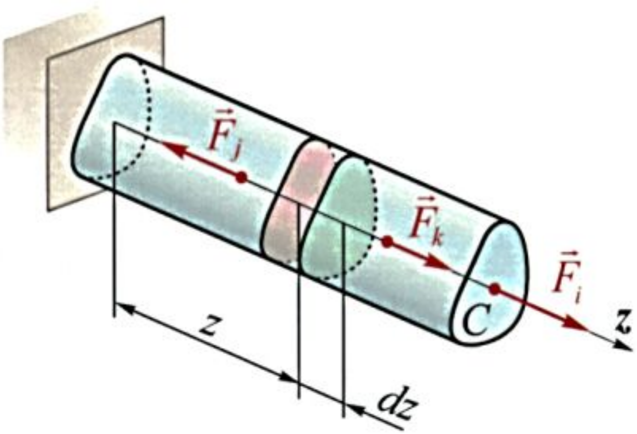
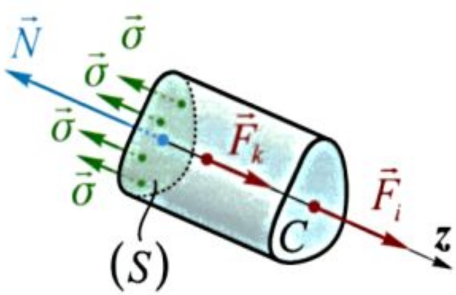
Растяжение и сжатие





Растяжение и **сжатие** вызываются нагрузками, при которых поперечные сечения бруса перемещаются параллельно самим себе вдоль прямой, проходящей через центры тяжести этих сечений (оси бруса).

Продольные деформации волокон одинаковы; одинаковы и напряжения в них, образующие в поперечном сечении бруса систему нормальных напряжений одинаковых по величине.

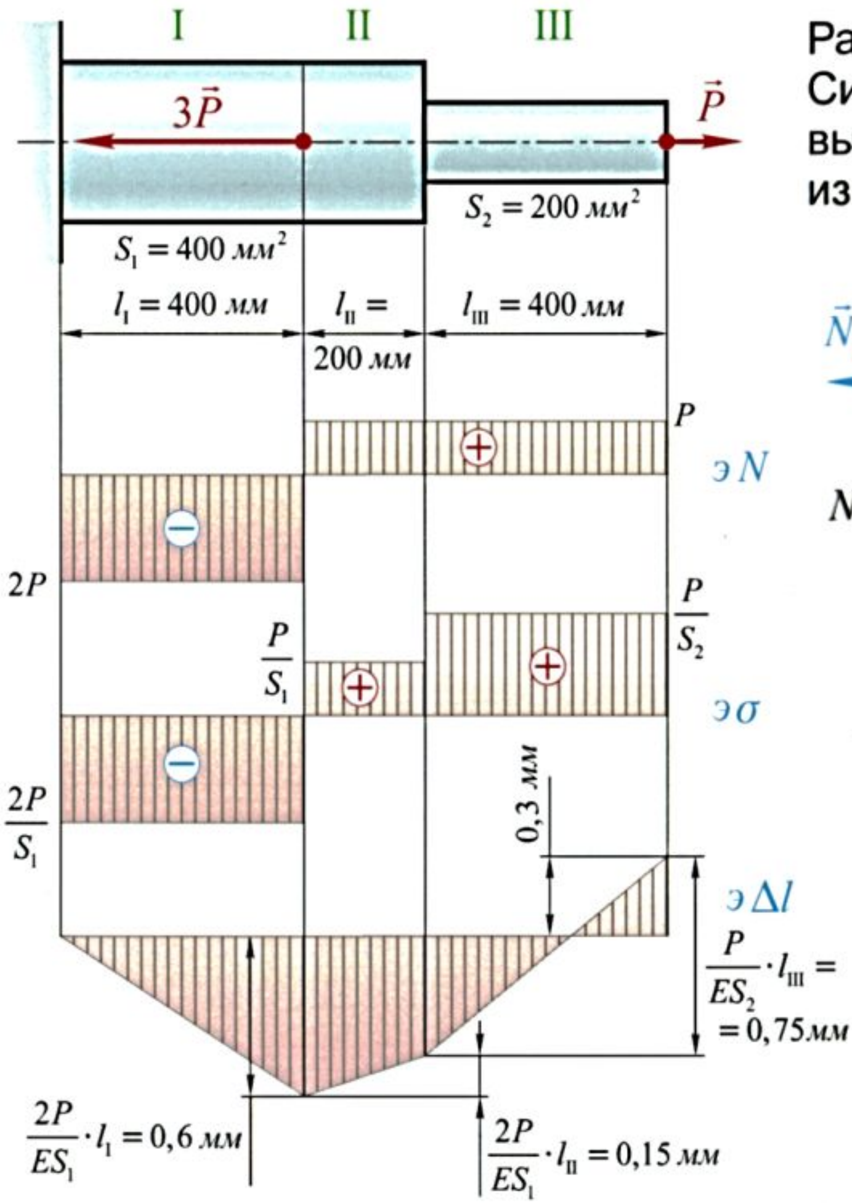
Уравнения равновесия отсеченной части сводятся к одному:

$N = \sum F_{iz}$, N — нормальная сила в поперечном сечении бруса.

$\sigma = \dfrac{N}{S}$, S — площадь поперечного сечения.

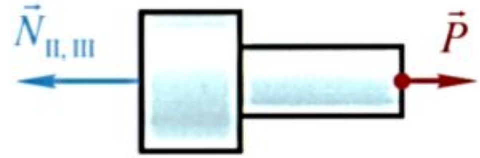
Растяжение-сжатие моделируется системой сил $\left\{\vec{F}_i\right\}_n$, приложенных в центрах тяжести поперечных сечений бруса, образующих его продольную ось z.

Пример. Растяжение-сжатие



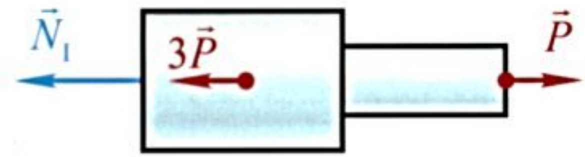
Рассматриваем равновесие отсеченных частей. Силу N полагаем положительной — растягивающей выделенный объем. Реальные значения определятся из уравнений равновесия:

для участков II, III



$N_{II,\,III} = P$ брус на участках II, III растягивается

для участка I



$N_I = P - 3P = -2P$ брус на участке I сжимается

$$\sigma_i = \frac{N_i}{S_i} \Rightarrow \sigma_{III} = \frac{P}{S_2};\quad \sigma_{II} = \frac{P}{S_2};\quad \sigma_I = -\frac{2P}{S_2}.$$

При $P = 60\,кН = 6\cdot 10^4\ Н:\ \sigma_{III} = -300\ \frac{Н}{мм^2} = -300\ МПа$

$\sigma_{II} = 150\ МПа;\ \sigma_I = 300\ МПа$

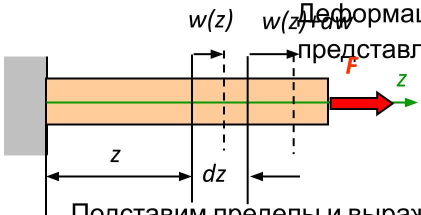
Перемещения крайних сечений участков друг относительно друга:

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta l_i}{l_i} = \frac{\sigma_i}{E} \Rightarrow \Delta l_i = \frac{\sigma_i}{E}\cdot l_i;\quad E = 2\cdot 10^5\ МПа.$$ (сталь)

$\Delta l_I = -0{,}6\ мм$ $\quad \Delta l_{II} = 0{,}15\ мм$ $\quad \Delta l_{II} = 0{,}75\ мм$ $\quad \Delta l = \sum \Delta l_i = 0{,}75 + 0{,}15 - 0{,}6 = 0{,}3\ мм.$

Лекция 5

Определение перемещений при растяжении-сжатии – Рассмотрим стержень, нагруженный растягивающей силой *F*. Выделим на расстоянии *z* участок длиной *dz*. Удлинение этого участка *Δdz* равно перемещению второй его границы относительно первой *dw*.



Деформация на этом участке определяется выражением, представляющим собой дифференциальное уравнение:

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = \frac{w(z) + dw - w(z)}{dz} = \frac{dw}{dz}.$$

Разделим переменные и сведем решение этого уравнения к интегрированию левой и правой частей:

$$dw = \varepsilon_z dz. \Rightarrow \int_{w_0}^{w} dw = \int_{z_0}^{z} \varepsilon_z dz. \Rightarrow w\Big|_{w_0}^{w} = \int_{z_0}^{z} \varepsilon_z dz.$$

Подставим пределы и выражение для деформации, следующего из закона Гука:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA}, \Rightarrow w - w_0 = \int_{z_0}^{z} \frac{N}{EA} dz. \Rightarrow w = w_0 + \int_{z_0}^{z} \frac{N}{EA} dz.$$

Здесь w_0 – перемещение левой границы рассматриваемого участка на расстоянии z_0, *EA* – жесткость стержня при растяжении-сжатии, *N* – продольное усилие.

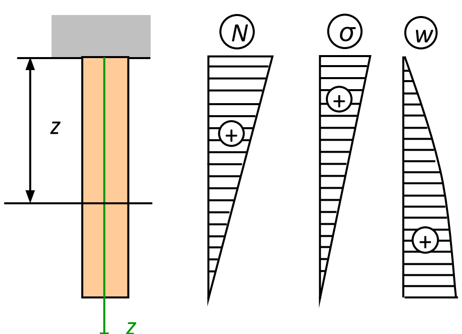
В случае постоянства продольного усилия и площади поперечного сечения имеем: $w = w_0 + \frac{N}{EA}(z - z_0).$

Отсюда, как частный случай, получается выражение для абсолютного удлинения стержня ($w_0 = 0$, $z_0 = 0$, $z = l$): $w = \Delta l = \frac{Nl}{EA}.$

Общая формула вычисления перемещен
на рассматриваемом участке [z_0 ,*z*] (второ
перемещение всего участка, как *жесткоа*
постоянны, то определение перемещения
из участков от неподвижного сечения до р

Учет собственного веса – Рассмо

Продольное усилие от собственного ве
и *линейно* зависит от координаты. Эпюр



Таким образом, учет равномерно распределенной продольной нагрузки (собственный веса) может быть выполнен непосредственным интегрированием по рассматриваемому участку или использованием выражения, подобного абсолютному удлинению стержня при постоянной продольной силе, в котором сила уменьшена вдвое! (см. результат определения перемещения конца стержня).

Например, второй результат (перемещение сечения посредине длины стержня) может быть получен, как сумма перемещений рассматриваемого сечения стержня от действия собственного веса верхней части, учитываемого как *распределенная* нагрузка, и перемещения его от веса нижней части, действующего на верхнюю часть как *внешняя* сила:

$$w = \frac{\left(\frac{G}{2}\right)\frac{l}{2}}{2EA} + \frac{\left(\frac{G}{2}\right)\frac{l}{2}}{EA} = \frac{3}{4}\cdot\frac{G}{2EA}l.$$

Определим перемещения конца стержня и сечения на расстоянии половины длины:

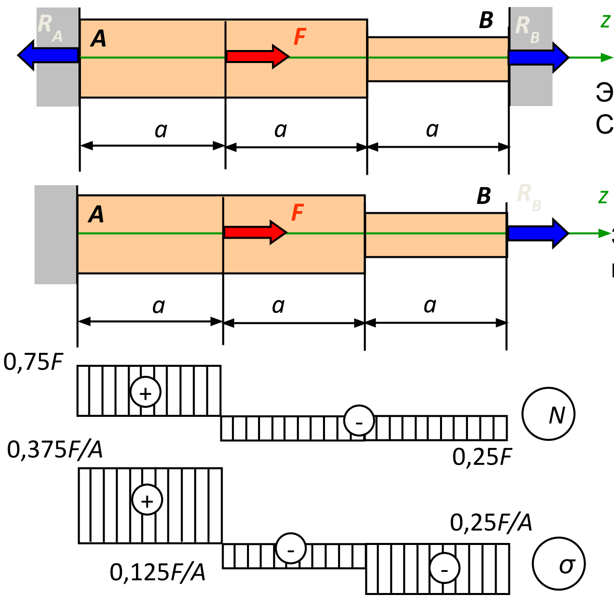
$$w = \frac{\gamma A}{2EA}(2l - z)z\Big|_{z=l} = \frac{\gamma A}{2EA}l^2 = \boxed{\frac{G}{2EA}l}, \quad w = \frac{\gamma A}{2EA}(2l - z)z\Big|_{z=\frac{l}{2}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\gamma A}{2EA}l^2 = \boxed{\frac{3}{4}\cdot\frac{G}{2EA}l.}$$

Здесь *G* – вес стержня.

Лекция 5 (продолжение – 5.2)

Статически неопределимые системы при растяжении-сжатии – В статически неопределимых системах число наложенных связей больше числа независимых уравнений равновесия. Как указывалось выше, такие задачи решаются последовательным рассмотрением *статической*, *геометрической* и *физической* сторон, в результате чего получается полная система уравнений, позволяющая найти искомые усилия. Общий порядок решения определяется вышесказанным, конкретные шаги и особенности рассмотрим на примерах:

Пример 1. Стержень переменного сечения (2*A* и *A*) жестко заделан с двух сторон и нагружен продольной силой. Построить эпюры *N* и *σ*.



1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:

2. *Статика* : Составляем уравнение равновесия: $\sum Z_i = 0;$ $\boxed{-R_A + F + R_B = 0.}$

Это единственное уравнение равновесия, которое можно составить для линейной системы сил. Следовательно система один раз статически неопределима.

3. *Геометрия*:

Составляем уравнение совместности деформаций: $\Delta l = 0;$ $\boxed{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.}$

Это уравнение устанавливает неизменность общей длины стержня при любых воздействиях, которую обеспечивали связи (жесткие заделки) до их удаления.

4. *Физика*: Записываем соотношения связи деформаций с усилиями:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A}; \qquad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A}; \qquad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA}.$$

Получили полную систему уравнений, решающую данную задачу (5 уравнений и 5 неизвестных – 2 реакции и 3 перемещения) . Подставляем соотношения упругости в уравнения совместности:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} = 0. \Rightarrow R_A + 3R_B = 0. \Rightarrow R_A = -3R_B.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия:

$$3R_B + F + R_B = 0 \Rightarrow R_B = -\frac{F}{4}; \quad R_A = \frac{3F}{4}.$$

…ки определимой … тбрасыванием

Составляем уравнение совместности деформаций:

$\Delta l = 0;$ $\boxed{\Delta l_F + \Delta l_R = 0.}$ или $\boxed{\Delta l_R = -\Delta l_F.}$

После определения опорных реакций можно построить эпюру продольных сил вычисление значений по участкам:

$N_1 = R_A = 3F/4$,

$N_2 = N_3 = R_B = F/4$.

В сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, получился скачок, равный величине этой силы.

Эпюра нормальных напряжений также строится вычислением значений напряжений по участкам:

$\sigma_1 = N_1 / A_1 = 3F/8A$,

$\sigma_2 = N_2 / A_2 = F/8A$,

$\sigma_3 = N_3 / A_3 = F/4A$.

В сечении резкого изменения площади получился скачок.

Если имелся первоначальный зазор, например между правым концом стержня и заделкой, или напротив натяг (первоначальный размер стержня превышает расстояние между опорами), то это учитывается лишь в **уравнениях совместности деформаций**:

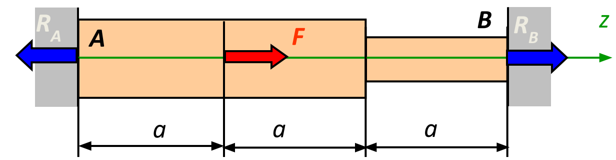
$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = \Delta. \ (\Delta>0 \text{ зазор}, \Delta<0 \text{ натяг}) \quad \text{или} \quad \Delta l_F + \Delta l_R = \Delta.$$

Если вместо силового нагружения, или дополнительно к нему, действует температурная нагрузка (**нагрев**), то это учитывается **введением температурных удлинений в уравнения совместности деформаций**.

- **Расчет статически неопределимых систем на действие температуры** – В статически неопределимых системах нагрев (охлаждение) элементов вызывает дополнительные внутренние усилия (напряжения), которые могут значительно превышать усилия от действия силового нагружения. Общий порядок решения задачи сохраняется, но уравнения совместности деформаций (удлинений) содержат удлинения от действия разности температур Δt : $\Delta l_t = \alpha l \cdot \Delta t$, α – коэффициент линейного расширения материала, l – длина стержня.
- Пример 2. Стержень переменного сечения (2A и A), рассмотренный в примере 1, дополнительно нагревается на Δt градусов.

Δt

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:



2. *Статика* : Составляем уравнение равновесия:

$$\sum Z_i = 0; \quad \boxed{-R_A + F + R_B = 0.}$$

3. *Геометрия*:

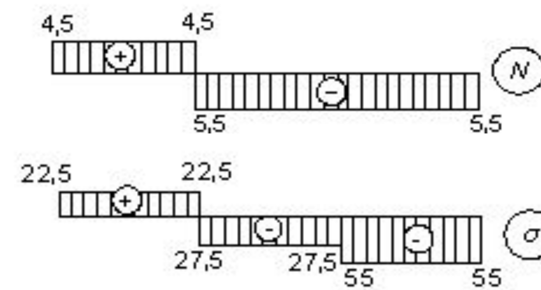
Составляем уравнение совместности деформаций:

$$\Delta l = 0; \quad \boxed{\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_t = 0.}$$

Это уравнение устанавливает неизменность общей длины стержня при любых воздействиях, в том числе от нагрева, которую обеспечивали связи (жесткие заделки) до их удаления.

4. *Физика*: Записываем соотношения связи деформаций с усилиями и температурным воздействием:

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{EA_1} = \frac{R_A a}{E2A}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{EA_2} = \frac{R_B a}{E2A}; \quad \Delta l_3 = \frac{N_3 l_2}{EA_3} = \frac{R_B a}{EA}; \quad \Delta l_t = \alpha 3a \cdot \Delta t.$$



Подставляем соотношения упругости и температурного удлинения в уравнения совместности:

$$\frac{R_A a}{E2A} + \frac{R_B a}{E2A} + \frac{R_B a}{EA} + \alpha 3a\Delta t = 0. \Rightarrow R_A + 3R_B = -6\alpha\Delta t EA. \Rightarrow R_A = -3R_B - 6\alpha\Delta t EA.$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия:

$$R_B = -\frac{F + 6\alpha\Delta t EA}{4};$$

$$3R_B + 6\alpha\Delta t EA + F + R_B = 0 \Rightarrow R_A = 3\frac{F + 6\alpha\Delta t EA}{4} - 6\alpha\Delta t EA = 3\frac{F - 2\alpha\Delta t EA}{4}.$$

Теперь, при температурном воздействии, в выражения для реакций входят абсолютные значения модуля упругости E и площади A. Вычислим величины реакций для конкретных данных: F = 10 кН, A = 1 см^2, Δt = 10^o, E = 2*10^5 МПа, α =10^{-5} (сталь):

$$R_B = -\frac{10 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4} = -5.5 \cdot 10^3 = -5.5 \text{ кН};$$

$$R_A = 3\frac{10 \cdot 10^3 - 2 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1 \cdot 10^{-4}}{4} = 4.5 \cdot 10^3 = 4.5 \text{ кН}.$$

При отсутствии нагрева реакции получаются равными -2.5 кН и 7.5 кН соответственно.

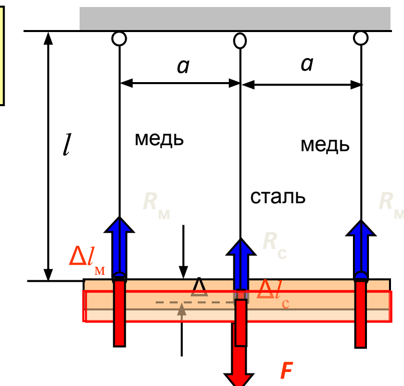
Эпюру продольных сил строим вычислением значений по участкам:
$N_1 = R_A$ = 4.5 кН, $N_2 = N_3 = R_B$ = -5.5 кН. В сечении, в котором приложена сосредоточенная сила, получился скачок, равный величине этой силы.

Эпюра нормальных напряжений также строится вычислением значений напряжений по участкам: $\sigma_1 = N_1 / A_1$= 22.5 МПа, $\sigma_2 = N_2 / A_2$= - 27.5 МПа, $\sigma_3 = N_3 / A_3$= - 55 МПа.

При отсутствии нагрева значения напряжений получаются равными 37.5 МПа, - 12.5 МПа, и -25 МПа соответственно (вид эпюры напряжений см. в примере 1).
Таким образом, нагрев всего на 10^o привел к увеличению сжимающей силы и максимальных сжимающих напряжений больше, чем в 2 раза.
Статически неопределимые системы всегда реагируют на изменение температуры изменением внутренних усилий.
Это же происходит при взаимных смещениях опор (неравномерная осадка опор).

Лекция 5 (продолжен – 5.4)

- **Расчет статически неопределимых систем на неточность сборки** – В статически неопределимых системах несоответствие длин изготовленных элементов проектным вызывает дополнительные внутренние усилия, которые могут заметно влиять на результат определения усилий от действия внешних сил. Более того, даже при отсутствии внешних сил, при сборке могут возникать начальные (монтажные) усилия. Общий порядок решения задачи сохраняется, но уравнения совместности деформаций (удлинений) содержат дополнительные удлинения (укорочения) необходимые для осуществления сборки неточно изготовленных элементов.
- Пример 2. Абсолютно жесткая балка подвешивается на двух медных и одном стальном ($E_м/E_с$=1/2) стержнях одинаковой длины. Стальной стержень при изготовлении был сделан длиннее на величину Δ. Определить монтажные усилия после сборки и усилия при нагружении силой *F*.



1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:

Реакции от медных стержней равны из-за симметрии системы.

2. *Статика* : Составляем уравнение равновесия:

$$\sum Z_i = 0; \quad \boxed{2R_м + R_с = 0.}$$

3. *Геометрия*: Задаем промежуточное положение балки и составляем уравнение совместности деформаций:

$$\boxed{\Delta l_м + \Delta l_с = \Delta.}$$

4. *Физика*: Записываем соотношения связи деформаций с усилиями:

$$\Delta l_м = \frac{N_м l}{E_м A} = \frac{R_м l}{E_м A}; \qquad \Delta l_с = \frac{N_с l}{E_с A} = -\frac{R_с l}{E_с A}.$$

Знак минус присваивается, поскольку стальной стержень должен укоротиться и внутреннее усилие должно быть отрицательным (сжатие).

Подставляем соотношения упругости в уравнения совместности:

$$\frac{R_м l}{E_м A} + \left(-\frac{R_с l}{E_с A}\right) = \Delta. \Longrightarrow R_м = \left(\Delta + \frac{R_с l}{E_с A}\right)\frac{E_м A}{l}. \Longrightarrow \boxed{R_м = \Delta\frac{E_м A}{l} + R_с\frac{E_м}{E_с} = \Delta\frac{E_м A}{l} + R_с\frac{1}{2}.}$$

Подставим полученное соотношение в уравнение равновесия:

$$2\left(\Delta\frac{E_м A}{l} + R_с\frac{1}{2}\right) + R_с = 0 \Longrightarrow R_с = \frac{-2\Delta\frac{E_м A}{l}}{2} = -\frac{\Delta}{l}AE_м.$$

Из этого же уравнения равновесия следует:

$$R_м = -\frac{R_с}{2} = \frac{\Delta}{2l}AE_м.$$

В выражения для реакций входят абсолютные значения модуля упругости $E_м$, длины и площади стержней.
Вычислим величины реакций для конкретных данных: l = 2 м, *A* = 20 см^2, Δ = 0.5 мм, $E_м$ = 10^5 МПа :

$$R_с = -\frac{0{,}5\cdot 10^{-3}}{2}20\cdot 10^{-4}2\cdot 10^{11} = -5\cdot 10^4 = -50\,кН; \qquad R_м = -\frac{-50}{2} = 25\,кН.$$

При нагружении балки силой *F* посередине балка получает дополнительное перемещение *б*:

Уравнения равновесия, совместности деформаций и соотношения упругости принимают вид:

$$\sum Z_i = 0; \quad \boxed{2R_м + R_с - F = 0.} \quad \boxed{\Delta l_м - \Delta l_с = \Delta.}$$

$$\Delta l_м = \frac{N_м l}{E_м A} = \frac{R_м l}{E_м A}; \qquad \Delta l_с = \frac{N_с l}{E_с A} = \frac{R_с l}{E_с A}.$$

Подстановка соотношений упругости в уравнения совместности приводит к ранее полученному выражению для $R_м$=$R_м$($R_с$).
Подстановка в уравнение равновесия дает:

$$R_с = \frac{F - 2\Delta\frac{E_м A}{l}}{2} = \frac{F}{2} - \Delta\frac{AE_м}{l}.$$

Из выражения $R_м$=$R_м$($R_с$) :

$$R_м = \Delta\frac{E_м A}{l} + \left(\frac{F}{2} - \Delta\frac{AE_м}{l}\right)\frac{1}{2} = \frac{F}{4} + \Delta\frac{AE_м}{2l}.$$

После подстановки значений силы F =500 кН получаем $R_с$ = 200 кН и $R_м$= 150 кН.

Лекция 5 (продолжение 5.5 – дополнительный материал)

Пример 3. В предыдущем примере рассматриваемая система была симметричной. Если система несимметричная по геометрии, нагружению, материалам стержней, то перемещение жесткой балки при деформации будет не поступательное, а плоское (с поворотом вокруг некоторого центра). Рассмотрим решение такой задачи, подобной предыдущей, но со следующими данными: Левый медный стержень изготовлен короче остальных на величину *Δ*, сила *F* приложена на расстоянии *c* > *a* от левого стержня. Найти усилия в стержнях.

1. Выбираем объект равновесия, отбрасываем связи и заменяем их действие реакциями:

2. *Статика* : Составляем уравнение равновесия:

$$\sum Z_i = 0; \quad R_{1м} + R_с + R_{2м} - F = 0.$$

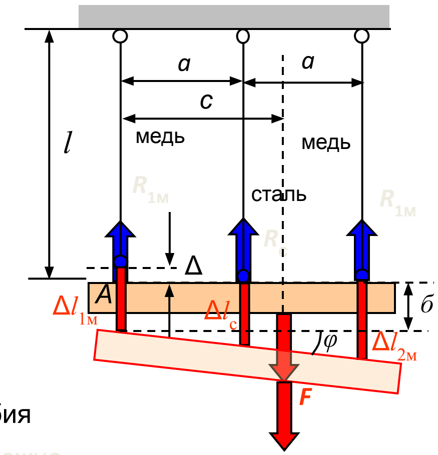
$$\sum M_{Ai} = 0; \quad R_с a + R_{2м} 2a - Fc = 0.$$

3. *Геометрия*: Задаем произвольное наклонное положение балки и составляем уравнения совместности деформаций:

$$\Delta l_{1м} = \Delta + \delta; \quad \Delta l_с = \delta + \varphi \cdot a; \quad \Delta l_{2м} = \delta + \varphi \cdot 2a.$$

4. *Физика*: Записываем соотношения связи деформаций с усилиями:

$$\Delta l_{1м} = \frac{N_{1м} l}{E_м A} = \frac{R_{1м} l}{E_м A}; \qquad \Delta l_с = \frac{N_с l}{E_с A} = \frac{R_с l}{E_с A}. \qquad \boxed{\Delta l_{2м} = \frac{N_{2м} l}{E_м A} = \frac{R_{2м} l}{E_м A};}$$



Получили полную систему уравнений, решающую данную задачу (8 уравнений и 8 неизвестных – 3 реакции и 5 перемещений, два из которых поступательное перемещение балки, угловое перемещение - поворот). Последние неизвестные можно исключить, составляя одно, но более сложное, уравнение совместности из подобия треугольников в виде:

$$\frac{\Delta l_с - (\Delta l_{1м} - \Delta)}{\Delta l_{2м} - (\Delta l_{1м} - \Delta)} = \frac{1}{2}.$$

Поскольку решать вручную 5 уравнений тоже достаточно сложно можно оставить первоначальную систему из 8 уравнений и решить ее численно, например, в системе MathCAD, в которой не требуются какие-либо подстановки и преобразования (посмотреть).

Если направления одного или двух стержней отличны от вертикального, то эта задача становится статически определимой (для плоской г... уравнений равновесия) и несоответстви... начальных (монтажных) усилий (балка ...

Удлинения наклонных стержней определяются отрезками, отсекаемые перпендикулярами, опущенными из **нового положения узла** (конца стержня) на **старое направление стержня**.

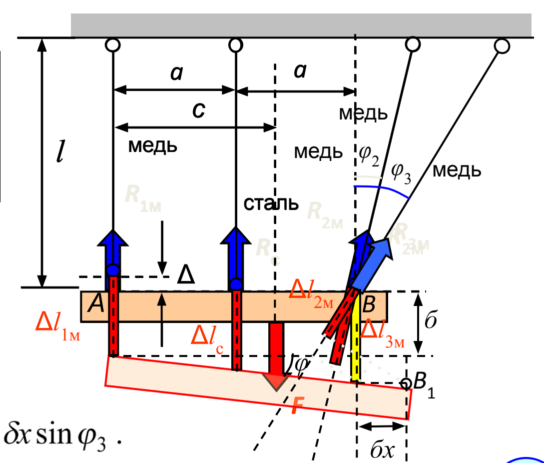
Пример 4. Пусть к такой системе добав... Система становится статически неопределимой, для которой можно составить 3 уравнения равновесия и 4 уравнения совместности деформаций (вместе с 4 соотношениями упругости получается система 11 уравнений):

$$\sum X_i = 0; \; R_{2м} \sin\varphi_2 + R_{3м} \sin\varphi_3 = 0.$$

$$\sum Z_i = 0; \quad R_{1м} + R_с + R_{2м} \cos\varphi_2 + R_{3м} \cos\varphi_3 - F = 0.$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad R_с a + R_{2м} \cos\varphi_2 2a + R_{3м} \cos\varphi_3 2a - Fc = 0.$$

$$\Delta l_{1м} = \Delta + \delta; \;\; \Delta l_с = \delta + \varphi \cdot a; \;\; \Delta l_{2м} = (\delta + \varphi \cdot 2a)\cos\varphi_2 - \delta x \sin\varphi_2; \;\; \Delta l_{3м} = (\delta + \varphi \cdot 2a)\cos\varphi_3 - \delta x \sin\varphi_3 .$$



Теперь в соотношениях упругости длины 2-го и 3-го медных стержней: $l_2 = l / \cos\varphi_2; \;\; l_3 = l / \cos\varphi_3$

(Посмотреть решение этой задачи в системе MathCAD)