

# *ВИДЫ РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ*

*10 класс*

# Содержание.

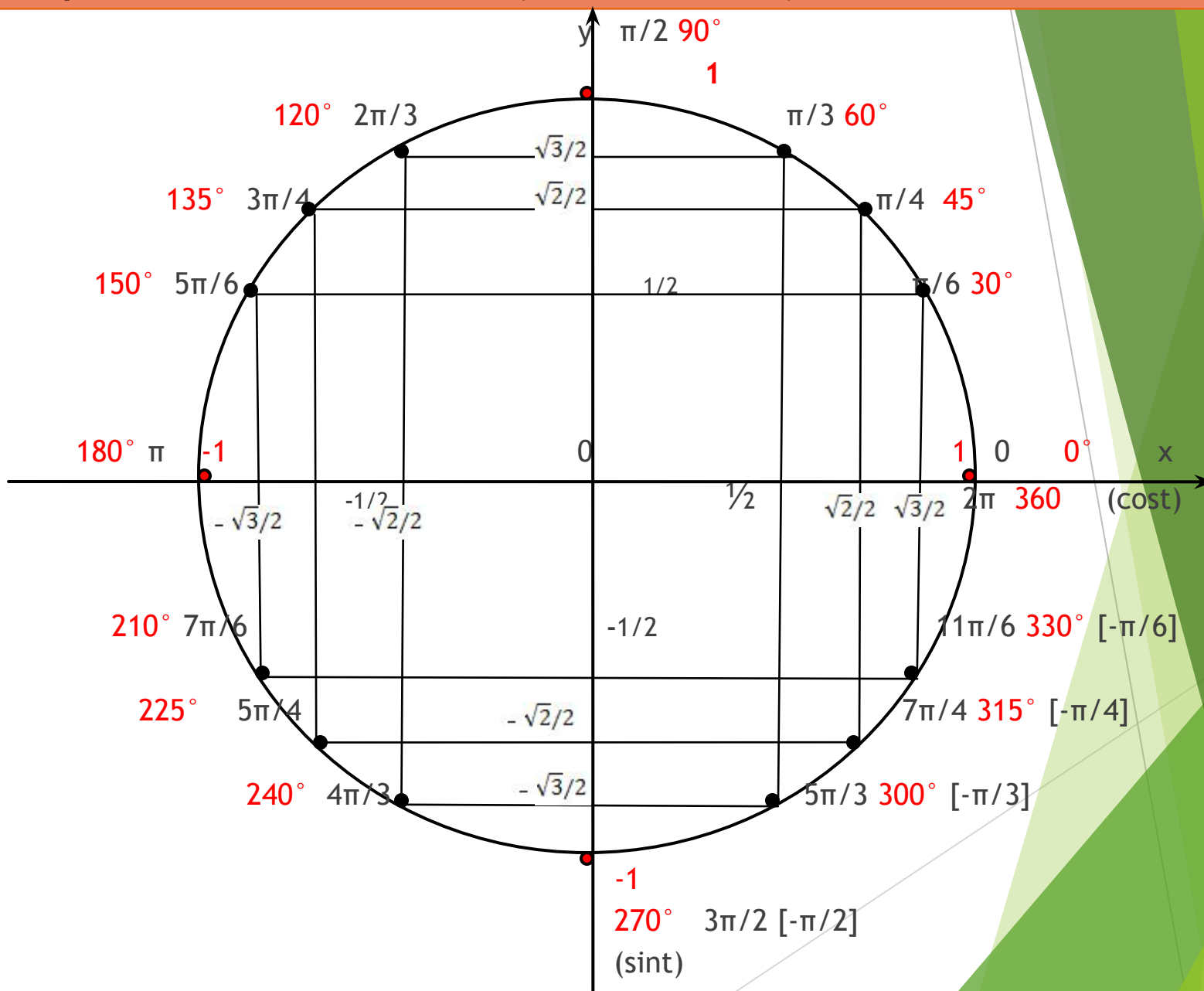
1. Вводная часть
2. Решение тригонометрических уравнений
3. Основные проблемы при решении тригонометрических уравнений

# ЦЕЛЬ:

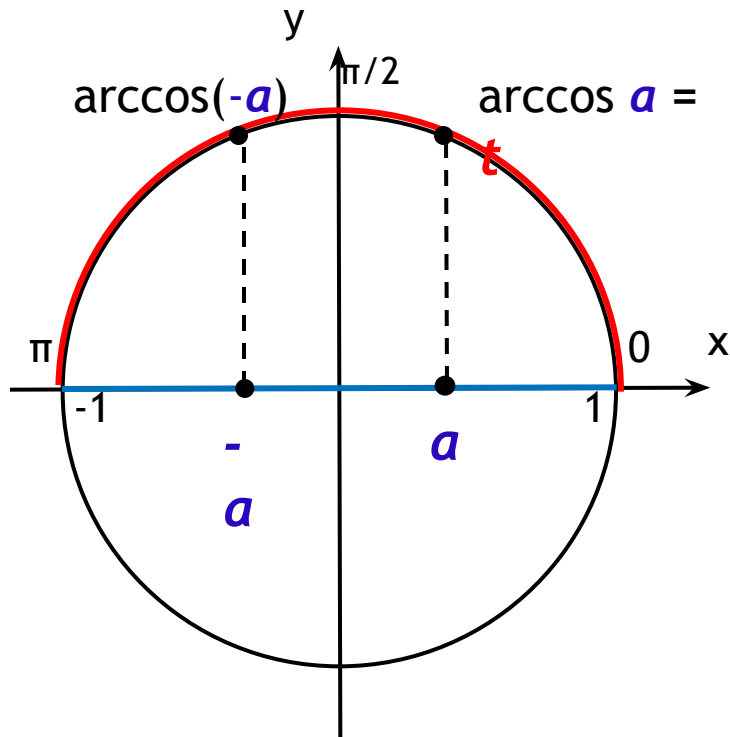
- ▶ Повторить решение тригонометрических уравнений
  - ▶ Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений
  - ▶ Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений
  - ▶ Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.
- ▶ Выделение основных проблем при решении этих уравнений:
  - ▶ Потеря корней.
  - ▶ Посторонние корни.
  - ▶ Отбор корней.



# Повторение значения синуса и косинуса



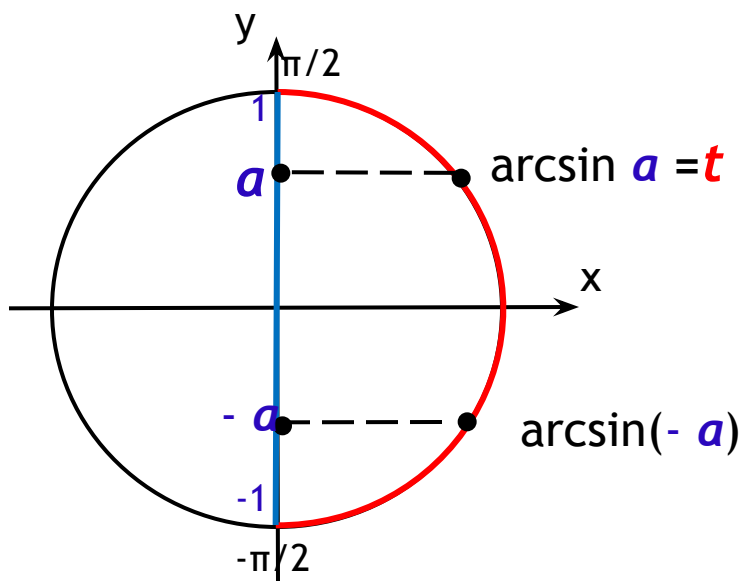
# Арккосинус



Арккосинусом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $[0; \pi]$ , что  $\cos t = a$ .  
Причём,  $|a| \leq 1$ .

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

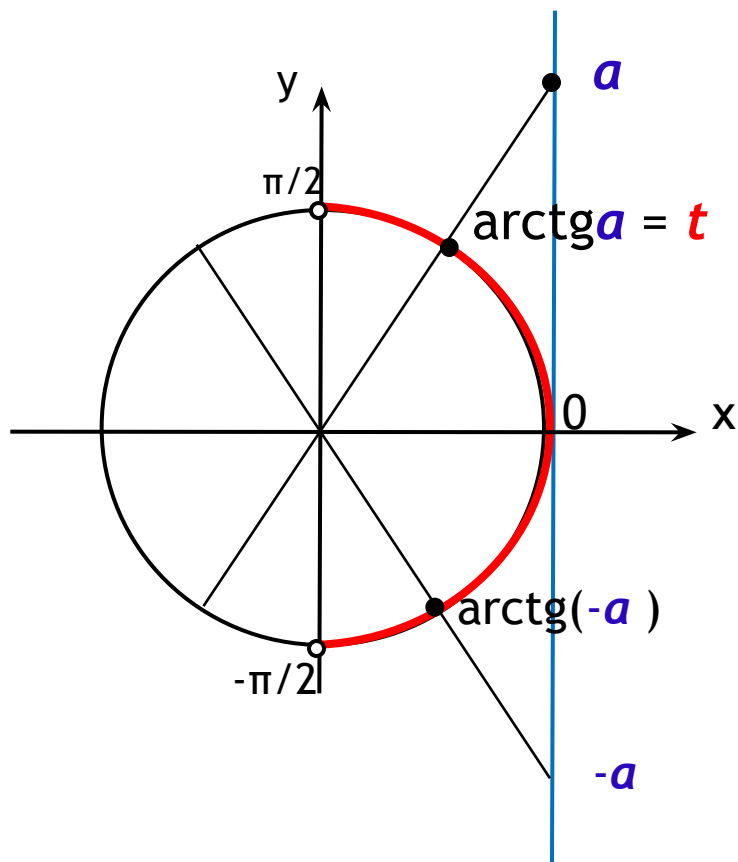
# Арксинус



Арксинусом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $[-\pi/2; \pi/2]$ , что  $\sin t = a$ .  
Причём,  $|a| \leq 1$ .

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

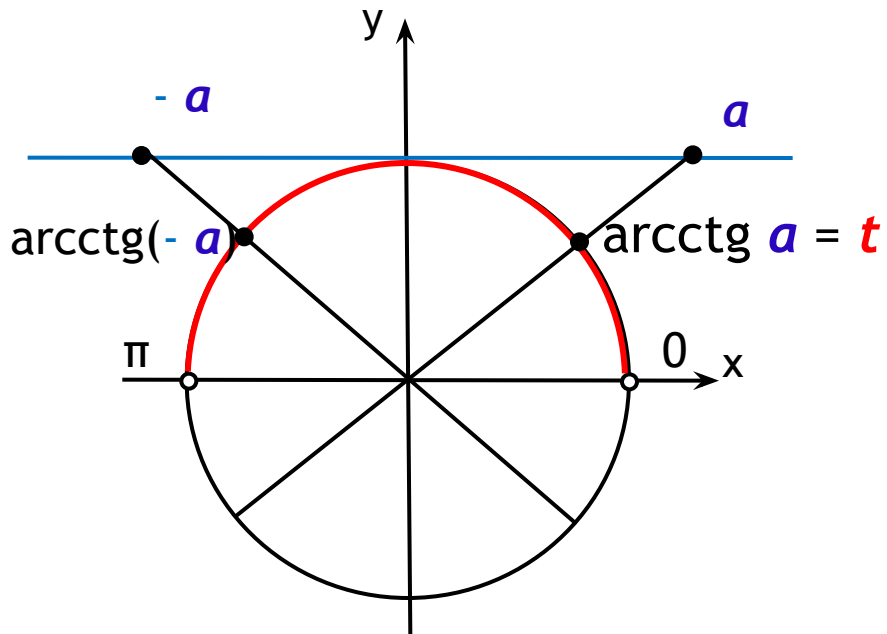
# Арктангенс



Арктангенсом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $(-\pi/2; \pi/2)$ , что  $\operatorname{tg} t = a$ .  
Причём,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\arctg(-a) = -\arctg a$$

# Арккотангенс



Арккотангенсом числа  $a$  называется такое число (угол)  $t$  из  $(0; \pi)$ , что  $\text{ctg } t = a$ .  
Причём,  $a \in \mathbb{R}$ .

$$\text{arcctg}(-a) = \pi - \text{arcctg } a$$



# Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$1. \cos t = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$\begin{cases} t = \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = -\arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи

$$1) \quad \underline{\cos t = 0} \\ t = \pi/2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \quad \underline{\cos t = 1} \\ t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \quad \underline{\cos t = -1} \\ t = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

# Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

## 2. $\sin t = a$ , где $|a| \leq 1$

$$\begin{cases} t = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ t = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

### Частные случаи

1)  $\underline{\sin t = 0}$   
 $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

2)  $\underline{\sin t = 1}$   
 $t = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3)  $\underline{\sin t = -1}$   
 $t = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

# Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

$$3. \operatorname{tg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$4. \operatorname{ctg} t = a, \quad a \in \mathbb{R}$$

$$t = \operatorname{arcctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

При каких значениях  $x$  имеет смысл выражение:

1.  $\arcsin(2x+1)$

1)  $-1 \leq 2x+1 \leq 1$   
 $-2 \leq 2x \leq 0$   
 $-1 \leq x \leq 0$   
Ответ:  $[-1; 0]$

2.  $\arccos(5-2x)$

2)  $-1 \leq 5-2x \leq 1$   
 $-6 \leq -2x \leq -4$   
 $2 \leq x \leq 3$   
Ответ:  $[2; 3]$

3.  $\arccos(x^2-1)$

$-1 \leq x^2-1 \leq 1$   
 $0 \leq x^2 \leq 2$   
Ответ:

$[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$

4.  $\arcsin(4x^2-3x)$

$-1 \leq 4x^2-3x \leq 1$   
 $\begin{cases} 4x^2-3x \geq -1 \\ 4x^2-3x \leq 1 \end{cases}$   
 $4x^2-3x-1 \leq 0$   
Ответ:

$[-\frac{1}{4}; 1]$

## Примеры:

$$1) \cos t = -\frac{1}{2};$$

$$t = \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$3) \operatorname{tg} t = 1;$$

$$t = \operatorname{arctg} 1 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

$$2) \sin t = 0;$$

Частный случай:  
 $t = \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$4) \operatorname{ctg} t = -\sqrt{3}$$

$$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



# Решение простейших уравнений

1)  $\text{tg}2x = -1$

$$2x = \text{arctg}(-1) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\pi/4 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $-\pi/8 + \pi k/2, k \in \mathbb{Z}$ .

2)  $\cos(x+\pi/3) = 1/2$

$$x+\pi/3 = \pm \arccos 1/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+\pi/3 = \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

3)  $\sin(\pi - x/3) = 0$

упростим по формулам приведения

$$\sin(x/3) = 0$$

частный случай

$$x/3 = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ:  $3\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .



# Виды тригонометрических уравнений

## 1.Сводимые к квадратным

*Решаются методом введения новой переменной*

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть  $\sin x = p$ , где  $|p| \leq 1$ , тогда  $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

## 2.Однородные

Первой степени:

*Решаются делением на  $\cos x$  (или  $\sin x$ ) и методом введения новой переменной.*

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к.  $\sin x$  и  $\cos x$  одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на  $\cos x$  (или на  $\sin x$ ). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = m$$

## 3.Уравнение вида

$$A \sin x + B \cos x = C. \quad A, B, C \neq 0$$

# Виды тригонометрических уравнений

## 2) Однородные уравнения второй степени:

*Решаются делением на  $\cos^2 x$  (или  $\sin^2 x$ ) и методом введения новой переменной.*

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на  $\cos^2 x$ . Получим квадратное уравнение:

$$\mathbf{a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0.}$$

**Пр и м е р .** Решить уравнение:  $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2$ .

**Р е ш е н и е .**  $3\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 5 \cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$ ,

$$\sin^2 x + 4 \sin x \cdot \cos x + 3 \cos^2 x = 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0, \text{ отсюда } y^2 + 4y + 3 = 0,$$

корни этого уравнения:  $y_1 = -1, y_2 = -3$ , отсюда

$$1) \operatorname{tg} x = -1, \quad 2) \operatorname{tg} x = -3,$$

Ответ:  $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; -\arctg 3 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$





# Виды тригонометрических уравнений

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки  $A \sin x + B \cos x = C$

*Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.*

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

# Формулы.

## Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \quad x \neq \pi + 2\pi n;$$

*Проверка обязательна!*

## Понижение степени.

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= (1 + \cos 2x) : 2 \\ \sin^2 x &= (1 - \cos 2x) : 2 \end{aligned}$$

## Метод вспомогательного аргумента.

$a \cos x + b \sin x$  заменим на  $C \sin(x + \phi)$ , где

$$C = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\sin \phi = \frac{a}{C}; \quad \cos \phi = \frac{b}{C}; \quad \phi - \text{вспомогательный аргумент.}$$



# Правил

а.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.



## Потеря корней, лишние корни.

### 1. Потеря корней:

- делим на  $g(x)$ .
- опасные формулы (универсальная подстановка).

*Этими операциями мы сужаем область определения.*

### 2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на  $g(x)$  (избавляемся от знаменателя).

*Этими операциями мы расширяем область определения.*



Спасибо