ВИДЫ РЕШЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

10 класс

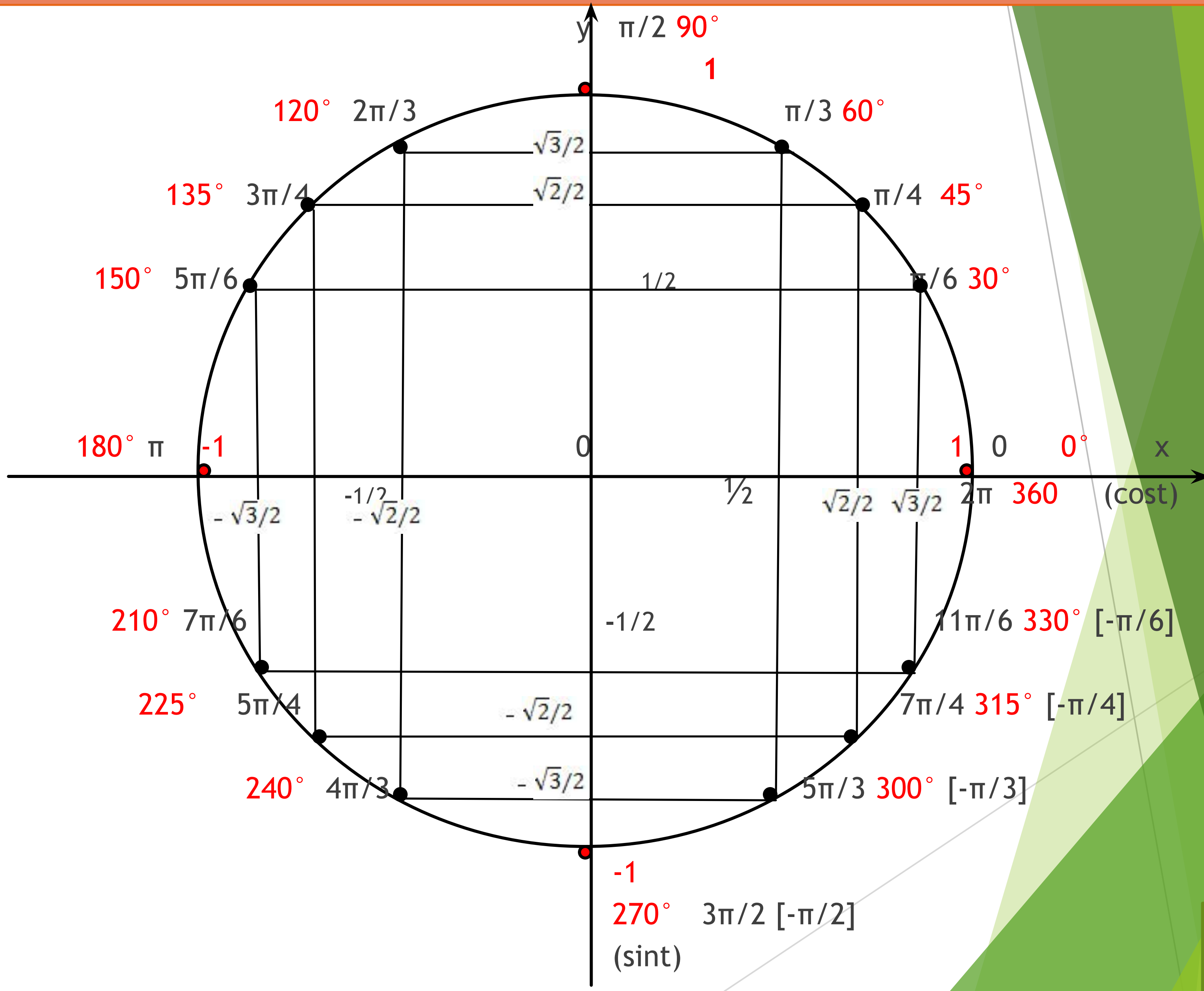
Содержание.

1. Вводная часть
2. Решение тригонометрических уравнений
3. Основные проблемы при решении тригонометрических уравнений

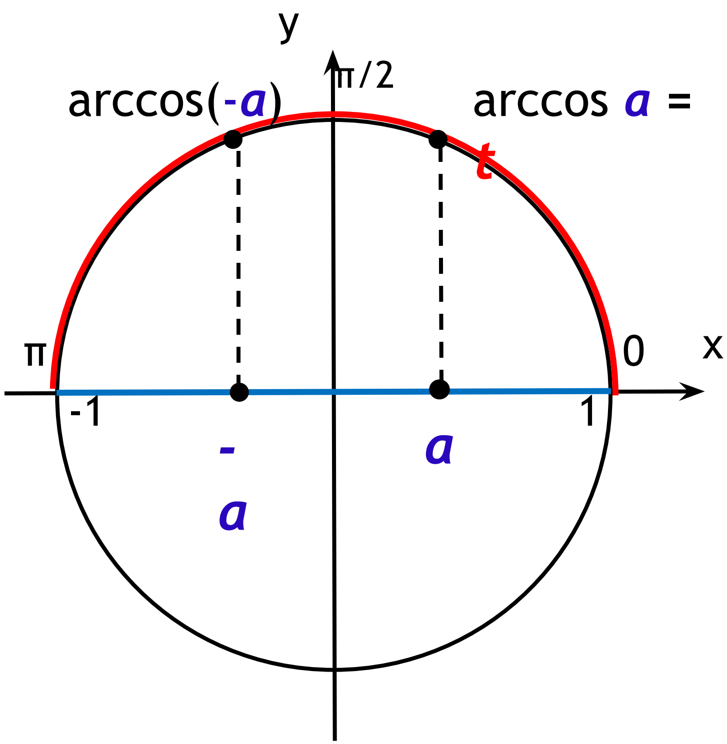
ЦЕЛЬ:

- Повторить решение тригонометрических уравнений
  - Знать формулы для решения простейших тригонометрических уравнений
  - Различать типы тригонометрических уравнений и знать способы их решений
  - Уметь решать тригонометрические уравнения любых типов.
- Выделение основных проблем при решении этих уравнений:
  - Потеря корней.
  - Посторонние корни.
  - Отбор корней.

Повторение значения синуса и косинуса



Арккосинус

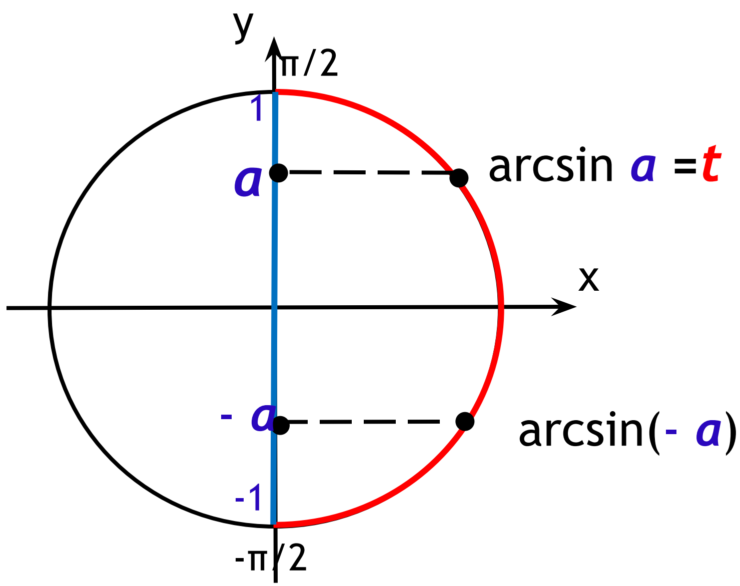


Арккосинусом числа a называется такое число (угол) t из [0;π], что **cos** t **=** a**.**

Причём, | a |≤ **1.**

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$

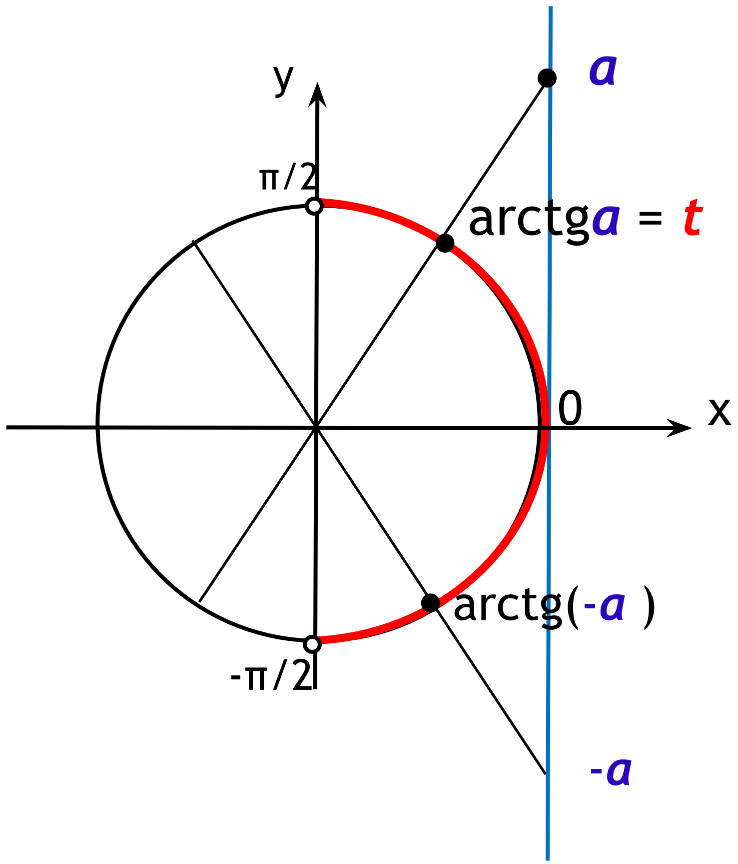
Арксинус



Арксинусом числа ***a*** называется такое число (угол) **t** из **[-π/2;π/2]**, что ***sin t = a.***
Причём, **| *a* |≤ 1**.

arcsin(- *a*)= - arcsin *a*

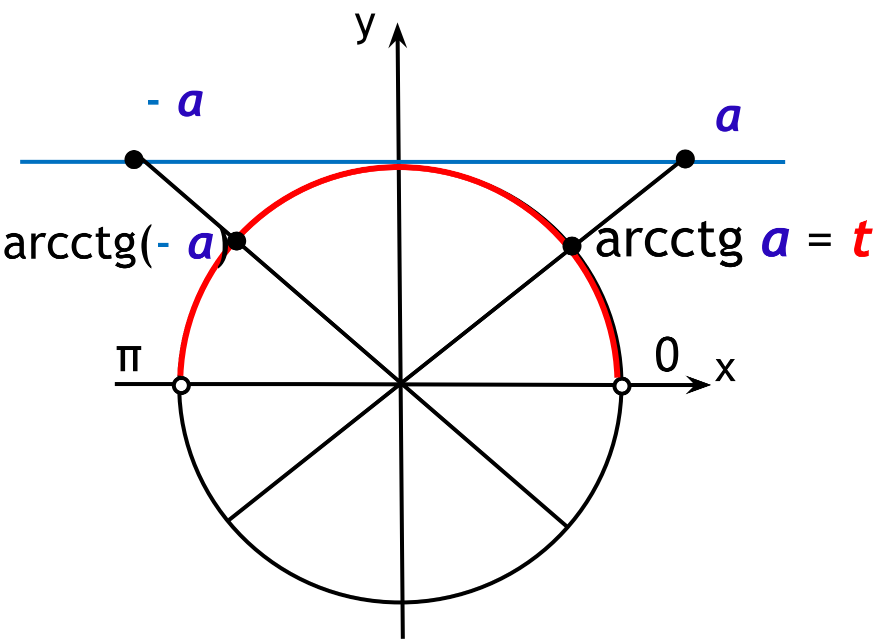
Арктангенс



Арктангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (-π/2;π/2), что ***tg t = a*** .
Причём, ***a* Є R.**

arctg(-*a*) = - arctg *a*

Арккотангенс



Арккотангенсом числа ***a*** называется такое число (угол) ***t*** из (0;π), что c***tg*** ***t*** **=** ***a*.**
Причём, ***a*** ЄR .

arcctg(- ***a***) = π – arcctg ***a***

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

1.cost = *a* , где **|*a*|** ≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = -\arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$\boxed{t = \pm\arccos \mathbf{a} + 2\pi k, k \in Z}$$

Частные случаи

1) <u>cost=0</u>
t = π/2+πk, k∈Z

2) <u>cost=1</u>
t = 2πk, k∈Z

3) <u>cost = -1</u>
t = π+2πk, k∈Z

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

2. sint = *a*, *где* | *a* |≤ 1

$$\left[\begin{array}{l} t = \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \\ t = \pi - \arcsin \boldsymbol{a} + 2\pi k, k \in Z \end{array}\right.$$

или

$$t = (-1)^k \arcsin \boldsymbol{a} + \pi k, k \in Z$$

Частные случаи

1) <u>sint=0</u>
   t = πk, kЄZ

2) <u>sint=1</u>
   t = π/2+2πk, kЄZ

3) <u>sint = - 1</u>
   t = - π/2+2πk, kЄZ

Формулы корней простейших тригонометрических уравнений

3. $tgt = a$, $a \in R$

$t = \text{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$

4. $ctgt = a$, $a \in R$

$t = \text{arcctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$

При каких значениях x имеет смысл выражение:

1.arcsin(2x+1)

1) $-1 \le \mathbf{2x+1} \le 1$
$-2 \le \mathbf{2x} \le 0$
$-1 \le \mathbf{x} \le 0$
Ответ: [-1;0]

2.arccos(5-2x)

2) $-1 \le \mathbf{5-2x} \le 1$
$-6 \le \mathbf{-2x} \le -4$
$2 \le \mathbf{x} \le 3$
Ответ: [2;3]

3.arccos(x^2-1)

$-1 \le \mathbf{x^2-1} \le 1$
$0 \le \mathbf{x^2} \le 2$
Ответ:
$[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$

4.arcsin($4x^2$-3x)

$-1 \le 4x^2-3x \le 1$
$$\begin{cases} 4x^2-3x \ge -1 \\ 4x^2-3x \le 1 \end{cases}$$
$4x^2-3x-1 \le 0$
Ответ:
$\left[-\frac{1}{4};1\right]$

Примеры:

1) cost= - $\frac{1}{2}$;

$t= \pm\arccos(-1/2)+2\pi k,\ k \in Z$

$t= \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$

2) sint = 0;

Частный случай:
$t = \pi k,\ k \in Z$

3) tgt = 1;

$t = \operatorname{arctg}1+\pi k,\ k \in Z$

$t = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z.$

4) ctgt = - $\sqrt{3}$

$t = \operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \pi k,\ k \in Z$

$t = \frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$

Решение простейших уравнений

1) $tg2x = -1$

$2x = arctg\,(-1) + \pi k,\ k \in Z$

$2x = -\pi/4 + \pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/8 + \pi k/2,\ k \in Z$.

2) $\boldsymbol{\cos(x+\pi/3) = 1/2}$

$x+\pi/3 = \pm\arccos 1/2 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x+\pi/3 = \pm\pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

$x = -\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

Ответ: $-\pi/3 \pm \pi/3 + 2\pi k,\ k \in Z$

3) $\boldsymbol{\sin(\pi - x/3) = 0}$

упростим по формулам приведения

$\sin(x/3) = 0$

частный случай

$x/3 = \pi k,\ k \in Z$

$x = 3\pi k,\ k \in Z.$

Ответ: $3\pi k,\ k \in Z$.

Виды тригонометрических уравнений

1.Сводимые к квадратным

Решаются методом введения новой переменной

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x + c = 0$$

Пусть $\sin x = p$, где $|p| \leq 1$, тогда $a \cdot p^2 + b \cdot p + c = 0$

Найти корни, вернуться к замене и решить простые уравнения.

2.Однородные

Первой степени:

Решаются делением на cos x (или sinx) и методом введения новой переменной.

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

Т.к. sinx и cosx одновременно не равны нулю, то разделим обе части уравнения на cosx (или на sinx). Получим: простое уравнение

$$a \cdot \mathrm{tg}x + b = 0 \text{ или } \mathrm{tg}x = m$$

3.Уравнение вида

$A \sin x + B \cos x = C. \qquad A, B, C \neq 0$

Виды тригонометрических уравнений

2) Однородные уравнения второй степени:

Решаются делением на $\cos^2 x$ (или $\sin^2 x$) и методом введения новой переменной.

$$\mathbf{a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0}$$

Разделим обе части на $\cos^2 x$. Получим квадратное уравнение:

$$a \cdot \mathrm{tg}^2 x + b \cdot \mathrm{tg} x + c = 0.$$

П р и м е р . Решить уравнение: $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2.$

Р е ш е н и е . $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$,

$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$,

$\mathrm{tg}^2 x + 4\,\mathrm{tg}\, x + 3 = 0$, отсюда $y^2 + 4y + 3 = 0$,

корни этого уравнения: $y_1 = -1$, $y_2 = -3$, отсюда

1) $\mathrm{tg}\, x = -1$, 2) $\mathrm{tg}\, x = -3$,

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z;\ -arctg 3 + \pi n,\ n \in Z$

Виды тригонометрических уравнений

4. Решение тригонометрических уравнений с помощью универсальной тригонометрической подстановки $A \sin x + B \cos x = C$

Решаются с помощью введения вспомогательного аргумента.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

Формулы.

Универсальная подстановка.

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};\quad \operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$x \neq \pi + 2\pi n$; Проверка обязательна!

Понижение степени.

$\cos^2 x$ *= (1 + cos2x) : 2*

$\sin^2 x$ *= (1 – cos 2x) : 2*

Метод вспомогательного аргумента.

a cosx +b sinx заменим на C sin(x+ϕ), где $C = \sqrt{a^2 + b^2}$;

sinϕ = $\frac{a}{C}$; cosϕ = $\frac{b}{C}$; ϕ - вспомогательный аргумент.

Правила.

- Увидел квадрат – понижай степень.
- Увидел произведение – делай сумму.
- Увидел сумму – делай произведение.

<u>Потеря корней, лишние корни.</u>

1.Потеря корней:

- делим на g(x).
- опасные формулы (универсальная подстановка).

Этими операциями мы сужаем область определения.

2. Лишние корни:

- возводим в четную степень.
- умножаем на g(x) (избавляемся от знаменателя).

Этими операциями мы расширяем область определения.

Спасибо