Теорема Менелая.

Задачи:

1. Изучить теорему.
2. Знать её применение.
3. Уметь решать задачи на изученную теорему.

Введение

В курсе геометрии 7-х –9-х классов были рассмотрены важные и интересные свойства геометрических фигур на плоскости. Но многие удивительные соотношения и изящные геометрические факты не вошли в основной курс.

Из школьного курса нам известны теоремы о замечательных точках в треугольнике: три биссектрисы (медианы, высоты) пересекаются в одной точке. Эти свойства являются следствиями теоремы Менелая.

Биография ученого

- **Менела́й Александри́йский** — древнегреческий математик и астроном, создатель системы геометрии и тригонометрии на сфере – первой неевклидовой геометрии. Время его жизни и деятельности определяется приведёнными в «Алмагесте» Птолемея двумя астрономическими наблюдениями, которые Менелай произвёл в Риме в первом году царствования Траяна, то есть в 98 году н. э.
- Его работы: главным сочинением Меналая является «Сферика» в трёх книгах, сочинения «О вычислении хорд» в 6 книгах, «Начала геометрии» в 3 книгах, «Книга о треугольнике», «Книга о заходах знаков зодиака», «Книга о подразделении составных тел», посвящённая определению удельных весов тел, книга по гидростатике.

Биография ученого

- Труд «Сферика» стал вершиной достижений греков в сферической геометрии. Менелай первым ввел в геометрический обиход и исследовал простейший сферический многоугольник – треугольник. Он перенес на сферу евклидову теорию плоских треугольников и в числе прочего получил условие, при котором три точки на сторонах сферического треугольника или их продолжениях лежат на одной прямой. Интересно, что соответствующая теорема для плоскости в то время была уже широко известна, однако в историю геометрии она вошла именно как теорема Менелая.

Биография ученого

- Самым замечательным считается обыкновенная теорема Менелая Александрийского, которая прежде называлась правилом шести количеств. Содержание ее состоит в следующем. Если все стороны треугольника пересечь прямой, то произведение их трех отрезков, из числа не имеющих общих концов, равно произведению таких же трех остальных отрезков. Менелай выражал свою теорему в виде пропорции $a_1{:}b_1{=}b_2b_3{:}a_2a_3$, в которой буквы a_1, a_2 и a_3 и, соответственно, буквы b_1, b_2 и b_3 обозначают не имеющие общих концов отрезки трех сторон треугольника. Словесным выражением этой пропорции было предложение: a_1 находится к b_1 в таком же *сложном отношении*, в каком находятся b_2 к a_2 и b_3 к a_3.

Теорема Менелая

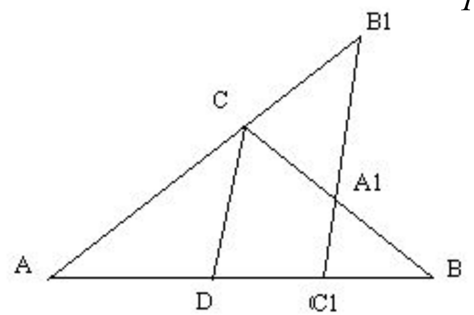
Пусть на сторонах *AB, BC* и продолжении стороны *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1. Точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется равенство:

$$\frac{AC1}{CB1} = \frac{BA1}{A1C} = \frac{CB1}{B1A} = 1$$

Теорема Менелая

Доказательство. Предположим, что точки A_1,B_1, C_1 принадлежат одной прямой a.Через вершину C треугольника ABC проведем прямую, параллельную а и обозначим через D точку её пересечения с AB. Из подобия треугольников ADC и AC_1B_1 следует выполнимость равенства:

$$\frac{CB1}{B1A} = \frac{DC1}{AC1}$$



Аналогично, из подобия треугольников BDC и BC_1A_1 следует выполнимость равенства: $\frac{BA1}{A1C} = \frac{BC1}{C1D}$

Перемножая эти равенства, получим равенство:

$$\frac{BA1}{A1C} \cdot \frac{CB1}{B1A} = \frac{BC1}{AC1}$$

из которого следует требуемое равенство.

Теорема Менелая

Докажем обратное. Пусть на сторонах *AB, BC* и продолжении стороны *AC* треугольника *ABC* взяты соответственно точки C_1, A_1, B_1, для которых выполняется равенство $\frac{AC1}{CB1} = \frac{BA1}{A1C} = \frac{CB1}{B1A} = 1$.

Предположим, что прямая A_1B_1 пересекает прямую *AB* в некоторой точке *C*`. По доказанному, выполняется равенство:

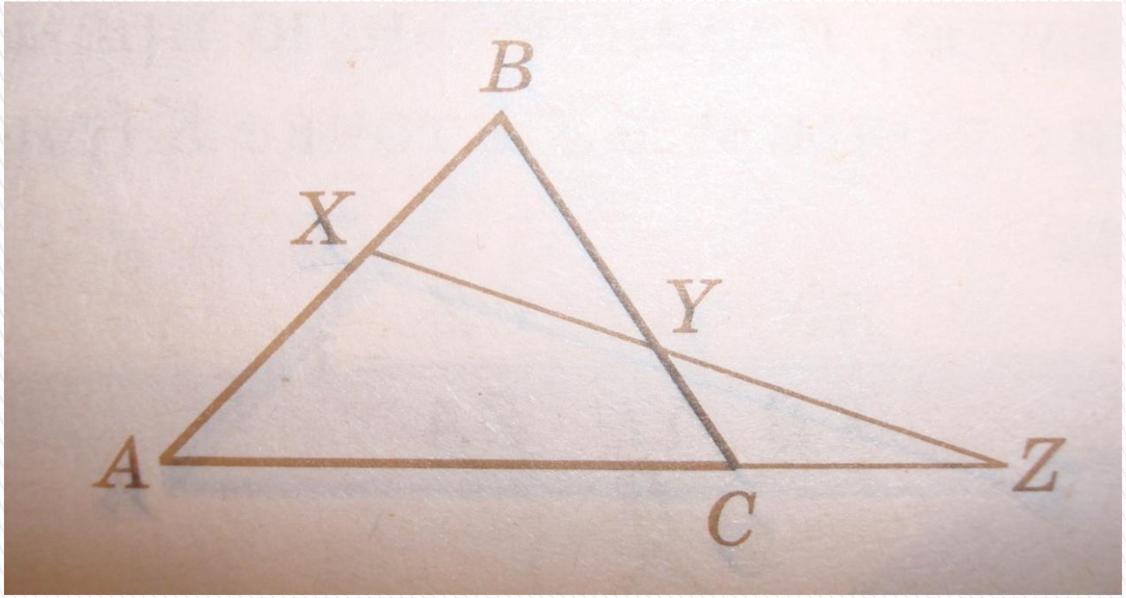
$$\frac{AC`}{C`B} = \frac{BA1}{A1C} = \frac{CB1}{B1A} = 1$$

Учитывая первое равенство, получаем равенство : $\frac{AC`}{C`B} = \frac{AC1}{CB1}$, из которого следует совпадение точек *C*`и C_1 и, значит, точки A_1, B_1, C_1 принадлежат одной прямой.

Теорема Менелая

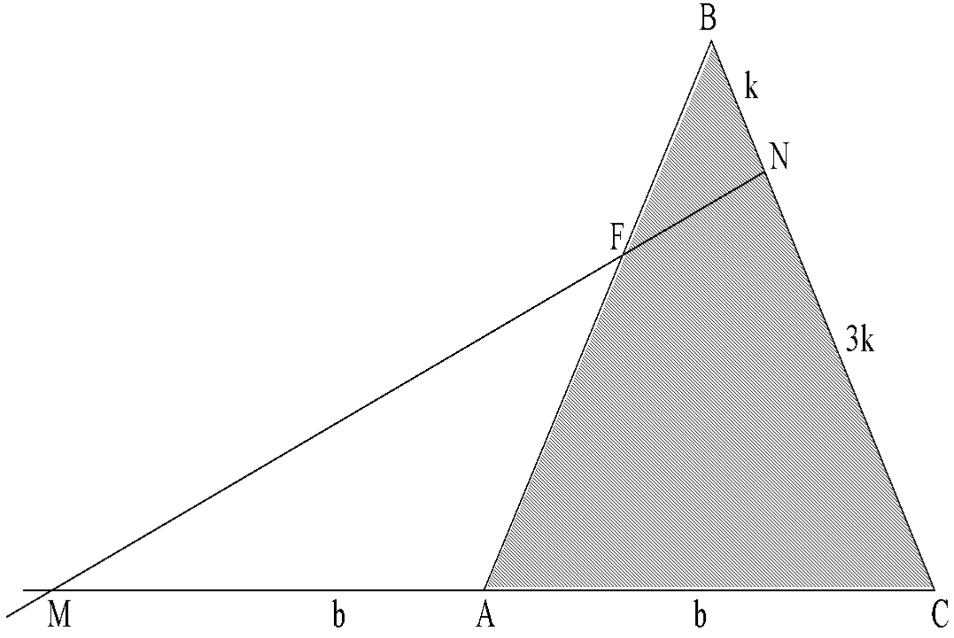
Если некоторая прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках X и Y соответственно, а продолжение стороны AC – в точке Z, то

$$\frac{AX}{XB} \times \frac{BY}{YC} \times \frac{CZ}{ZA} = 1$$



Задачи на теорему Менелая

Задача 1. В треугольнике ABC на стороне BC взята точка N так, что NC = 3BN;на продолжении стороны AC за точку A взята точка M так, что MA = AC. Прямая MN пересекает сторону AB в точке *F*. Найдите отношение $\frac{BF}{FA}$.



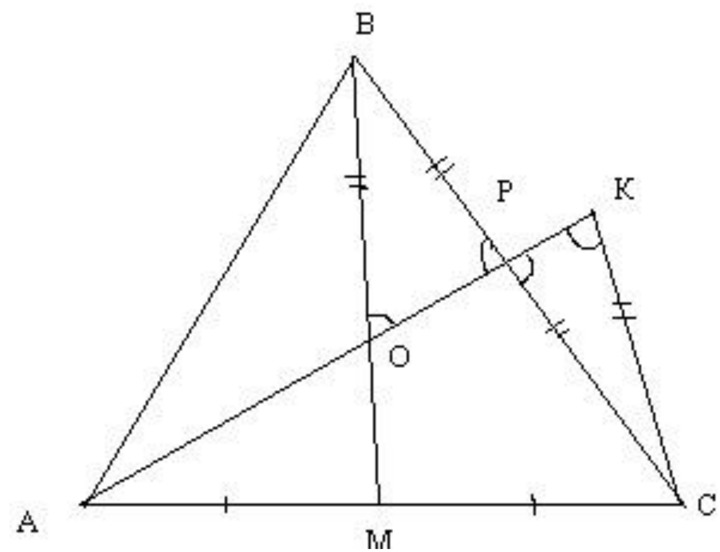
Решение. По условию задачи MA = AC, NC =3BN. Пусть MA = AC = b, BN =k, NC = 3k. Прямая MN пересекает две стороны треугольника *ABC* и продолжение третьей. По теореме Менелая:

$$\frac{CN}{NB}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AM}{MC}=1, \qquad \frac{3k}{k}\cdot\frac{BF}{FA}\cdot\frac{b}{2b}=1,$$

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{3}{2}=1, \qquad \frac{BF}{FA}=\frac{2}{3}.$$

Ответ: 2 : 3.

В треугольнике ABC точка M – середина стороны AC, точка P лежит на стороне BC. Отрезок AP пересекает BM в точке O. Оказалось, что BO=BP. Найти отношение OM:PC.



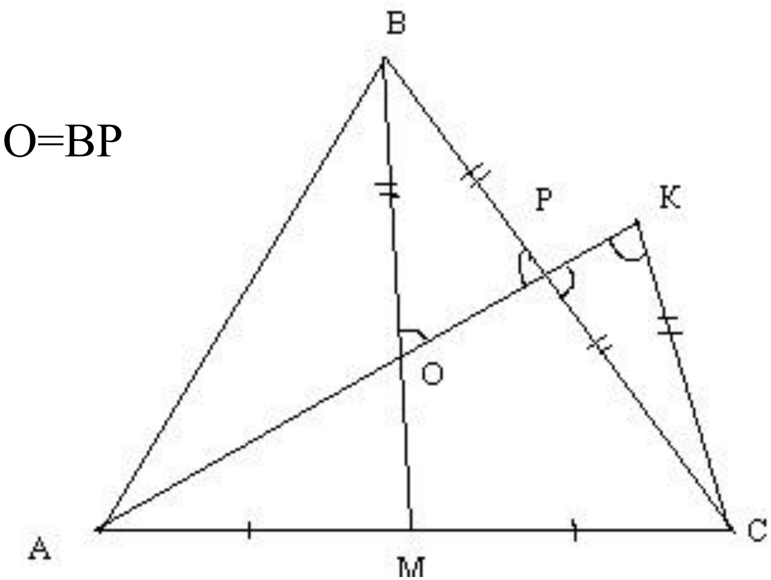
1 способ. Сделаем дополнительное построение: проведем через точку С прямую, параллельную ВМ; точку пересечения этой прямой с прямой АР обозначим через К.

Рассмотрим треугольники ОВР и КСР. Углы ОРВ и КРС равны как вертикальные, углы ВОР и СКР равны как накрест лежащие при пересечении параллельных прямых ВМ и СК секущей АК. Поскольку по условию треугольник ОВР равнобедренный, угол ВОР = углу ОРВ, значит, и угол СРК= углу СКР. Значит, треугольник СКР – равнобедренный, т.е. СР=КС. Но, (например, по т. Фалеса) ОМ – средняя линия треугольника САК, она в 2 раза меньше, чем СК. Получаем, что ОМ:РС = ОМ:СК = 1:2

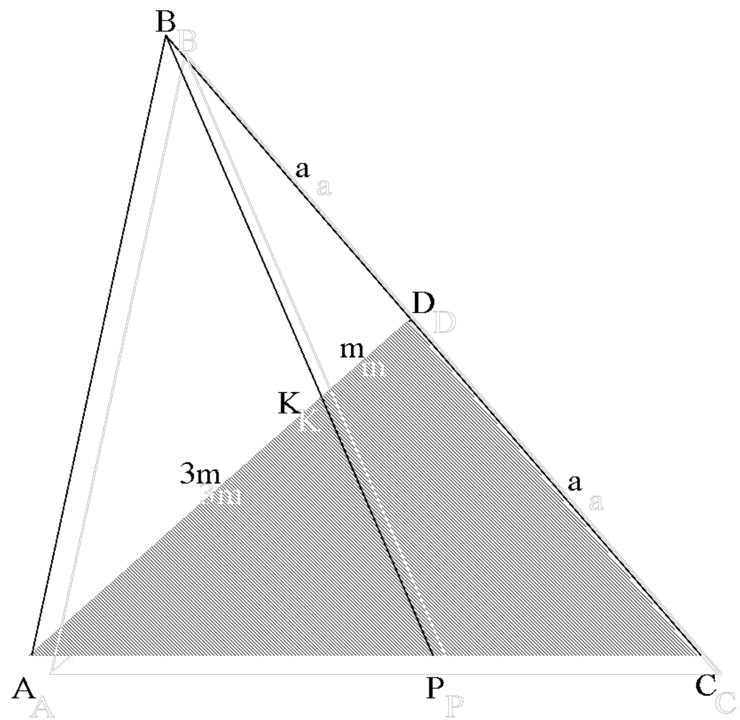
2 способ. По т. Менелая для треугольника МВС и прямой АР выполняется равенство: $\frac{MO}{OB} * \frac{BP}{PC} * \frac{AC}{AM} = 1$

Тогда, используя условия АМ=МС и ВО=ВР получим, что МО:РС=1:2.

Ответ: 1:2.



Задача 2. Пусть AD — медиана треугольника ABC. На стороне AD взята точка K так, что AK : KD = 3:1. Прямая BK разбивает треугольник ABC на два. Найдите отношение площадей этих треугольников.



Решение. Пусть AD = DC = *a*, KD = *m;* тогда AK = 3*m*. Пусть P — точка пересечения прямой BK со стороной AC. Необходимо найти отношение $\frac{S\Delta ABP}{S\Delta BPC}$. Так как треугольники ABP и PBC имеют равные высоты, проведенные из вершины B, то

$$\frac{S\Delta ABP}{S\Delta BPC} = \frac{AP}{PC}$$

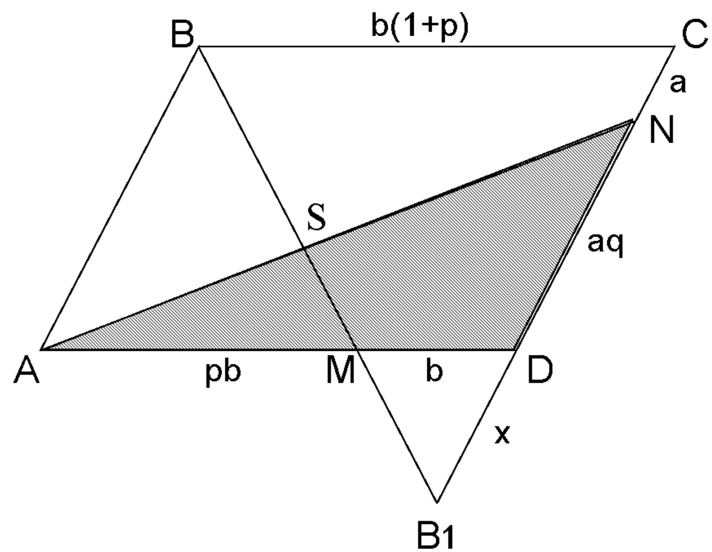
По теореме Менелая для треугольника ADC и секущей PB имеем:

$$\frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DK}{KA} = 1, \qquad \frac{AP}{PC} \cdot \frac{2a}{a} \cdot \frac{m}{3m} = 1, \qquad \frac{AP}{PC} = \frac{3}{2}.$$

Итак, $S\Delta ABP : S\Delta BPC = 3:2$

Ответ**:** 3:2.

Задача 3. Дан параллелограмм ABCD. Точка M делит отрезок AD в отношении p, а точка N делит отрезок DC в отношении q. Прямые BM и AN пересекаются в точке S. Вычислите отношение AS : SN.



Решение. $\frac{AM}{MD} = p \Rightarrow$ если MD = b, то AM = pb; $\frac{ND}{NC} = q \Rightarrow$ если NC = a, то ND = aq.

Пусть B_1 – точка пересечения прямых BM и CD. $\Delta MB_1D \sim \Delta BB_1C$, тогда

$$\frac{BC}{MD} = \frac{CB_1}{DB_1}; \frac{b(1+p)}{b} = \frac{a(1+q)+x}{x};$$

$$1+p = \frac{a(1+q)}{x} + 1; x = \frac{a(1+q)}{p}.$$

Прямая BB_1 пересекает две стороны и продолжение третьей треугольника AND. По теореме Менелая:

$$\frac{AS}{SN} \cdot \frac{NB_1}{B_1D} \cdot \frac{DM}{MA} = 1, \frac{AS}{SN} \cdot \frac{aq + \frac{a(1+q)}{p}}{\frac{a(1+q)}{p}} \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

Откуда $\frac{AS}{SN} = \frac{p(1+q)}{pq+q+1}$.

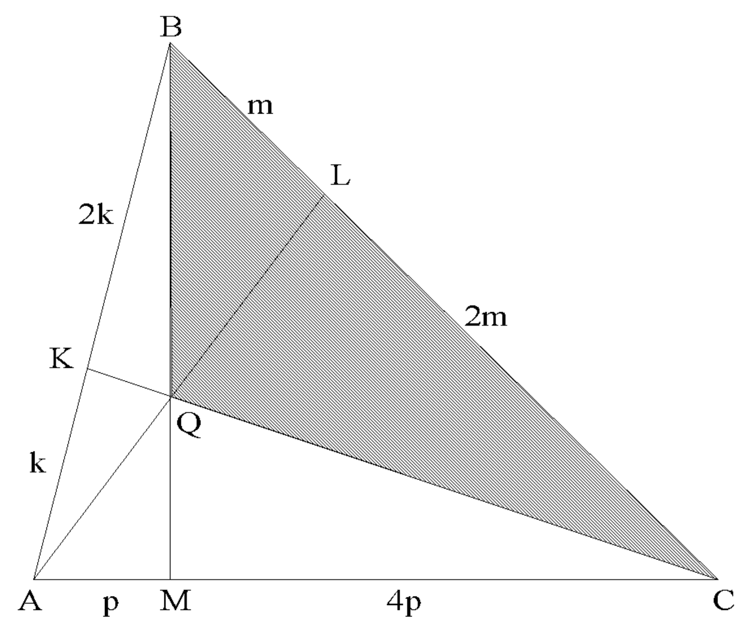
Ответ: $\frac{p(1+q)}{pq+q+1}$.

Задача 4. В треугольнике ABC точки K и L принадлежат соответственно сторонам AB и BC.

AK : BK = 1 : 2,

CL : BL = 2 : 1.

Q — точка пересечения отрезков AL и CK . $S_{\Delta BQC} = 1$. Найдите площадь треугольника ABC.



Решение.1) В треугольнике MBC прямая AL пересекает две стороны и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая:

$$\frac{BL}{LC}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MQ}{BQ}=1, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MQ}{QB}=1. \quad (1)$$

В треугольнике ABM прямая KC пересекает две стороны треугольника и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая:

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BQ}{QM}\cdot\frac{MC}{CA}=1, \qquad \frac{1}{2}\cdot\frac{BQ}{QM}\cdot\frac{MC}{CA}=1. \quad (2)$$

$$(1)\cdot(2)=\frac{1}{4}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MQ}{QB}\cdot\frac{BQ}{QM}\cdot\frac{MC}{CA}=1,$$

то есть MC = 4.p, AM = p.

2) Еще раз перепишем равенство (1): $\frac{1}{2}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MQ}{QB}=1, \frac{1}{2}\cdot\frac{CA}{AM}\cdot\frac{MQ}{QB}=1, \ \frac{MQ}{QB}=\frac{2}{5},$

то есть $MQ = 2\square, QB = 5\square.$

3) Треугольники BQC и MBC имеют общий угол, значит, $\frac{S\Delta MBC}{S\Delta BQC}=\frac{BM\cdot BC}{BQ\cdot BC}=\frac{7}{5},$

Тогда $S\Delta MBC = \frac{7}{5}\cdot 1=\frac{7}{5}$.

4) Треугольники ABC и MBC имеют равные высоты, проведенные из вершины B, значит,

$$\frac{S\Delta ABC}{S\Delta MBC} = \frac{AC}{MC} = \frac{5p}{4p} = \frac{5}{4},$$

$$S\Delta ABC = \frac{5}{4} \cdot$$

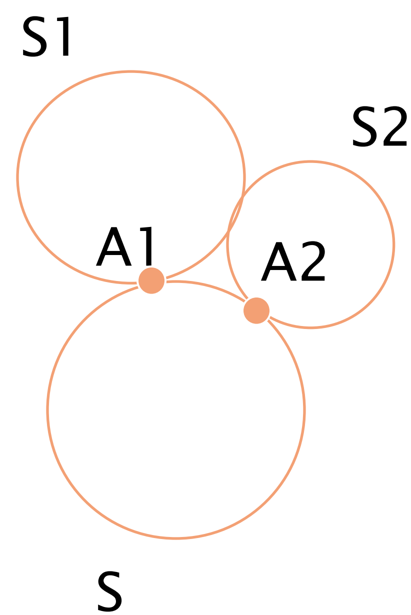
$$S\Delta MBC = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$$

Ответ: 1,75.

Задача 5.

Дано: окружность S касается окружностей S1 и S2 в точках A1 и A2.

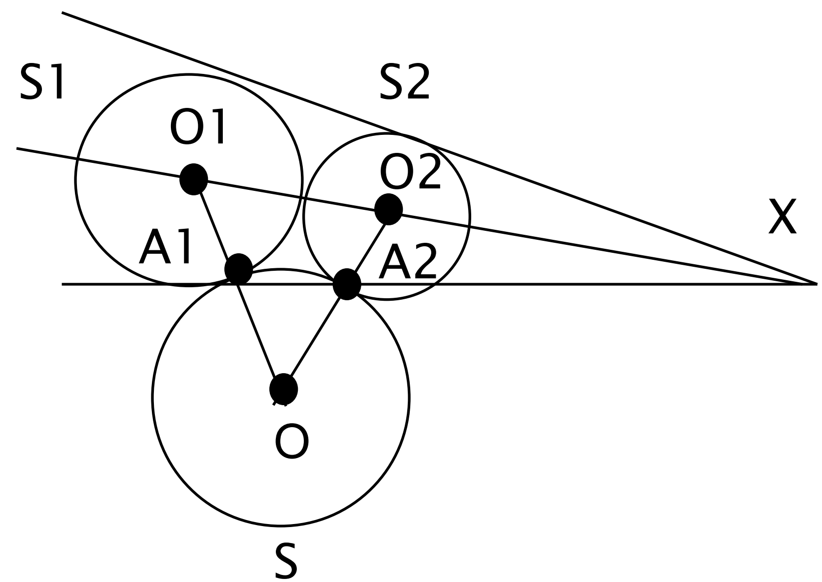
Доказать: что прямая A1A2 проходит через точку пересечения общих внутренних или внешних касательных к окружностям S1 и S2.



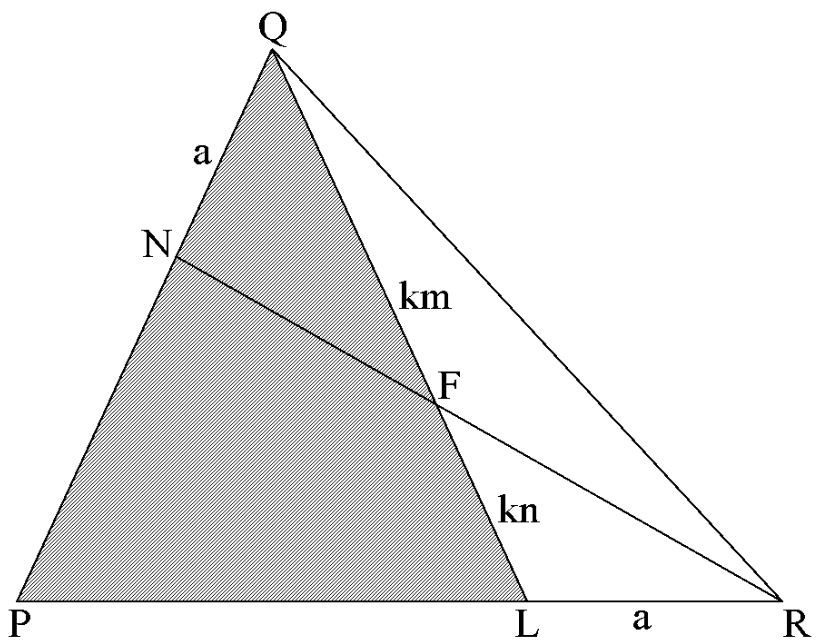
Доказательство.
Пусть O, O1 и O2 – центры окружностей S, S1 и S2; X – точка пересечения прямых O1O2 и A1A2. Применяя теорему Менелая к треугольнику OO1O2 и точкам A1, A2 и X, получаем:

$$\frac{O1X}{O2X} * \frac{O2A2}{OA2} * \frac{OA1}{O1A1} = 1$$

а значит, O1X : O2X = R1 : R2, где R1 и R2 – радиусы окружностей S1 и S2. Следовательно, X – точка пересечения общих внешних или внутренних касательных к окружностям S1 и S2.



Задача 6. На стороне PQ треугольника PQR взята точка N, а на стороне PR — точка L, причем NQ = LR. Точка пересечения отрезков QL и NR делит QL в отношении $m : n$, считая от точки Q. Найдите $\frac{PN}{PR}$.



Решение. По условию NQ=LR , $\frac{QF}{FL}=\frac{m}{n}$. Пусть NA = LR = a, QF = km, LF = kn. Прямая *NR* пересекает две стороны треугольника *PQL* и продолжение третьей. По теореме Менелая:

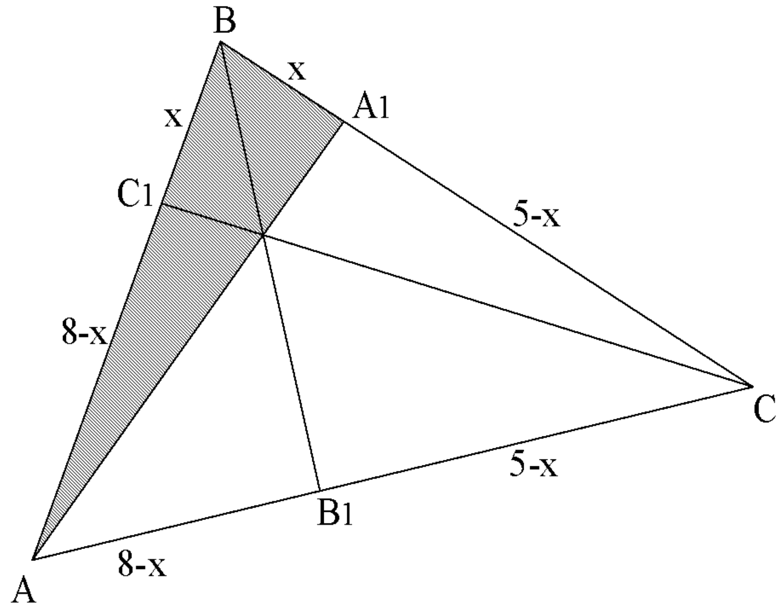
$$\frac{PN}{NQ}\cdot\frac{QF}{FL}\cdot\frac{LR}{RP}=1,$$

$$\frac{PN}{a}\cdot\frac{km}{kn}\cdot\frac{a}{PR}=1,$$

$$\frac{PN}{PR}=\frac{n}{m}.$$

Ответ: *n : m*.

Задача 7. В треугольнике *ABC,* описанном около окружности, AB = 8, BC = 5, AC =4. A_1 и C_1 — точки касания, принадлежащие соответственно сторонам BC и BA. P — точка пересечения отрезков AA_1 и $CC_{1.}$ Точка P лежит на биссектрисе BB_1 Найдите AP: PA_1.



Решение. Точка касания окружности со стороной *AC* не совпадает с B_1, так как треугольник *ABC* — разносторонний. Пусть $_{C1B} = x$, тогда, используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, введем обозначения (см. рисунок)

$$8 - x + 5 - x = 4,\ x = \frac{9}{2}$$

Значит, $C_1B = BA_1 = \frac{9}{2}$ $A_1C = 5 - \frac{9}{2} = \frac{1}{2}$

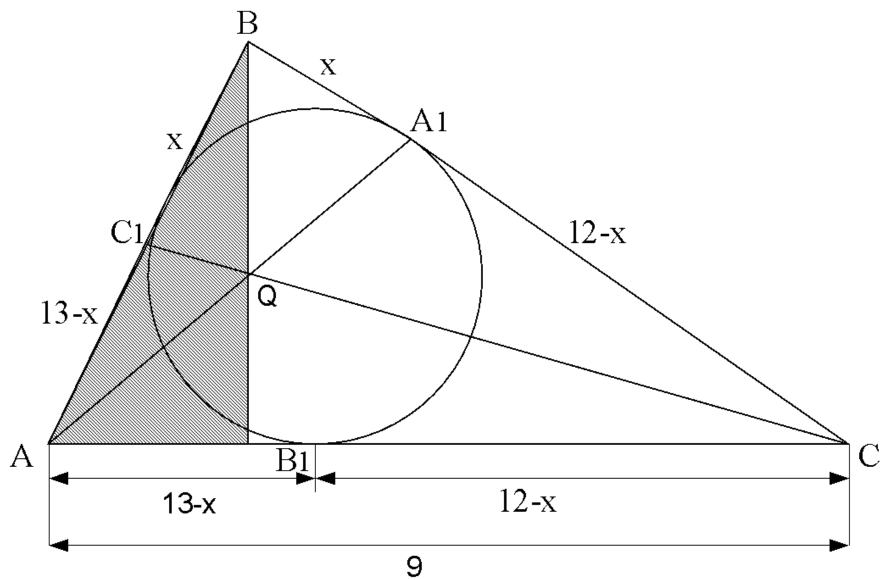
$$AC_1 = 8 - \frac{9}{2} = \frac{7}{2}$$

В треугольнике ABA_1, прямая C_1C пересекает две его стороны и продолжение третьей стороны. По теореме Менелая:

$$\frac{\frac{7}{2}}{\frac{9}{2}} \cdot \frac{5}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{A_1P}{PA} = 1, \frac{AP}{PA_1} = \frac{70}{9}$$

Ответ: 70 : 9.

Задача 8. В треугольник ABC, описанном около окружности, AB = 8, *BC* = 12, AC = 9, A_1 и C_1 — точки касания, лежащие соответственно на сторонах BC и AB. Q — точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1. Q лежит на высоте BB_1. Найдите отношение $BQ : QB_1$



Решение. Треугольник ABC — разносторонний, значит, точка B_1 не совпадает с точкой касания.

1) Пусть $C_1B = \boldsymbol{x}$**,** тогда, используя свойство касательных, проведенных к окружности из одной точки, введем обозначения (см. рисунок):

$(13 - x) + (12 - x) = 9,\ x = 8.$

Значит, $C_1B = 8$, $AC_1 = 5$.

2) По формуле Герона: $S_{\Delta ABC} = \sqrt{17(17-13)(17-12)(17-9)} = 4\sqrt{170}$

$$S\,\Delta ABC = \frac{1}{2} AC \cdot BB_1$$

$$BB_1 = \frac{2S\Delta}{AC}$$

$$BB_1 = \frac{8\sqrt{170}}{9}$$

3) Из треугольника ABB_1 (прямоугольного) по теореме Пифагора :

$$AB_1 = \sqrt{13^2 - \frac{64 \cdot 170}{81}} = \frac{53}{9}.$$

4) В треугольнике ABB_1 прямая CC_1 пересекает две его стороны и продолжение третьей. По теореме Менелая:

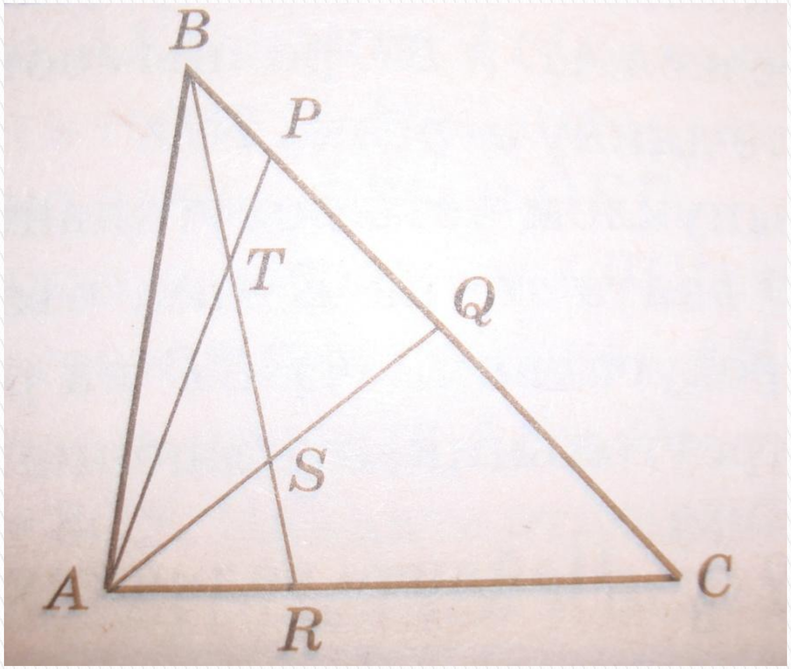
$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{B_1C}{CA} = 1, \qquad \frac{5}{8} \cdot \frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{9 - \frac{53}{9}}{9} = 1,$$

$$\frac{BQ}{QB_1} \cdot \frac{5}{8} \cdot \frac{81-53}{81} = 1,$$

$$\frac{BQ}{QB_1} = \frac{162}{35}.$$

Ответ: 162 : 35.

Задача 9. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что BP : PQ : QC = 1 : 2 : 3. Точка R делит сторону AC этого треугольника таким образом, что AR : RC = 1 : 2. Чему равно отношение площади четырехугольника PQST к площади треугольника ABC, где S и T - точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно.



Решение. Обозначим BP = x, AR = y; тогда PQ = 2x, QC = 3x, RC = 2y. Вычислим, какую часть площадь четырехугольника PQST составляет от площади треугольника APQ, а значит, и от площади треугольника ABC. Для этого нам понадобятся отношения, в которых точки S и T делят прямые AQ и AP соответственно. Применим к треугольнику ACQ и секущей SR теорему Менелая:

$$\frac{CR}{RA} \times \frac{AS}{SQ} \times \frac{QB}{BC} = 1 \leftrightarrow \frac{AS}{SQ} = 1 \leftrightarrow \frac{AS}{AQ} = \frac{1}{2}$$

Аналогично, применив теорему Менелая к треугольнику ACP и секущей TR, получим:

$$\frac{CR}{RA} \times \frac{AT}{TP} \times \frac{PB}{BC} = 1 \leftrightarrow \frac{AT}{TP} = 3 \leftrightarrow \frac{AT}{AP} = \frac{3}{4}$$

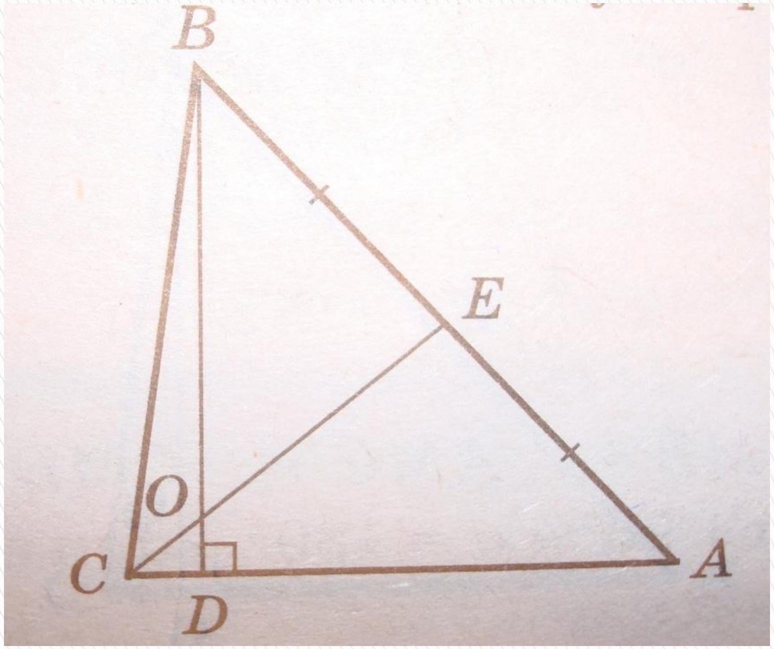
Далее: $$\frac{S\,\Delta AST}{S\,\Delta APQ} = \frac{AS}{AQ} = \frac{AT}{AP} = \frac{3}{8} \leftrightarrow \frac{S\,PQST}{S\,\Delta APQ} = \frac{5}{8}$$

С другой стороны, применив лемму о площадях к треугольникам APQ и ABC, получим, что

$$\frac{S\,\Delta APQ}{S\,\Delta ABC} = \frac{PQ}{BC} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{S\,PQST}{S\,\Delta ABC} = \frac{S\,PQST}{S\,\Delta\,APQ} = \frac{S\,\Delta APQ}{S\,\Delta\,ABC} \equiv \frac{5}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{24}$$

Ответ: $\frac{5}{24}$.

Задача 10. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6, длина медианы CE равна 5, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равно 1. Найти длину стороны AB.



Решение. Пусть точка O – точка пересечения прямых BD и CE. Расстояние от точки O до середины AC(равное по условию единице) есть длина отрезка OD. Итак, OD = 1 и OB = 5. Применим к треугольнику ABD и секущей OE теорему Менелая:

$$\frac{AE}{EB} \times \frac{BO}{OD} \times \frac{DC}{CA} = 1 \leftrightarrow \frac{DC}{CA} = \frac{1}{5} \leftrightarrow \frac{AD}{DC} = 4$$

Применив теперь теорему Менелая к треугольнику ACE и секущей OD, получим, что

$$\frac{AD}{DC} \times \frac{CO}{OE} \times \frac{EB}{BA} = 1 \leftrightarrow \frac{CO}{OE} = \frac{1}{2}$$

откуда OE = 2CO, и с учетом OE + CO = CE = 5 получаем, что CO = $\frac{5}{3}$. К прямоугольному треугольнику COD применим теорему Пифагора:

$$CD = \sqrt{OC^2 - OD^2} = \sqrt{\frac{25}{9} - 1} = \frac{4}{3}$$

Значит, AD = 4CD = $\frac{16}{3}$ Наконец, рассмотрим прямоугольный треугольник ABD, в нем также воспользуемся теоремой Пифагора:

$$AB = \sqrt{AD^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{256}{9} + 36} = \frac{2\sqrt{145}}{3}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{145}}{3}$.

Дополнительные задачи

1. В треугольнике ABC отрезки АД и ВМ, проведенные из вершин А и В соответственно к сторонам ВС и ФС, пересекаясь в точке Р, делятся в отношении АР:РД =3:2 и ВР:РМ=4:5. В каком отношении точки Д и М делят стороны треугольника, считая от С?
2. В треугольнике ABC точка Д делит сторону ВС в отношении ВД: ДС=3:4. Точка М делит сторону АС в отношении АМ:МС=2:5. Отрезки АД и ВМ пересекаются в точке К. Найдите площадь треугольника АКМ, если площадь треугольника ВКД равна 45.
3. В треугольнике ABC точка К делит сторону АВ в отношении АК: КВ=1:2, а точка Р делит сторону ВС в отношении СР:РВ=2:1. Прямые АР и СК пересекаются в точке М. Найдите площадь треугольника ABC, если площадь треугольника ВМС равна 4.

1. Прямая КР делит сторону АВ треугольника АВС в отношении АК: КВ=2:1, а сторону ВС - в отношении ВР:РС=3:1. Медиана ВВ1 пересекает прямую КР в точке М. При этом площадь четырехугольника В1МРС равна 17. Найдите площадь треугольника АВС.
2. В треугольнике АВС на основании АС взяты точки Р и Т, так что АР < АТ. Прямые ВР и ВТ делят медиану АМ на три равные части. Найдите АС, если РТ=3.
3. В треугольнике АВС площади 18 проведены отрезки ВМ и АК, причем точки М и К делят соответственно стороны АС и ВС в отношении АМ:МС=3:4 и ВК:КС=2:7. Найдите площадь четырехугольника СМРК, где Р – точка пересечения отрезков ВМ и АК.
4. На сторонах треугольника АВС взяты точки М, К и Р такие, что АМ:МВ=ВК:КС=СР:РА=2:1. Отрезки СМ и ВР пересекаются в точке А1, АК и СМ - в точке В1, АК и ВР – в точке С1. Найдите площадь треугольника АВС, если площадь треугольника А1В1С1 равна 1.

Заключение

Теорема Менелая проста в понимании. Но трудности, связанные с освоением этих теорем, оправданы их применением при решении задач.

Решение задач с помощью теоремы Менелая более рационально, чем их решение другими способами, например векторным, которое требует дополнительных действий.

Я считаю, что такие теоремы должны быть включены в основной курс геометрии 7-х-9-х классов, так как решение задач с помощью этих теорем развивает мышление и логику учеников.

Теорема Менелая помогает быстро и оригинально решить задачи повышенной сложности, в том числе и задачи уровня С единого государственного экзамена.

Список литературы

1. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. М.: Аванта +, 2002
2. В.В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Часть I.
3. Володурин В.С. и др. Пособие по элементарной геометрии. Учебное пособие для студентов физико-математических специальностей педвузов. — Оренбург, 1991.
4. Шарыгин И.Ф. Геометрия. Задачник.9—11 классы. — М.: Дрофа, 1996.
5. Б .Орач .Теорема Менелая. Квант № 3, 1991.

Спасибо за внимание!