

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

«Три пути ведут к знанию:

путь размышления - это путь самый

благородный,

путь подражания - это путь самый лёгкий,

и путь опыта - это путь самый горький»

Конфуций

ВЕРНО ЛИ, ЧТО

- ... существует такое число t , что $\sin t = -0,8$, $\cos t = 0,6$;
- ... косинус положительного аргумента может принимать отрицательные значения;
- ... уравнение $\cos x = \pi$ имеет множество корней;
- ... значение выражения $(\cos x - \sin x)^2 + 2\sin x \cos x$ не зависит от значения x ;
- ... $\operatorname{tg} 3 > 0$;
- ... корни уравнения $\sin x = a$ имеют вид:
 $x = \pm \arcsin a + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
- ... $\cos(-x) = -\cos x$;
- ... $\sin 150^\circ = 0,5$, а $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- ... $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$;
- ... уравнение $\sin x = 1$ - особенное?

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

A1. Найдите $\cos 2a$, если $\sin a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\pi < a < 3\pi/2$.

- 1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) -0,5 4) 0,5

A2. Найдите значение выражения

$$\cos(\alpha - \beta) - 2 \sin \alpha \sin \beta \quad \text{если } \alpha = 46^\circ, \quad \beta = 74^\circ.$$

- 1) -0,5 2) 0,5 3) 1 4) -1

A3. Укажите наименьшее значение выражения $1,5 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 3,5$

- 1) 2 2) 1 3) 2,5 4) -1

B1. Вычислите

$$\frac{2 \sin 31^\circ \cos 31^\circ}{\sin 38^\circ \sin 66^\circ + \cos 38^\circ \sin 24^\circ}$$

Ответ: 1.

A1. Найдите $\cos a$, если $\sin a = \frac{12}{13}$ и a - угол II четверти.

1) $\frac{5}{13}$

2) $-\frac{5}{13}$

3) $\frac{1}{13}$

4) $-\frac{5}{12}$

A2. Найдите значение выражения $2\sin 15^\circ(\cos 10^\circ \cos 5^\circ - \sin 10^\circ \sin 5^\circ)$

1) 1

2) 2

3) 0,25

4) 0,5

A3. Найдите наибольшее значение выражения $3 \cos(2x - \frac{\pi}{4}) - 2,5$

1) 3

2) 0,5

3) 5,5

4) $-0,5$

B1. Найдите значение выражения $6\sqrt{2} \operatorname{tg} a \cos^2(\pi - a)$, если $\sin 2a = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Ответ: 2.

B1. Решение:

$$\begin{aligned} & \frac{2 \sin 31^\circ \cos 31^\circ}{\sin 38^\circ \sin 66^\circ + \cos 38^\circ \sin 24^\circ} = \\ & = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 38^\circ \sin(90^\circ - 24^\circ) + \cos 38^\circ \sin 24^\circ} = \\ & = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 38^\circ \cos 24^\circ + \cos 38^\circ \sin 24^\circ} = \\ & = \frac{\sin 62^\circ}{\sin(38^\circ + 24^\circ)} = \frac{\sin 62^\circ}{\sin 62^\circ} = 1 \end{aligned}$$

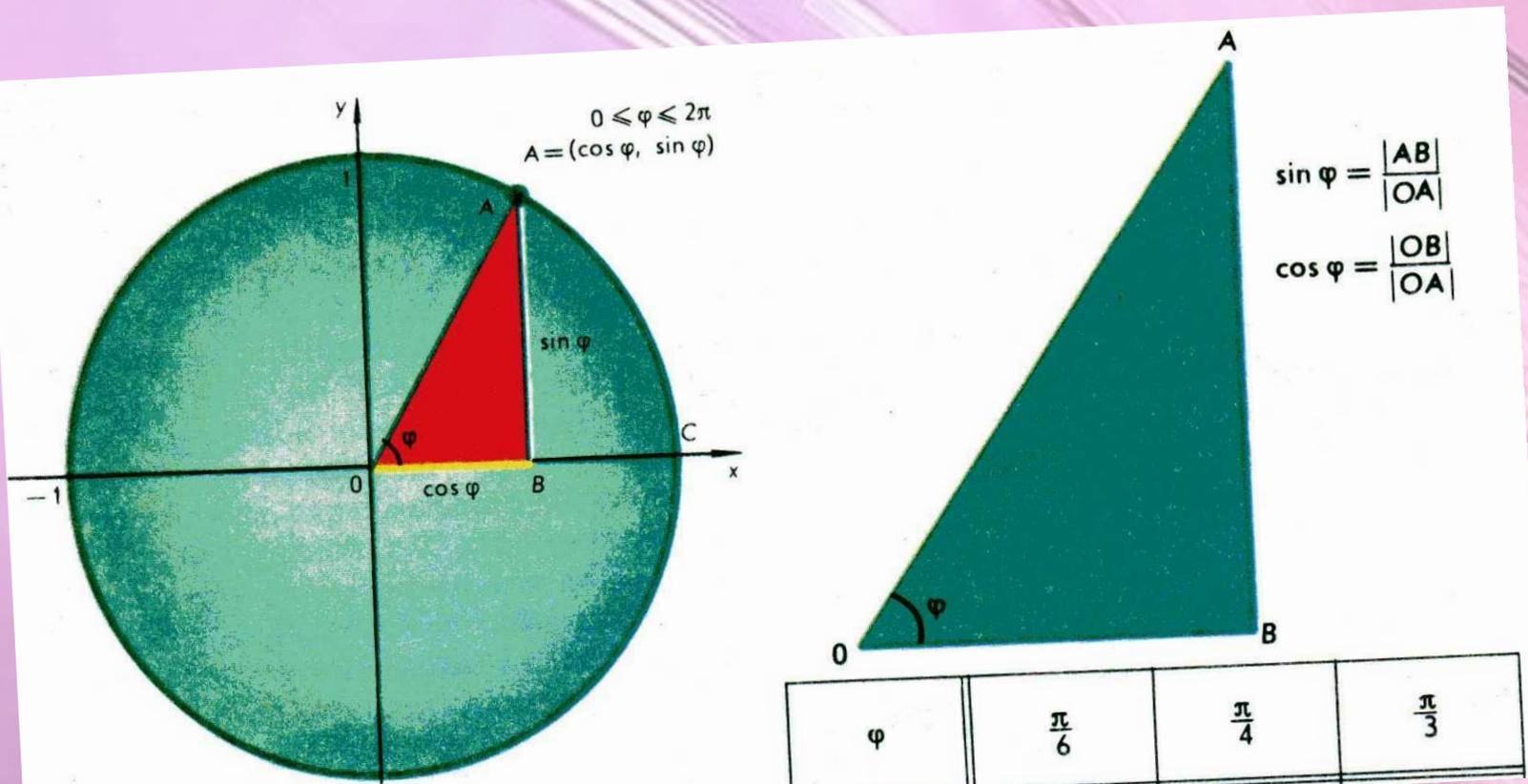
B1. Решение:

$$\begin{aligned} 6\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha \cos^2(\pi - \alpha) &= 6\sqrt{2} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha = \\ &= 3\sqrt{2} \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 3\sqrt{2} \sin 2\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = 2 \end{aligned}$$

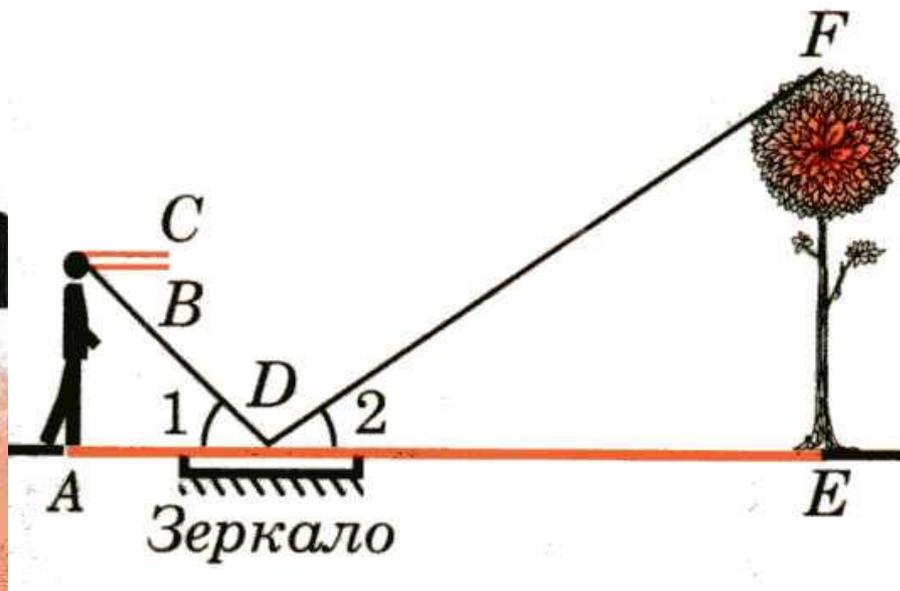
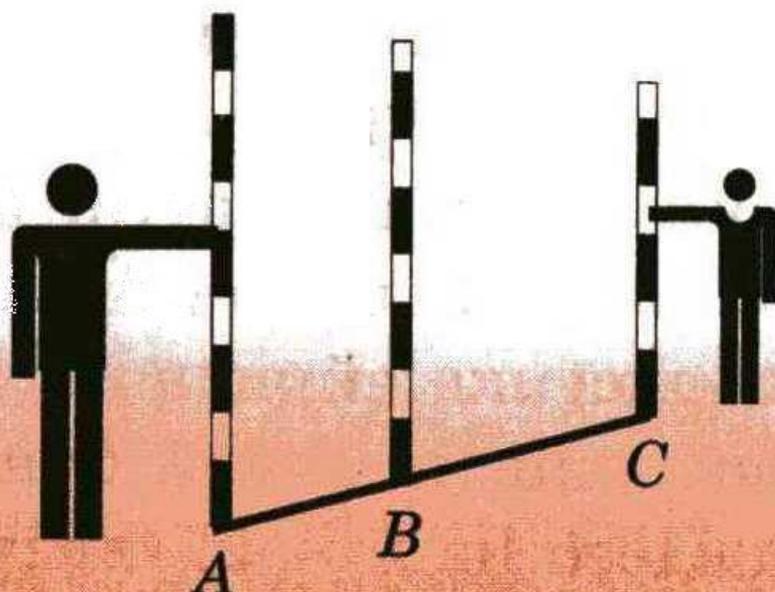
История возникновения тригонометрии

Презентацию подготовил ученик 10Б класса
Царегородский Александр

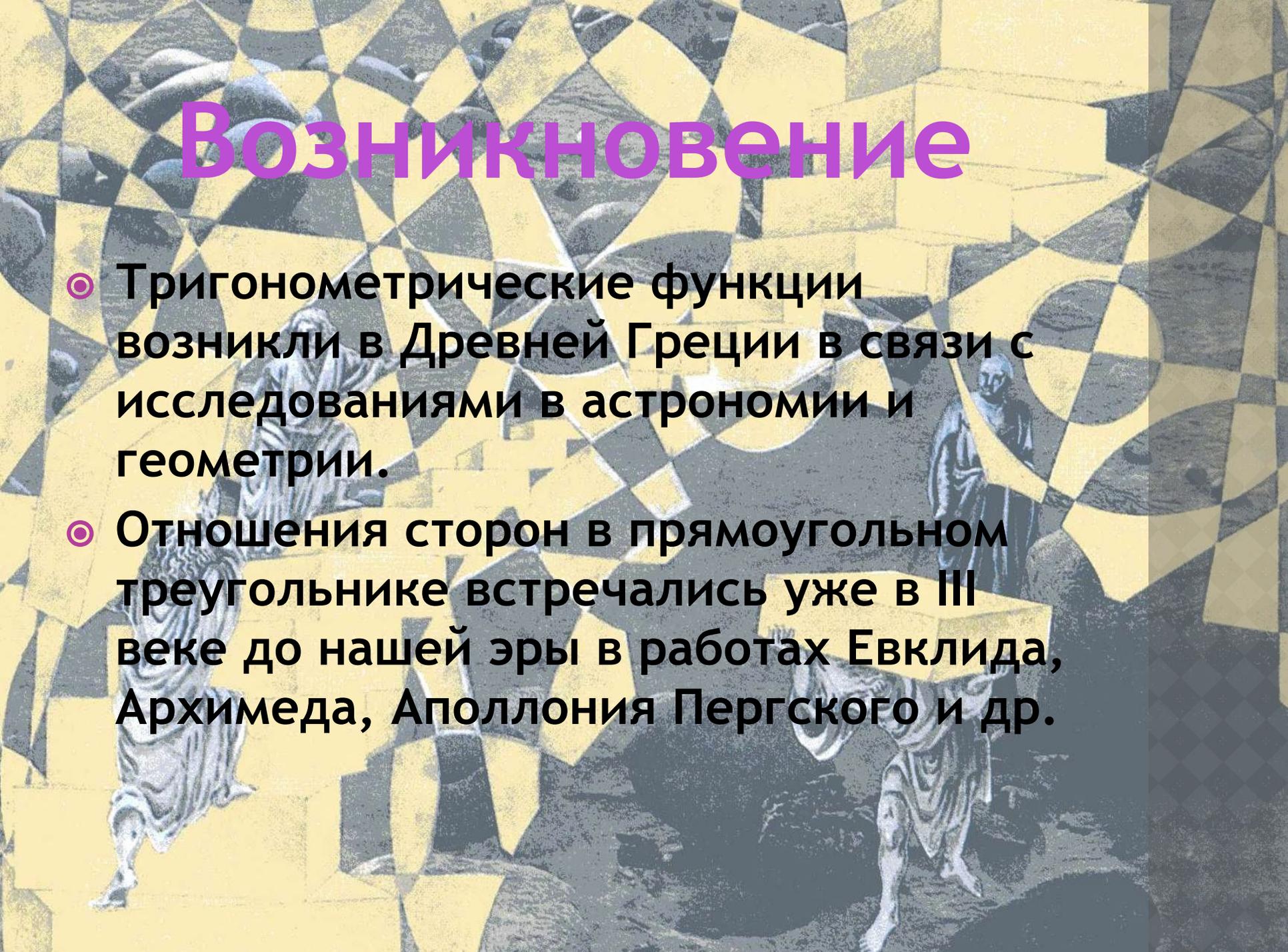
- Тригонометрия - математическая дисциплина, изучающая зависимость между сторонами и углами треугольника.
- Trigonon - «треугольник» и metreo - «измеряю».



- Тригонометрия возникла из практических нужд человека. С её помощью можно определять расстояние до недоступных предметов и существенно упрощать процесс геодезической съёмки местности для составления географических карт



Возникновение



- Тригонометрические функции возникли в Древней Греции в связи с исследованиями в астрономии и геометрии.
- Отношения сторон в прямоугольном треугольнике встречались уже в III веке до нашей эры в работах Евклида, Архимеда, Аполлония Пергского и др.

- Древнегреческий астроном Птолемей (II в.) вывел соотношения между хордами в круге, которые равносильны формулам:

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$



○ Также важный шаг в развитии тригонометрии был сделан индийскими учёными, которые заменили хорды синусами. Благодаря этому новшеству тригонометрия постепенно превратилась из раздела астрономии в самостоятельную математическую дисциплину. Помимо синуса были введены и другие тригонометрические функции, и для них были составлены таблицы.

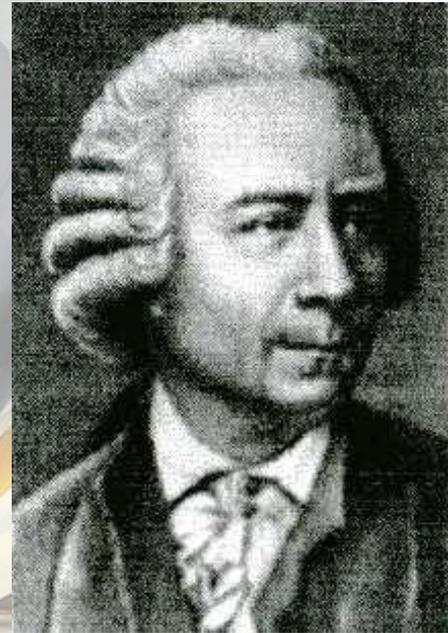


- Современную форму теории тригонометрических функций и вообще тригонометрии придал Л. Эйлер Он ввёл в математику привычные нам формулы тригонометрии на плоскости:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

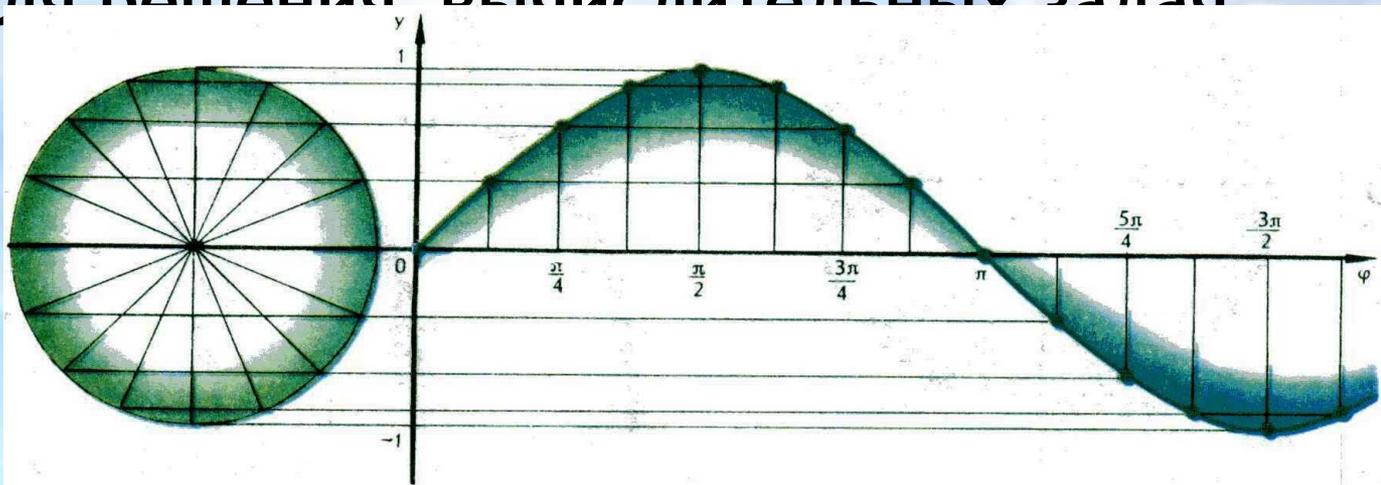
$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

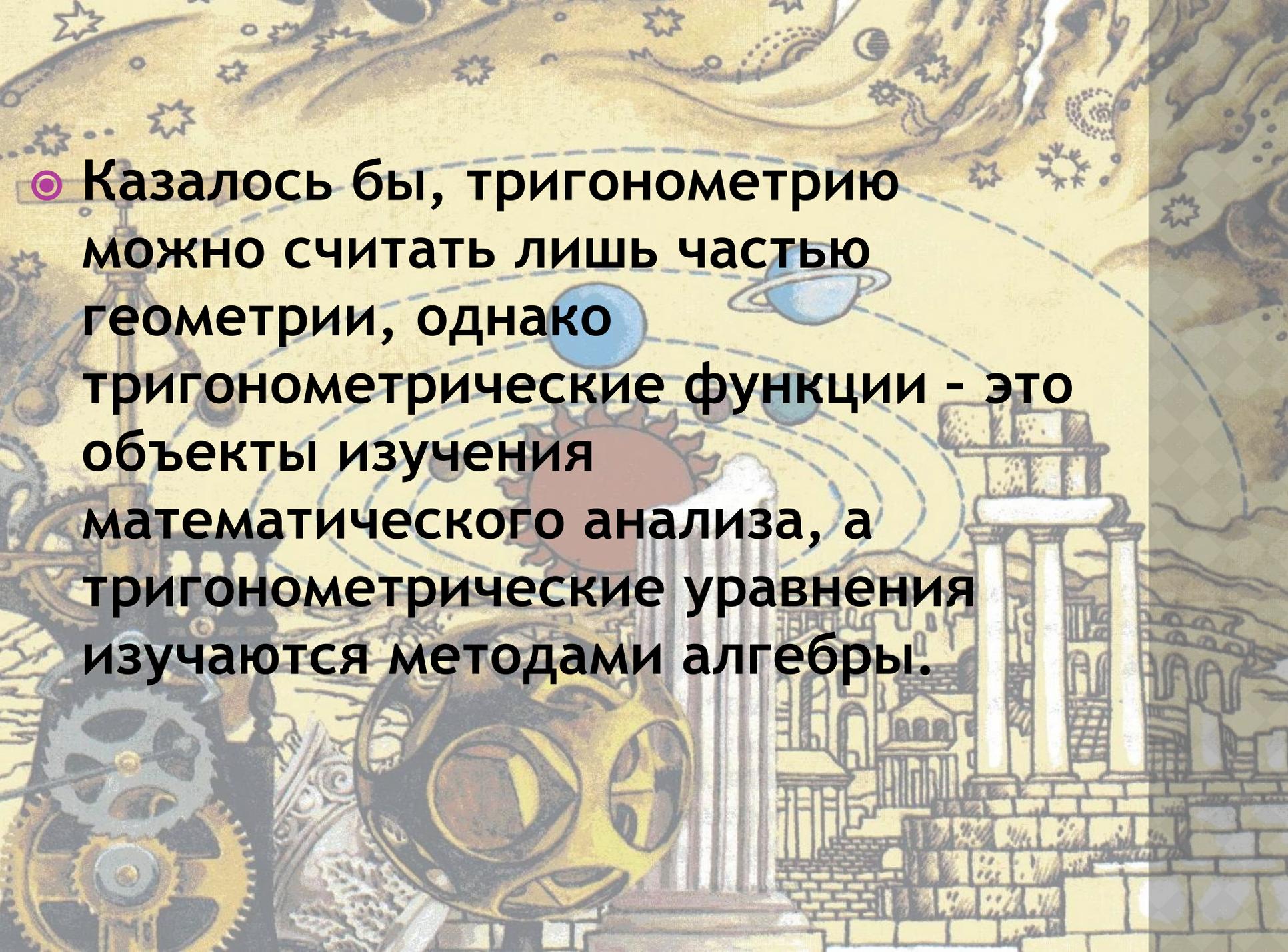
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$



- Тригонометрию в средней школе изучают до сих пор по Эйлеру.

- **Общепринятые понятия тригонометрии, а также обозначения и определения тригонометрических функций сформировались в процессе долгого исторического развития. Благодаря введению новых понятий, а также в результате разработки и усовершенствования математической символики, тригонометрия приобрела совершенный вид, наиболее удобный для решения вычислительных задач.**





○ Казалось бы, тригонометрию можно считать лишь частью геометрии, однако тригонометрические функции - это объекты изучения математического анализа, а тригонометрические уравнения изучаются методами алгебры.

Использованная литература

- Энциклопедический словарь юного математика/Сост. А.П.Савин.-М.: Педагогика, 1989.
- Интернет-ресурсы.

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Задание	Алгоритм решения	Базовые знания	Конкретные шаги решения
<p>Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0,5$</p>	<p>Применим формулу синуса разности.</p> <p>Воспользуемся формулой корней уравнения $\sin x = a$.</p>	<p>$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$</p> <p>$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$ $n \in \mathbb{Z}$</p>	<p>$\sin 3x \cos 5x - \cos 3x \sin 5x = 0,5$</p> <p>$\sin(3x - 5x) = 0,5$ $\sin 2x = -0,5$</p> <p>$2x = (-1)^n(-\pi/6) + \pi n$ $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ $n \in \mathbb{Z}$</p> <p>При $n = 0$ $x = -\frac{\pi}{12}$</p> <p>Ответ: $-\frac{\pi}{12}$</p>

Задание

Алгоритм решения

Базовые знания

Конкретные шаги решения

Найдите сумму наибольшего отрицательного и наименьшего положительного корня уравнения $\sin 2x \cos 2x = -0,5$

Умножим обе части уравнения на 2.

Воспользуемся формулой синуса двойного аргумента.

Применим формулу корней уравнения $\sin x = -1$.

Найдём наибольший отрицательный корень и наименьший положительный корень уравнения.

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x \cos 2x = -0,5$$

$$2 \sin 2x \cos 2x = -1$$

$$\sin 4x = -1$$

$$4x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{При } n = 0 \quad x = -\frac{\pi}{8}$$

$$\text{При } n = 1 \quad x = \frac{3\pi}{8}$$

$$-\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{4}$$

Задание

Алгоритм решения

Базовые знания

Конкретные шаги решения

Сколько корней уравнения $\sin 2x + \sin 6x = 0$ принадлежат промежутку $[-180^\circ; 180^\circ]$?

Применим формулу суммы синусов

Воспользуемся условием равенства произведения 0 и формулами корней уравнений $\sin x = 0$; $\cos x = 0$

Оценим корни уравнения

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= \\ &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

$$x = \pi n, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} \sin 2x \sin 6x &= 0 \\ 2 \sin 4x \cos 2x &= 0 \end{aligned}$$

$$\sin 4x = 0 \quad \cos 2x = 0$$

$$\begin{cases} 4x = \pi n \\ 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi n}{4} \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \end{cases}$$

$$x =$$

$$n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$-\pi \leq \frac{\pi n}{4} \leq \pi$$

$$-4 \leq n \leq 4$$

Ответ: 9 корней.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- Пособие «Математика ЕГЭ - 2009, часть I»
стр. 204, В - №3, задания 1,2,3,6 - уровень А,
задания 1 - 8 - уровень В,
задачник - № 27.56 а), 28.33 а) - уровень С.

«Три пути ведут к знанию:
путь размышления - это путь самый
благородный,
путь подражания - это путь самый лёгкий,
и путь опыта - это путь самый горький»
Конфуций