

Решение задач с1 3-мя способами

Сделали:
Фищук Е.А
Морозова А.И
Андрюшина К.С
Балмаков А.И

Задача

- В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, найдите расстояние от точки A до прямой BD_1

Способ №1
Поэтапно-вычислительный метод

В единичном кубе $ABCA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние от точки A до BD_1

Решение:

1)Проведем AH перпендикулярно BD_1 ; AH искомое расстояние

2)Найдём AD_1 из квадрата AA_1D_1D ;

AD_1 -диагональ квадрата, $AD_1 = \sqrt{2}$

3)Найдём BD_1 ; BD_1 -диагональ куба, $BD_1 = \sqrt{3}$, т.к $d = a\sqrt{3}$, где a -ребро, а d -диагональ.

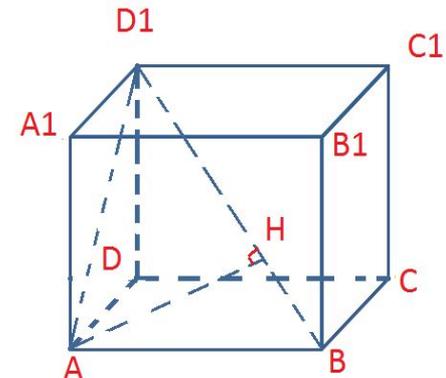
4)Из треугольника AD_1B -прямоугольный, $\sin(\text{угл.})AD_1B = AB/BD_1$

5)Из треугольника AHD_1 -прямоугольный, $\sin(\text{угл.})AD_1H = AH/AD_1$

$$\Rightarrow (\text{угл.})AD_1B = (\text{угл.})AD_1H$$

значит $\sin(\text{угл.})AD_1B = \sin(\text{угл.})AD_1H$

$$AB/BD_1 = AH/AD_1 \Rightarrow AH = (AD_1 * AB) / BD_1 = \sqrt{2} / \sqrt{3} = \sqrt{6} / 3.$$



Способ №2
Координатный метод

1) Введём прямоугольную систему координат с началом в точке D.

2) $A(1;0;0), B(1;1;0), D_1(0;0;1)$

3) Найдём $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

$$AB = \sqrt{0 + 1 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

$$AD_1 = \sqrt{1 + 0 + 1} = \sqrt{2}$$

$$BD = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

4) AH перпендикулярно BD, треугольника ABH-прямоугольный

$$\sin(\text{угл.})B = AH/AB$$

$$AH = AB * \sin(\text{угл.})B$$

5) То т. косинуса из треугольника AD₁B:

$$AD^2 = (BD_1)^2 + (AB)^2 - 2AB * BD_1 * \cos(\text{угл.})B$$

$$2 = 3 + 1 - 2 * 1 * \sqrt{3} * \cos(\text{угл.})B$$

$$2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos(\text{угл.})B$$

$$2\sqrt{3} \cos(\text{угл.})B = 2$$

$$\cos(\text{угл.})B = 2/2\sqrt{3}$$

$$\cos(\text{угл.})B = 1/\sqrt{3}$$

6) Из основного тригонометрического тождества

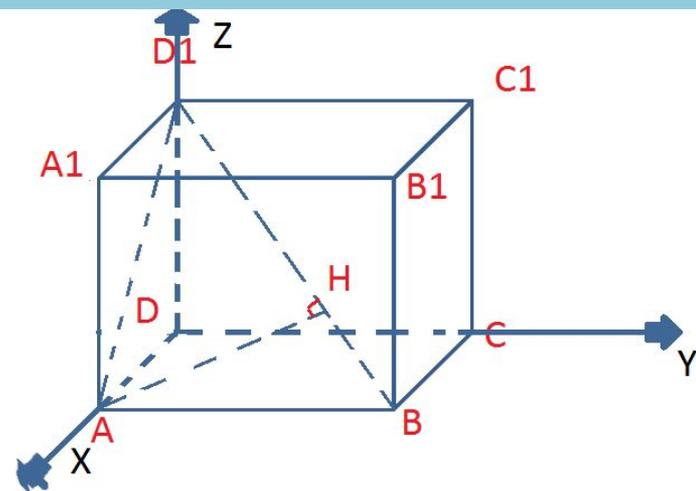
$$\sin^2(\text{угл.})B + \cos^2(\text{угл.})B = 1$$

$$\sin(\text{угл.})B = \sqrt{1 - 1/3}$$

$$\sin(\text{угл.})B = \sqrt{2/3}$$

$$7) AH = \sqrt{2/3}$$

$$AH = \sqrt{6}/3$$



Способ №3 векторный метод

- 1) \vec{BD}_1 -направляющий вектор прямой BD_1
- 2) AH перпендикулярно BD_1
- 3) $AH = AB + BH$
- 4) BH сонаправлен BD_1 ; $BH = k\vec{BD}_1$
- 5) $AH = AB + k\vec{BD}_1$
- 6) Так как AH перпендикулярно BD_1 , то $AH \cdot \vec{BD}_1 = 0$, т.е. $(AB + k\vec{BD}_1) \cdot \vec{BD}_1 = 0, AB \cdot \vec{BD}_1 + (k\vec{BD}_1) \cdot (k\vec{BD}_1) = 0$
- 7) $\vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AA}_1$ -базисные
- 8) По правилу параллелепипеда :
 - $\vec{BD}_1 = \vec{BC} + \vec{BA} + \vec{BB}_1$
 - $\vec{BD}_1 = \vec{AD} - \vec{AB} + \vec{BB}_1$
- 9) $AB \cdot \vec{BD}_1 + (k\vec{BD}_1) \cdot (k\vec{BD}_1) = 0$
- $AB(\vec{AD} - \vec{AB} + \vec{BB}_1) + k(\vec{AD} - \vec{AB} + \vec{BB}_1) \cdot (\vec{AD} - \vec{AB} + \vec{BB}_1) = 0$
- $AB \cdot \vec{AD} - AB \cdot \vec{AB} + AB \cdot \vec{BB}_1 + k(\vec{AD} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{BB}_1 \cdot \vec{BB}_1 + 2\vec{AD} \cdot \vec{BB}_1 - 2\vec{AD} \cdot \vec{AB} - 2\vec{AB} \cdot \vec{BB}_1) = 0$
- $0 - AB \cdot \vec{AB} + 0 + k(\vec{AD} \cdot \vec{AD} + \vec{AB} \cdot \vec{AB} + \vec{BB}_1 \cdot \vec{BB}_1 + 0) = 0$
- $-1 + 3k = 0$
- $k = 1/3$
- 10) $AH = AB + 1/3(\vec{AD} - \vec{AB} + \vec{BB}_1)$
- $AH = 2/3\vec{AB} + 1/3\vec{AD} + 1/3\vec{BB}_1$
- $|AH| = \sqrt{AH \cdot AH}$
- $AH \cdot AH = (2/3\vec{AB} + 1/3\vec{AD} + 1/3\vec{BB}_1) \cdot (2/3\vec{AB} + 1/3\vec{AD} + 1/3\vec{BB}_1) = 4/9\vec{AB} \cdot \vec{AB} + 2/9\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2/9\vec{AB} \cdot \vec{BB}_1 + 2/9\vec{AD} \cdot \vec{AB} + 1/9\vec{AD} \cdot \vec{AD} + 1/9\vec{AB} \cdot \vec{BB}_1 + 2/9\vec{AB} \cdot \vec{BB}_1 + 1/9\vec{BB}_1 \cdot \vec{BB}_1 = 4/9\vec{AB} \cdot \vec{AB} + 1/9\vec{AD} \cdot \vec{AD} + 1/9\vec{BB}_1 \cdot \vec{BB}_1 = 4/9 + 1/9 + 1/9 = 6/9 = 2/3$
- $|AH| = \sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$

