

Биссектрисы параллелограмма

Автор **Колобова Надежда**
ученица 8 класса
Чернцкой МСОШ
Руководитель
Никитина Г. И.
учитель математики

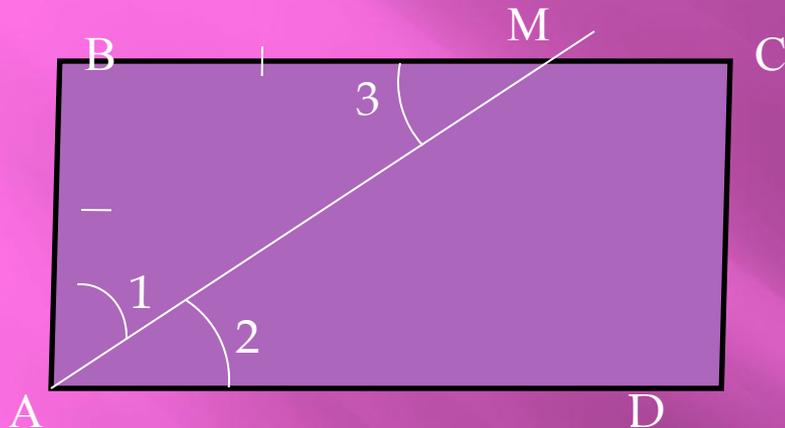
Цель работы:

Рассмотрение свойств биссектрис параллелограмма

Задачи:

1. Сформулировать и доказать свойства биссектрис углов параллелограмма
2. Составить задачи на применение свойств биссектрис параллелограмма
3. Решение задач по данной теме на экзамене по геометрии в 9 классе и ЕГЭ
4. Составление тестовой работы по теме

Биссектриса угла параллелограмма отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник



Дано:

ABCD - параллелограмм

AM – биссектриса $\angle A$

Доказать:

$\triangle ABM$ – равнобедренный.

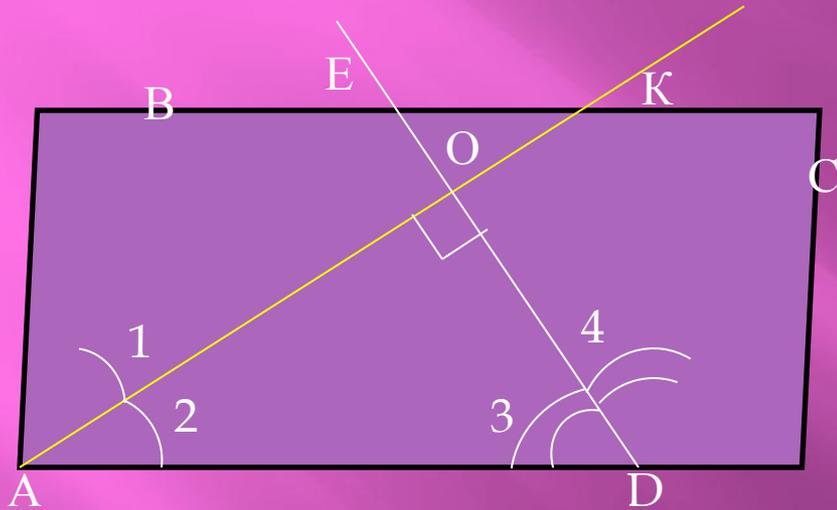
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

Т.К. AM – БИСЕКТРИСА УГЛА A, ТО $\angle 1 = \angle 2$.

Т.К. ABCD – ПАРАЛЛЕЛОГРАММ, ТО AD // BC, ЗНАЧИТ $\angle 2 = \angle 3$ КАК ВНУТРЕННИЕ НАКРЕСТ ЛЕЖАЩИЕ УГЛЫ ДЛЯ СЕКУЩЕЙ AM.

ЗНАЧИТ, $\angle 1 = \angle 3$, ТОГДА $\triangle ABM$ – РАВНОБЕДРЕННЫЙ.

Биссектрисы смежных углов параллелограмма пересекаются под прямым углом



Дано:

ABCD – параллелограмм

AK и DE – биссектрисы

Доказать:

$\angle AOD$ - прямой

Доказательство:

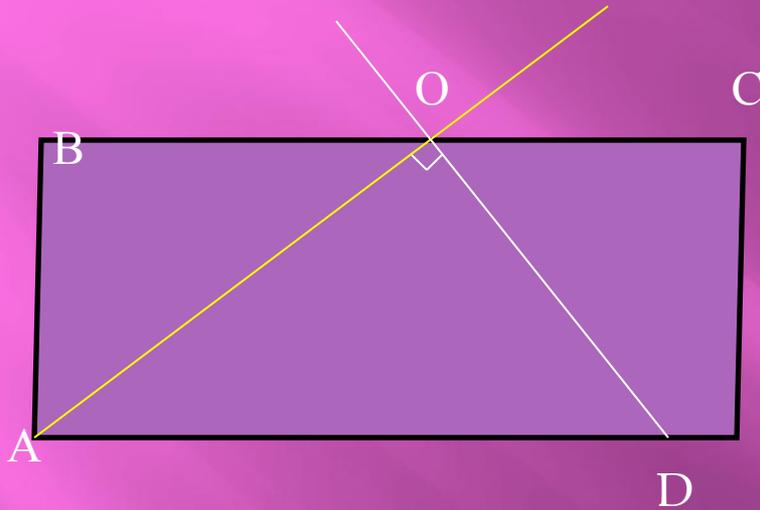
Рассмотрим $\triangle AOD$: $\angle 1 = \angle 2 = \frac{1}{2} \angle A$, $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle D$ (по свойству биссектрис)

$\angle A + \angle D = 180^\circ$ (сумма соседних углов).

$\angle 2 + \angle 3 = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle D = \frac{1}{2} (\angle A + \angle D) = \frac{1}{2} * 180^\circ = 90^\circ$

Значит, $\angle AOD$ - прямой .

Биссектрисы соседних углов пересекаются на большей стороне параллелограмма, если она в 2 раза больше смежной стороны



Дано:

ABCD – параллелограмм

AO и DO – биссектрисы

$O \in BC$

Доказать:

BC в 2 раза больше AB.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

РАССМОТРИМ $\triangle ABO$. ОН РАВНОБЕДРЕННЫЙ (ПО СВОЙСТВУ БИСSEKТРИСЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА): $AB = BO$.

РАССМОТРИМ $\triangle CDO$. ОН РАВНОБЕДРЕННЫЙ (ПО СВОЙСТВУ БИСSEKТРИСЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА): $CD = CO$.

Т.К. $CD = AB$ (ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СТОРОНЫ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА), ТО $BO = CO$. Т.К. $AB = BO$, А $BO = CO$, ЗНАЧИТ $AB = \frac{1}{2} BC$, Т.Е. BC В 2 РАЗА БОЛЬШЕ AB.

Из предыдущего доказательства можно сделать ещё два вывода:

БИСSEКТРИСЫ
ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
ПЕРЕСЕКУТСЯ ВНУТРИ
ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ЕСЛИ
МЕНЬШАЯ СТОРОНА БОЛЬШЕ
ПОЛОВИНЫ СОСЕДНЕЙ
СТОРОНЫ (РИС. 1)

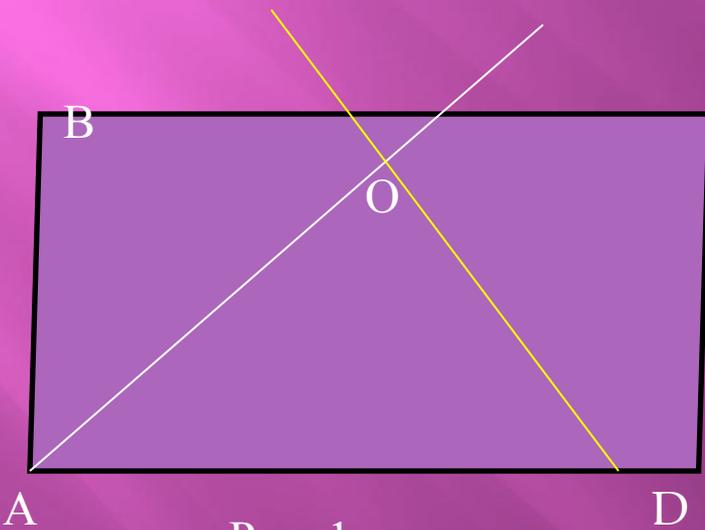


Рис. 1

БИСSEКТРИСЫ СОСЕДНИХ
УГЛОВ В ПАРАЛЛЕЛОГРАММЕ
ПЕРЕСЕКУТСЯ ВНЕ
ПАРАЛЛЕЛОГРАММА, ЕСЛИ
МЕНЬШАЯ СТОРОНА МЕНЬШЕ
ПОЛОВИНЫ СОСЕДНЕЙ
СТОРОНЫ (РИС. 2)

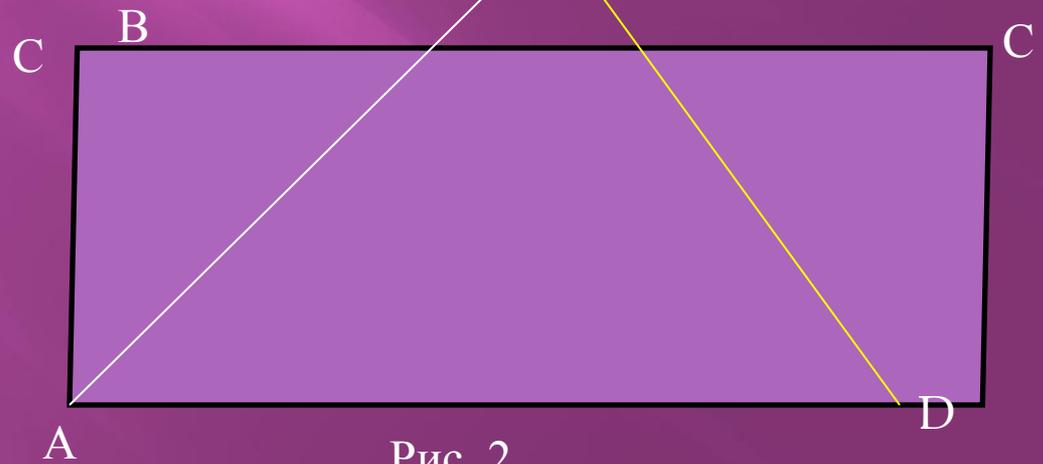
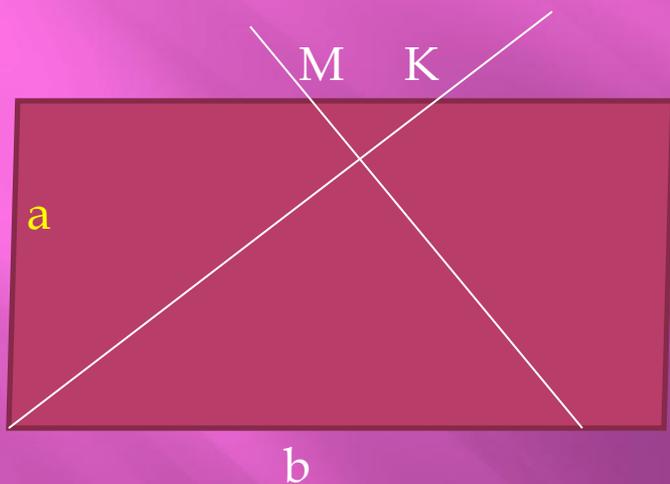
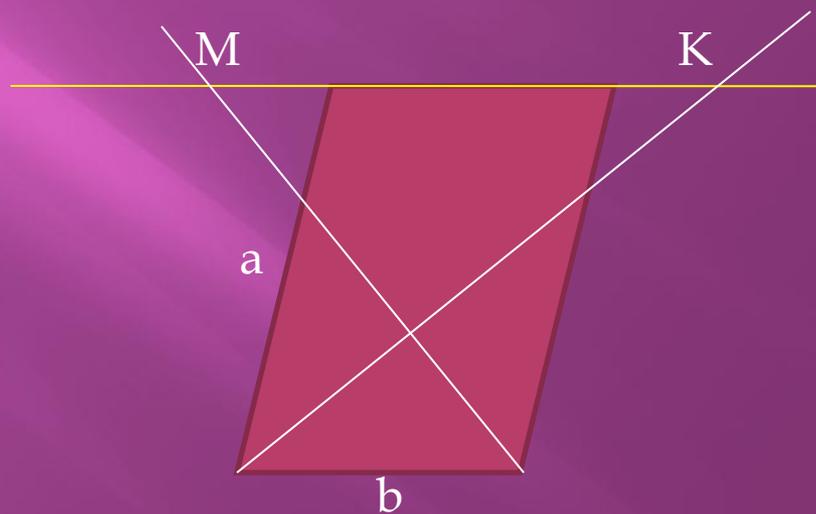


Рис. 2

Биссектрисы соседних углов параллелограмма могут пересекать противоположную сторону или её продолжение

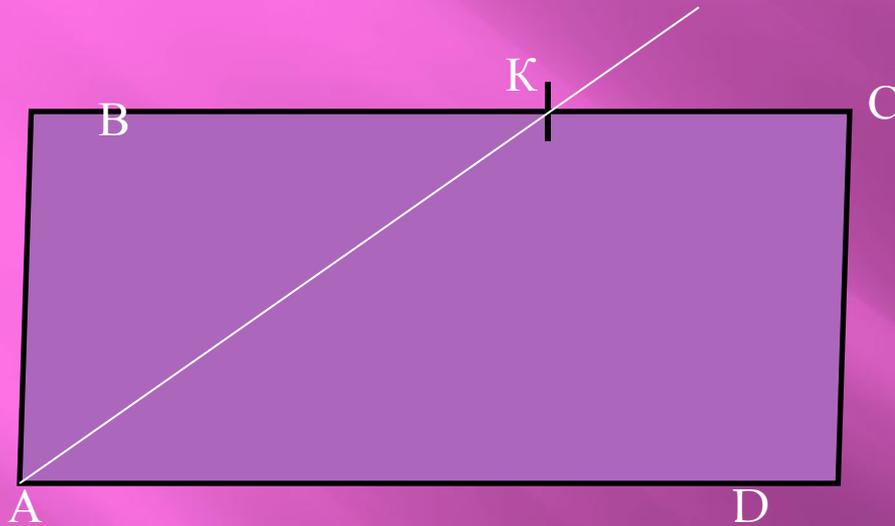


$$a > b/2, \quad a < b$$



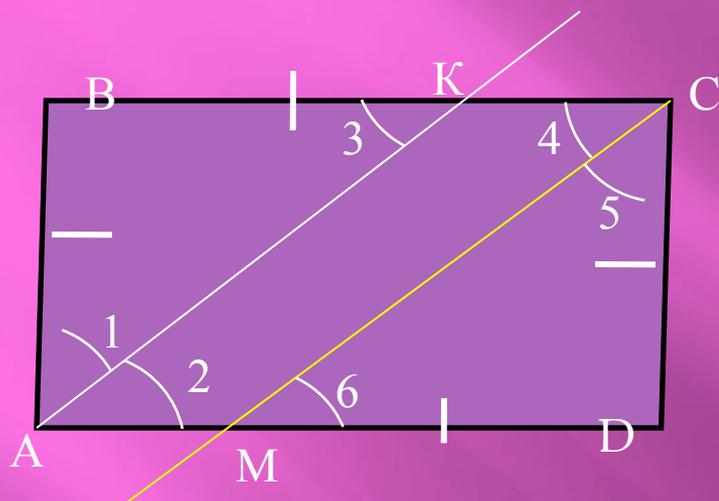
$$a > b$$

Способ построения биссектрисы параллелограмма без транспортира.



Мы узнали, что биссектриса отсекает от параллелограмма равнобедренный треугольник. Циркулем измеряем сторону АВ и откладываем это расстояние из точки В на прямой ВС, делаем засечку, обозначаем точку буквой К. Таким образом $AB = BK$. Проводим биссектрису $\sphericalangle A - AK$.

Биссектрисы противоположных углов равны и параллельны



Дано:

ABCD – параллелограмм

AK и CM – биссектрисы

AB = BK = CD = DM

Доказать:

AK = CM; AK // CM

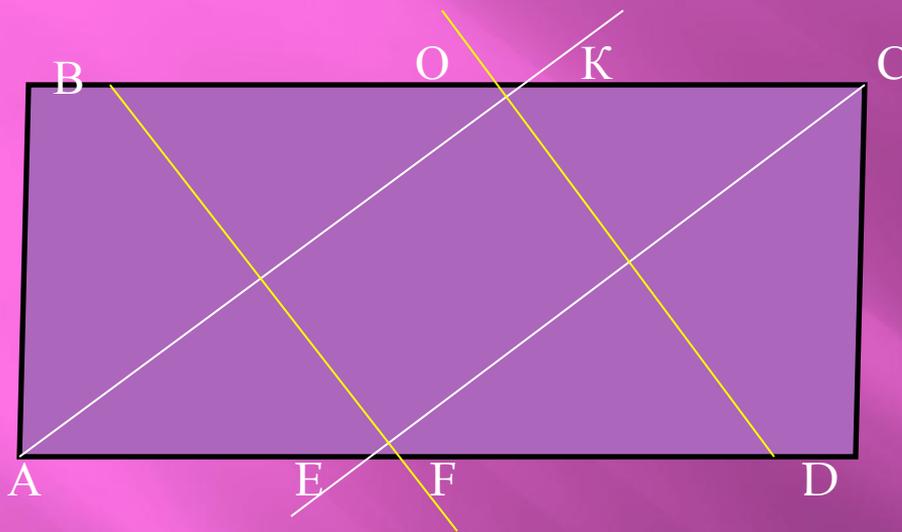
Доказательство:

Рассмотрим прямые AK и CM:

$\angle 2 = \angle 6$ (соответственные) \rightarrow AK // CM

Так как AM // KC (по свойству противоположных сторон параллелограмма), а AK // CM, то AKCM – параллелограмм. Из этого следует, что AK = CM (по свойству противоположных сторон параллелограмма).

Все биссектрисы, пересекаясь, образуют прямоугольник



Дано:

ABCD – параллелограмм

AK, BF, CE, DO – биссектрисы

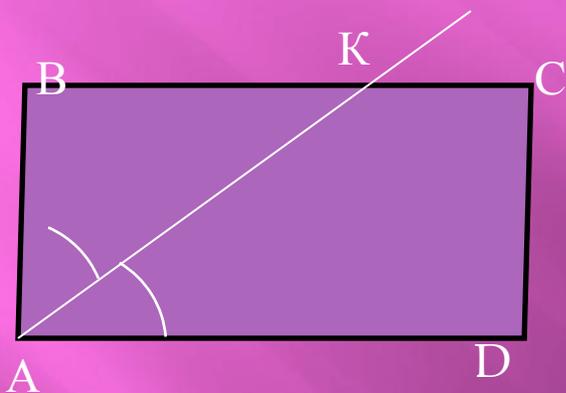
Доказать:

Образовался прямоугольник

По теореме «биссектрисы соседних углов параллелограмма пересекаются под прямым углом» AK и DO, пересекаясь, образуют прямой угол; AK и BF, пересекаясь, образуют прямой угол; BF и CE, пересекаясь, образуют прямой угол; OD и CE, пересекаясь, образуют прямой угол. Значит, образовался четырёхугольник, у которого, все углы прямые. Значит, это прямоугольник.

Теперь я предлагаю решить несколько мною составленных задач на основе ЭТИХ СВОЙСТВ

ЗАДАЧА № 1



Дано:

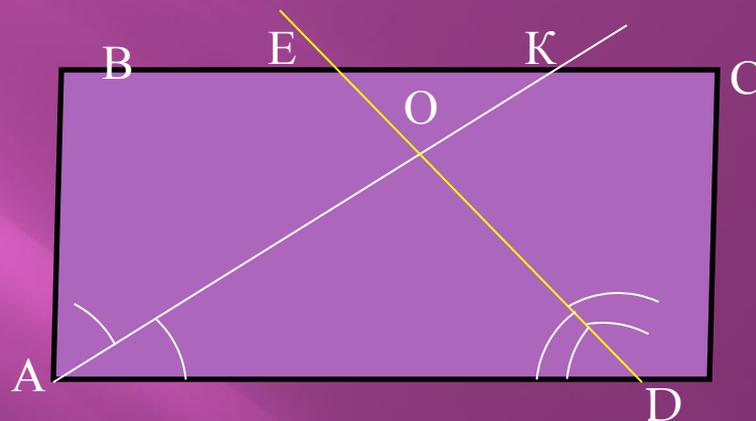
$ABCD$ – параллелограмм

AK – биссектриса

$AB = 5$ см.

Найти: $BK = ?$

ЗАДАЧА № 2



Дано:

$ABCD$ – параллелограмм

AK и DE – биссектрисы

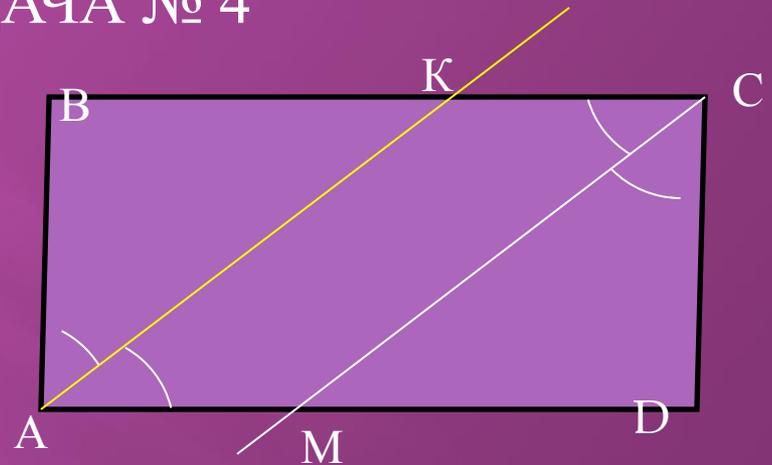
$AD = 8$ см, $OD = 4$ см.

Найти: $\angle AOD$ и $\angle ODA$.

ЗАДАЧА № 3

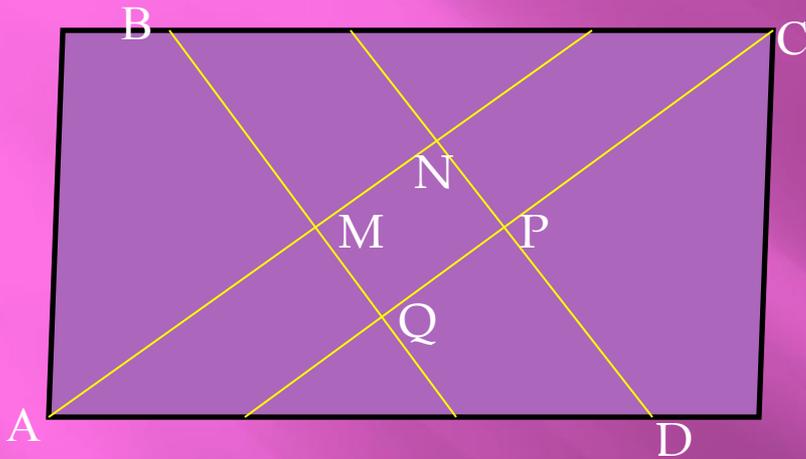
1. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрисы AM и DN . $AB = 5$ см, $BC = 10$ см. Где пересекутся биссектрисы AM и DN ?
2. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрисы AM и DN . $AB = 16$ см, $BC = 30$ см. Где пересекутся биссектрисы AM и DN ?
3. В параллелограмме $ABCD$ провели биссектрисы AM и DN . $AB = 8$ см, $BC = 18$ см. Где пересекутся биссектрисы AM и DN ?

ЗАДАЧА № 4



$ABCD$ – параллелограмм. AK и CM – биссектрисы. Найди и точно дай названия ещё трём фигурам на рисунке (используйте 6 свойство биссектрис параллелограмма).

В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы углов. Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного биссектрисами.



Решение:

$MNPQ$ – параллелограмм, поскольку биссектрисы противоположных углов параллелограмма параллельны.

Найдём стороны MN и MQ и угол QMN .

Для определения сторон MN и MQ находим последовательно BQ (из $\triangle BCQ$ по теореме синусов), BM и AM (из $\triangle BMA$), AN (из $\triangle NAD$), и, наконец, $MN = |AN - AM|$, $MQ = |BQ - BM|$

Итак $\angle BAM = \alpha/2$, $\angle ABM = \frac{1}{2} \angle ABC = \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha)$,

$\angle QMN = \angle AMB = 180^\circ - \angle BAM - \angle ABM = 180^\circ - \alpha/2 - \frac{1}{2}(180^\circ - \alpha) = 90^\circ$, т.е.

$MNPQ$ – прямоугольник. Далее ($BC = a$, $AB = b$) $BQ = a \sin \alpha/2$, $BM = b \sin \alpha/2$,

$MQ = |BQ - BM| = |a - b| \sin \alpha/2$ и т.д. Ответ получается следующий: $S = \frac{1}{2}(a - b)^2 \sin \alpha$