

**ТЕОРЕМА О ПРЯМОЙ,  
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОЙ К  
ПЛОСКОСТИ.**

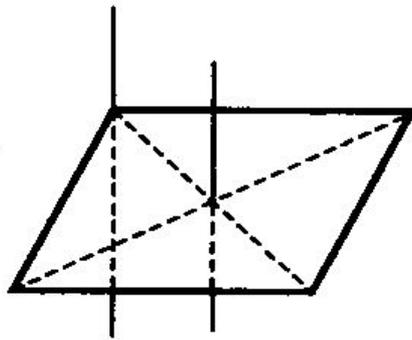


Рис. 1

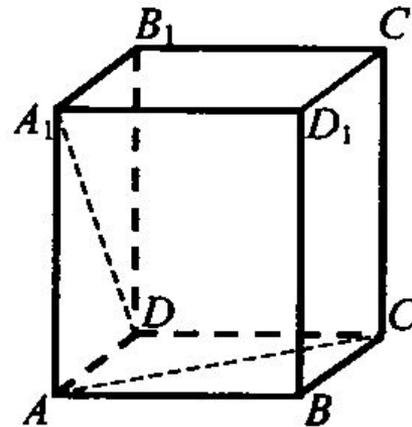


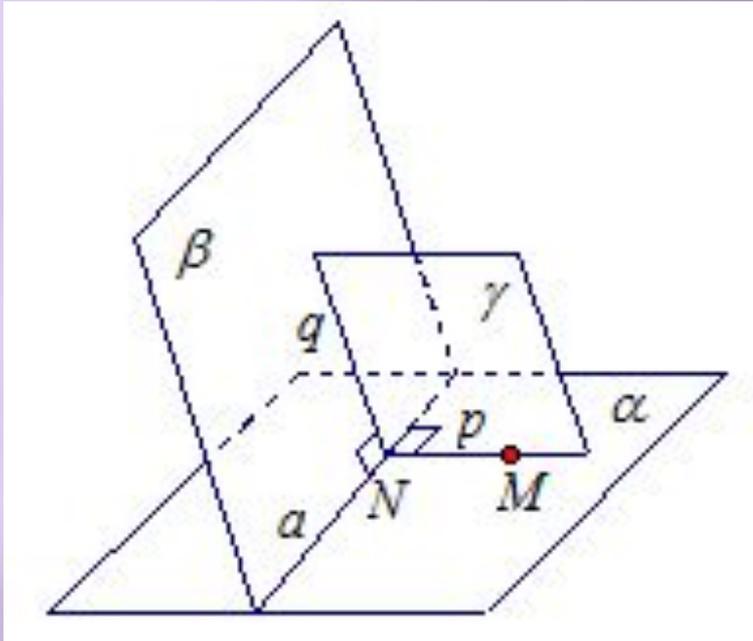
Рис. 2

6. Дано:  $ABCD$  – куб (рис. 2).

Заполните пропуски о взаимном расположении прямых и плоскостей:

$CC_1 \dots (DCB)$ ;  $AA_1 \dots (DCB)$ ;  $D_1C_1 \dots (DCB)$ ;  $B_1C_1 \dots (DD_1C_1)$ ;  $B_1C_1 \dots DC_1$ ;  
 $A_1D_1 \dots DC_1$ ;  $BB_1 \dots AC$ ;  $A_1B \dots BC$ ;  $A_1B \dots DC_1$ .

# Задача 133

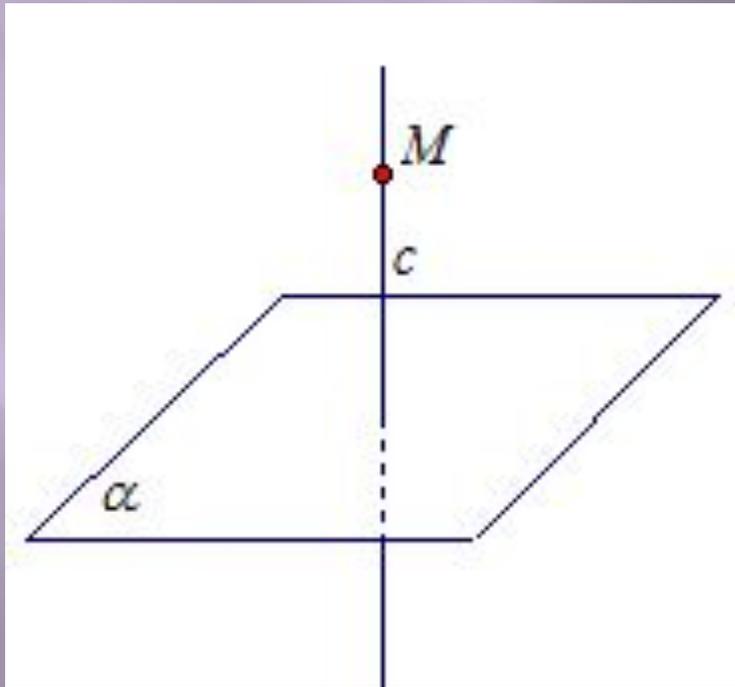


## Доказательство

Пусть нам дана прямая  $a$  и точка  $M$ . Докажем, что существует плоскость  $\gamma$ , которая проходит через точку  $M$  и которая  $\perp$  прямой  $a$ .

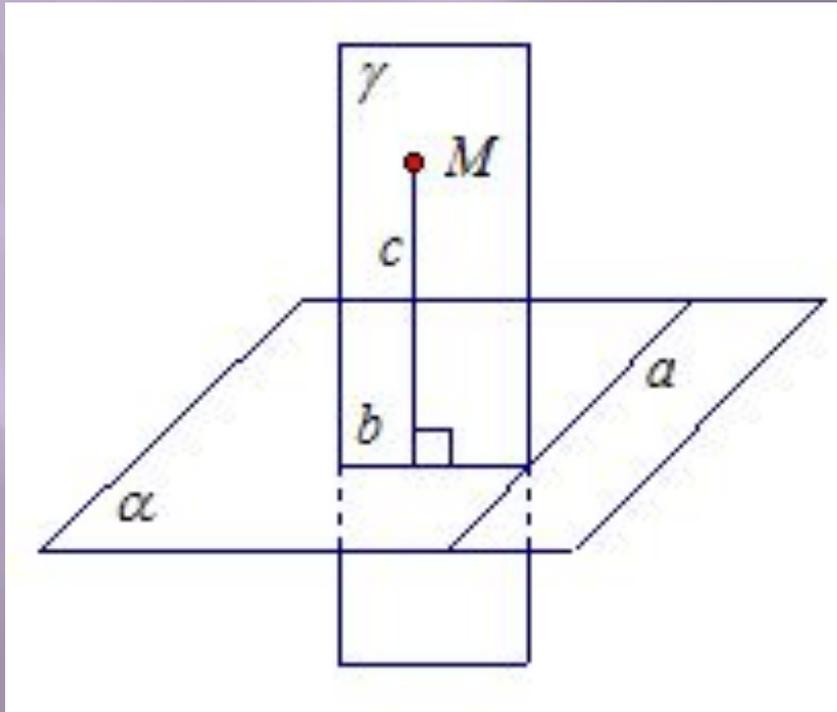
Через прямую  $a$  проведем плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  так, что точка  $M \in$  плоскости  $\alpha$ . Плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  пересекаются по прямой  $a$ . В плоскости  $\alpha$  через точку  $M$  проведем перпендикуляр  $MN$  (или  $p$ ) к прямой  $a$ . В плоскости  $\beta$  из точки  $N$  восстановим перпендикуляр  $q$  к прямой  $a$ . Прямые  $p$  и  $q$  пересекаются, пусть через них проходит плоскость  $\gamma$ . Получаем, что прямая  $a$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым  $p$  и  $q$  из плоскости  $\gamma$ . Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ .

Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.



*Доказательство.*

Пусть дана плоскость  $\alpha$  и точка  $M$  (см. рис. 2). Нужно доказать, что через точку  $M$  проходит единственная прямая  $c$ , перпендикулярная плоскости  $\alpha$ .  
Проведем прямую  $a$  в плоскости  $\alpha$  (см. рис. 3). Согласно доказанному выше утверждению, через точку  $M$  можно провести плоскость  $\gamma$  перпендикулярную прямой  $a$ . Пусть прямая  $b$  – линия пересечения плоскостей  $\alpha$  и  $\gamma$ .



В плоскости  $\gamma$  через точку  $M$  проведем прямую  $c$ , перпендикулярную прямой  $b$ .

Прямая  $c$  перпендикулярна  $b$  по построению, прямая  $c$  перпендикулярна  $a$  (так как прямая  $a$  перпендикулярна плоскости  $\gamma$ , а значит, и прямой  $c$ , лежащей в плоскости  $\gamma$ ).

Получаем, что прямая  $c$  перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости  $\alpha$ . Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, прямая  $c$  перпендикулярна плоскости  $\alpha$ . Докажем, что такая прямая  $c$  единственная.

Предположим, что существует прямая  $c_1$ , проходящая через точку  $M$  и перпендикулярная плоскости  $\alpha$ . Получаем, что прямые  $c$  и  $c_1$  перпендикулярны плоскости  $\alpha$ . Значит, прямые  $c$  и  $c_1$  параллельны. Но по построению прямые  $c$  и  $c_1$  пересекаются в точке  $M$ . Получили противоречие. Значит, существует единственная прямая, проходящая через точку  $M$  и перпендикулярная плоскости  $\alpha$ , что и требовалось доказать.

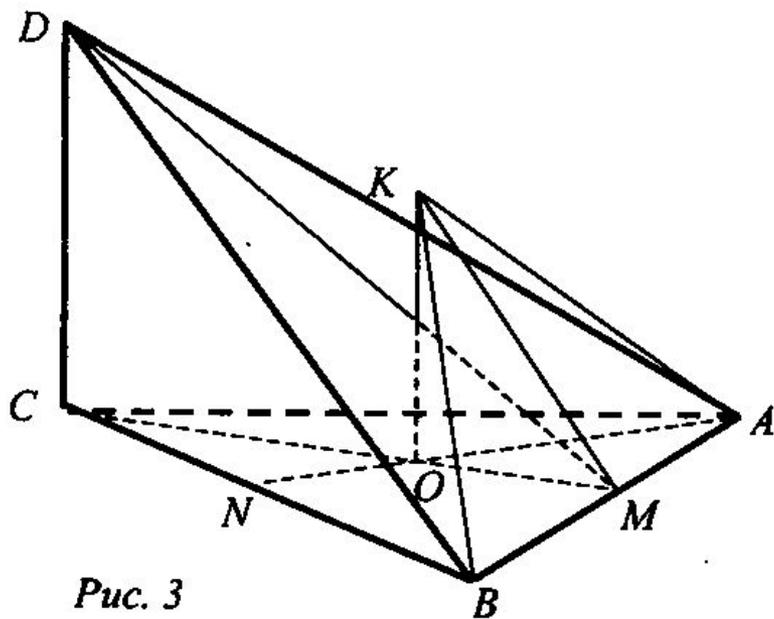


Рис. 3

**Задача № 122 (рис. 3)**

**Найти:  $AK$ ,  $DA$ ,  $BD$ .**

**Решение:**

1.  $BD = AD$ , так как  $\triangle BCD = \triangle ACD$  (как прямоугольные, по двум катетам).
  2.  $AD = \sqrt{16^2 + (16\sqrt{3})^2} = \sqrt{16^2 \cdot 4} = 16 \cdot 2 = 32$  см.
  3.  $AK = BC$ , так как  $\triangle AOK = \triangle BOK$  (как прямоугольные, по двум катетам).
  4.  $AO = OB = OC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 16$  см.
  5.  $AK = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$  см.
- (Ответ:  $AK = BK = 20$  см;  $AD = BD = 32$  см.)

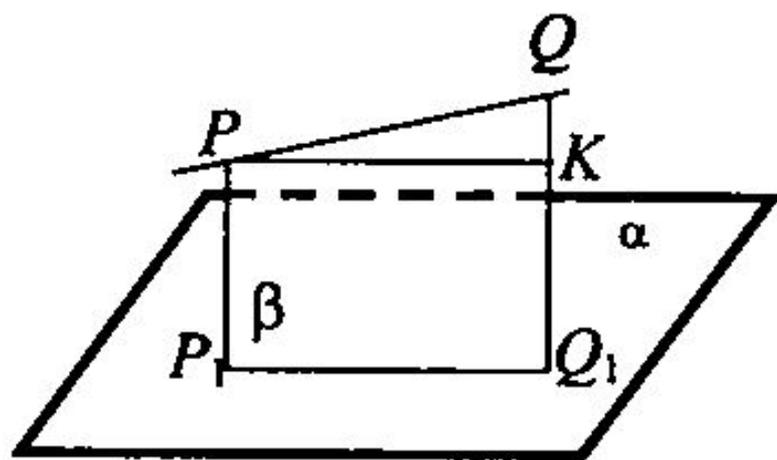


Рис. 4

**Задача № 125** (рис. 4).  
Найти:  $P_1Q_1$ .

**Решение:**

1.  $(PP_1 \perp \alpha, QQ_1 \perp \alpha) \Rightarrow PP_1 \perp QQ_1$ .
2.  $(PP_1, QQ_1) = \beta, \alpha \cap \beta = P_1Q_1$ .
3.  $QK = 33,5 - 21,5 = 12$  см.
4.  $P_1Q_1 = PK = 9$  см.

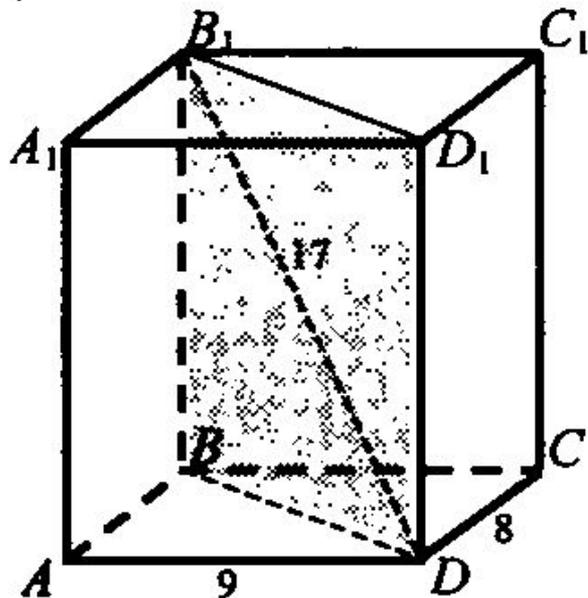


Рис. 5

1) Дано:  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  – прямоугольный параллелепипед;  $AD = 9$  дм;  $DC = 8$  дм;  $DB_1 = 17$  дм (рис. 5).

Найти:  $S_{BB_1 D_1 D}$ .

Решение:  $\triangle ADB$ :  $\angle BAD = 90^\circ$ ;  $AB = DC = 8$  дм. По теореме Пифагора  $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$ ;  
 $BD = \sqrt{8^2 + 9^2} = \sqrt{64 + 81} = \sqrt{145}$  (дм).  $\triangle B_1 BD$ :  
 $\angle B_1 BD = 90^\circ$ . По теореме Пифагора  $BB_1 =$   
 $= \sqrt{B_1 D^2 - BD^2}$ ;  $BB_1 = \sqrt{17^2 - (\sqrt{145})^2} = \sqrt{289 - 145} =$   
 $= \sqrt{144} = 12$  (дм).  $S_{\text{сеч}} = B_1 B \cdot BD$ .  $S_{\text{сеч}} = 12 \sqrt{145}$  (дм<sup>2</sup>).  
 (Ответ:  $12 \sqrt{145}$  дм<sup>2</sup>.)

Смоделируйте в классной комнате описанную ниже ситуацию: Три луча  $OM$ ,  $OK$ ,  $OT$  попарно перпендикулярны. Как расположен каждый из лучей по отношению к плоскости, определяемой двумя другими лучами? (Угол; перпендикулярно).