

**МИНОБРНАУКИ РФ**

**Государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования**

**Санкт-Петербургский государственный электротехнический  
университет (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»)**

# **Моделирование в электротехнике**

**Санкт-Петербург  
2018**

# Литература

- Советов Б.Я., Яковлев А. М. Моделирование систем, 3-е издание, переработанное и дополненное. - М., 2001 -374с.
- Белов М. П. Моделирование в электротехнике. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2014. 169 с.

# Классификация электротехнических систем



# Унифицированные системы электроприводов

В состав комплектного электропривода входят:

- электродвигатель с датчиком или без датчика скорости;
- управляемый преобразователь, состоящий из силовых полупроводниковых элементов (диодов, тиристоров, транзисторов и др.) с системой охлаждения, защитных предохранителей, разрядных и защитных  $RLC$ -цепей, контроллеров управления преобразователями и контроля состояния элементов преобразователей;
- силовой трансформатор, автотрансформатор, реактор;
- коммутационная и защитная аппаратура в цепях постоянного и переменного токов (автоматические выключатели, линейные контакторы, рубильники, предохранители);
- устройства торможения электродвигателей;

– контроллеры управления электроприводом, модули интеллектуальной периферии, ввода/вывода сигналов, сетевые средства, терминалы, кнопки управления;

– пульты управления, содержащие командные, сигнальные и управляющие устройства;

– источники питания.

## Особенности моделирования электромеханических систем

Современная методология моделирования в электротехнике базируется на системном подходе. ПрМАиК при системном подходе рассматривается как сложная система, состоящая из взаимосвязанных, целенаправленно функционирующих элементов (коммутационно-защитной аппаратуры, управляемых источников напряжения (тиристорный, частотный преобразователи, усилители мощности, широтно-импульсные преобразователи), различных типов электрических машин, фильтров и т. п.) и находящихся во взаимодействии с окружающей внешней средой. Это позволяет учесть все факторы, влияющие на функционирование ПрМАиК, и обеспечить создание её с высокими показателями эффективности и качества.

Одно из важнейших требований системного подхода заключается в необходимости рассматривать существование и функционирование ПрМАиК во времени и пространстве. Описание существования объекта во времени приводит к понятию жизненного цикла, а в пространстве – к понятию внешней среды, с которой взаимодействует объект в процессе функционирования.

Для лучшего понимания процессов, происходящих в сложных электромеханических системах, в некоторых случаях эти системы разбивают на локальные подсистемы (простейшие цепи), например, в преобразователе частоты (ПЧ) (рис. 2) рассматривают: В – силовой диодный выпрямитель; ФС – силовой  $LC$ -фильтр звена постоянного тока; ТК – транзисторный ключ реостатного частотного торможения, устанавливаемый в преобразователе; ТР – внешний тормозной резистор; АИН – транзисторный (IGBT) автономный инвертор напряжения; ДТ – датчик тока; АД – приводной асинхронный электродвигатель; ИП – источник питания; ДН – датчик напряжения; ФИ – формирователь управляющих сигналов транзисторов (драйвер); МК – микропроцессорный контроллер; УВВ – устройство ввода/вывода; ПМУ – пульт местного управления; ПП – последовательный порт.

Как видно из рис. 2, вся схема ПЧ представлена в виде простейших электротехнических цепей (или приводится к ним, например, ФИ), для изучения которых можно применить основные законы электротехники.

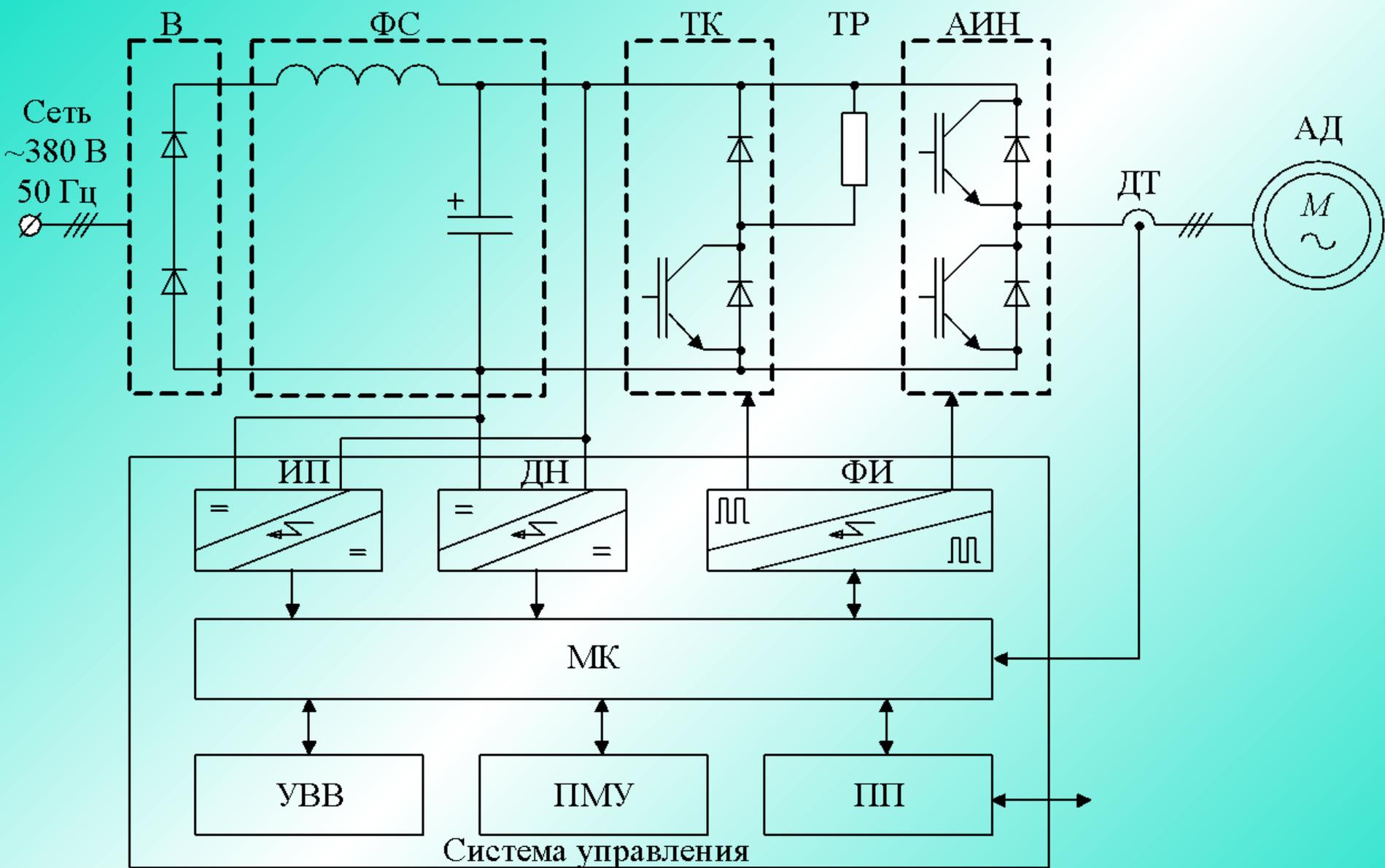


Рис. 2 Функциональная схема преобразователя частоты

В данном случае для исследования физических процессов, протекающих в основных подсистемах ПЧ, необходимо провести их компьютерное моделирование. После проведения детального исследования на компьютерных моделях отдельных подсистем можно переходить к разработке замкнутой (укрупненной) модели ПЧ. Это возможно сделать в связи с тем, что получены исчерпывающие данные по работе внутренних элементов ПЧ.

Кроме рассмотрения вопросов, связанных с физическими процессами, протекающими в электротехнических системах, при моделировании рассматривают вопросы, связанные с тепловыми и электромагнитными полями, присущими ПрМАиК.

Таким образом, по аналогии со структурным синтезом ПрМАиК (расчетом и выбором средств автоматизации) при моделировании в электротехнике можно также использовать сквозной подход. Это означает, что при моделировании ПрМАиК можно рассматривать как полную их модель, так и проводить процесс моделирования их отдельных элементов (сквозной), рассматривая физические модели процессов, происходящие в каждом средстве автоматизации.

## **Основные задачи, законы, уравнения электротехники и их использование**

Задачи, которые приходится решать при исследовании электромагнитных процессов в электрических цепях, подразделяются:

- 1) на задачи анализа – при их решении заданы воздействия, структура цепи и параметры элементов, требуется определить реакции цепи;
- 2) задачи синтеза – в этом случае заданы воздействия и реакции, требуется определить структуру или параметры цепи (структурный или параметрический синтез);
- 3) задачи идентификации – обычно заданы воздействия и экспериментально сняты реакции в реальной цепи, требуется определить структуру или параметры цепи (структурная или параметрическая идентификация).

Исходя из решения задач моделирования электротехнических систем (ПрМАиК) можно ввести еще четвертую задачу – оптимизации параметров электрической цепи.

- 1. Первый закон Кирхгофа.**
- 2. Второй закон Кирхгофа.**
- 3. Закон Ома (закон Ома для однородного участка цепи, закон Ома для замкнутой цепи, закон Ома для неоднородного участка цепи)**
- 4. Закон Джоуля–Ленца.**
- 5. Закон Фарадея.**
- 6. Закон Кулона.**
- 7. Закон полного тока.**
- 8. Закон электромагнитной индукции.**
- 9. Уравнения Максвелла.**

# Классификация электрических цепей



# Режимы работы электрических цепей

## Установившийся

Периодический

Постоянный

## Неустановившийся или переходный

Апериодический

Критический

Колебательный

**Целью создания моделей** является изучение, описание, проектирование или оптимизация некоторого объекта или процесса. Например, в общественной деятельности модели используют для проведения анализа при принятии решений.

**Модель** - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

**Моделирование** - это замещение одного объекта другим с целью изучения важнейших свойств замещаемого объекта. Замещаемый объект называется *оригиналом*, замещающий - *моделью*.

**В математической теории** модель определяется как результат отображения одной абстрактной математической структуры на другую, также абстрактную, либо как результат интерпретации первой модели в терминах и образах второй.

**Главная особенность моделирования** в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент для познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект.

Модели могут быть качественно различными, они образуют иерархию, в которой модель более высокого уровня (например, теория) содержит модели нижних уровней (гипотезы) как свои части, элементы.

**Моделирование представляет** собой процесс построения, изучения и применения моделей. Этот процесс включает три элемента: субъект (исследователь), объект исследования, модель и состоит из следующих основных этапов.

1. Конструирование или поиск в реальном мире подходящей модели исследуемого объекта.
2. Замена объекта исследования моделью и проведение «модельных» экспериментов.
3. «Перенос знаний с модели на оригинал». При этом знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели.
4. Практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний о реальном объекте.

## ***Основные требования к модели:***

1. наглядность построения;
2. обозримость основных свойств и отношений;
3. доступность ее для исследования или воспроизведения;
4. простота исследования, воспроизведения;
5. сохранение информации, содержащиеся в оригинале (с точностью рассматриваемых при построении модели гипотез) и получение новой информации.

## ***Проблема моделирования состоит из трех задач:***

1. построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);
2. исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
3. использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

## ***Свойства модели:***

1. конечность: модель отображает оригинал лишь в конечном числе его отношений и, кроме того, ресурсы моделирования конечны;
2. упрощенность: модель отображает только существенные стороны объекта;
3. приблизительность: действительность отображается моделью грубо или приблизительно;
4. адекватность: модель успешно описывает моделируемую систему;
5. информативность: модель должна содержать достаточную информацию о системе - в рамках гипотез, принятых при построении модели.

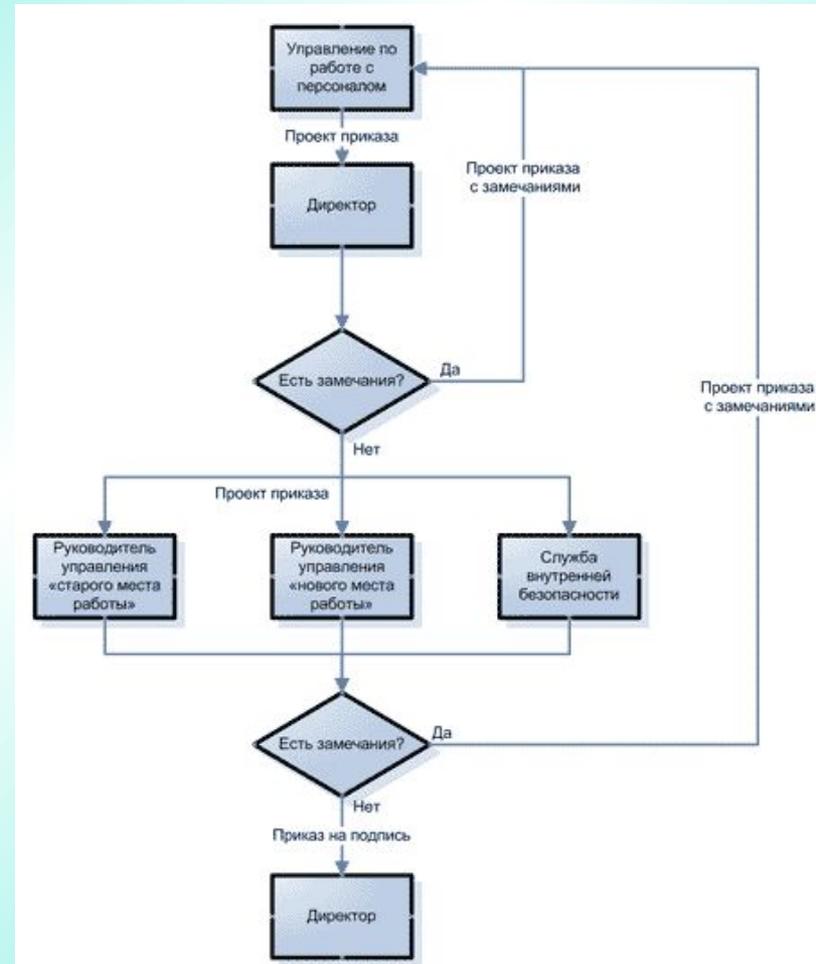
**Моделирование - циклический процесс.** Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется.

Моделирование тесно связано с такими гносеологическими категориями, как: *абстракция, формализация, идеализация, аналогия, гипотеза* и др. Процесс моделирования неизбежно включает и построение абстракций, и умозаключения по аналогии, и конструирование научных гипотез.

**Модель отражает** только те стороны явлений, которые существенны в данном исследовании, и позволяет абстрагироваться от второстепенных факторов. Элементарная форма абстракции - типизация объектов.

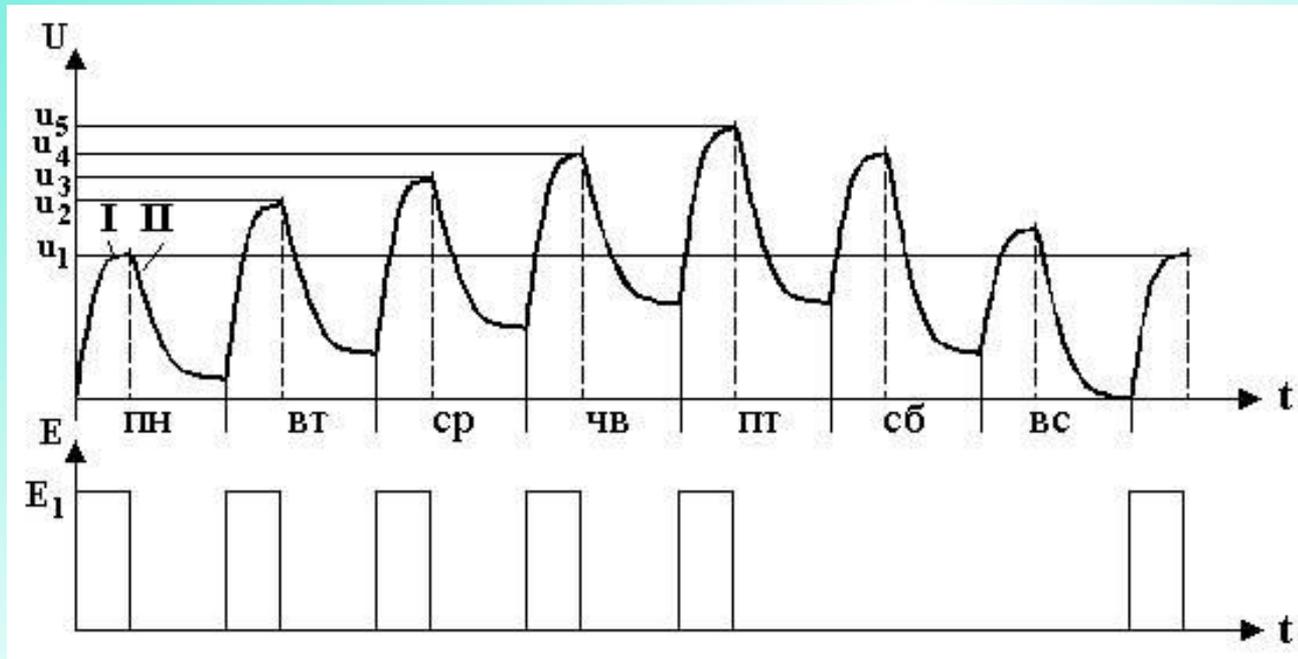
## Формализация - отображение

объекта или явления в знаковой форме  
какого-либо искусственного языка  
(например, математики) с целью  
исследования объектов и свойств через  
формальное исследование  
соответствующих знаков. Термин  
«формальный» означает, что объекты и  
операции над ними рассматриваются  
чисто формально, без какой бы то ни  
было содержательной интерпретации  
СИМВОЛОВ.



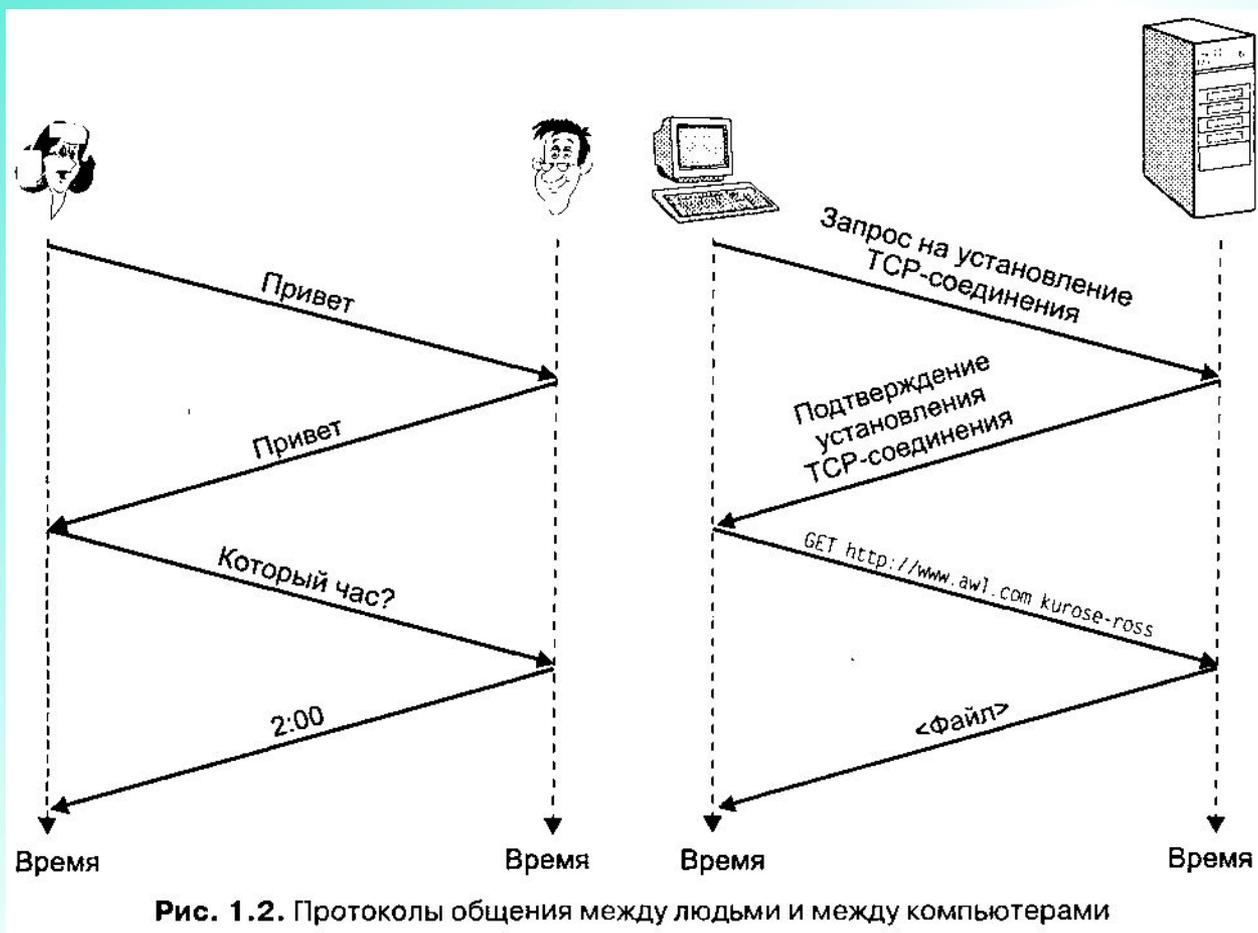
Пример формализации  
документооборота

**Идеализация** - это мысленное конструирование объектов, которые в реальности не существуют (например, идеальный газ, идеальный импульс, неограниченная память и др.). В результате идеализации реальные объекты лишаются некоторых присущих им свойств и наделяются гипотетическими свойствами.



Пример идеализации среднесуточной температуры

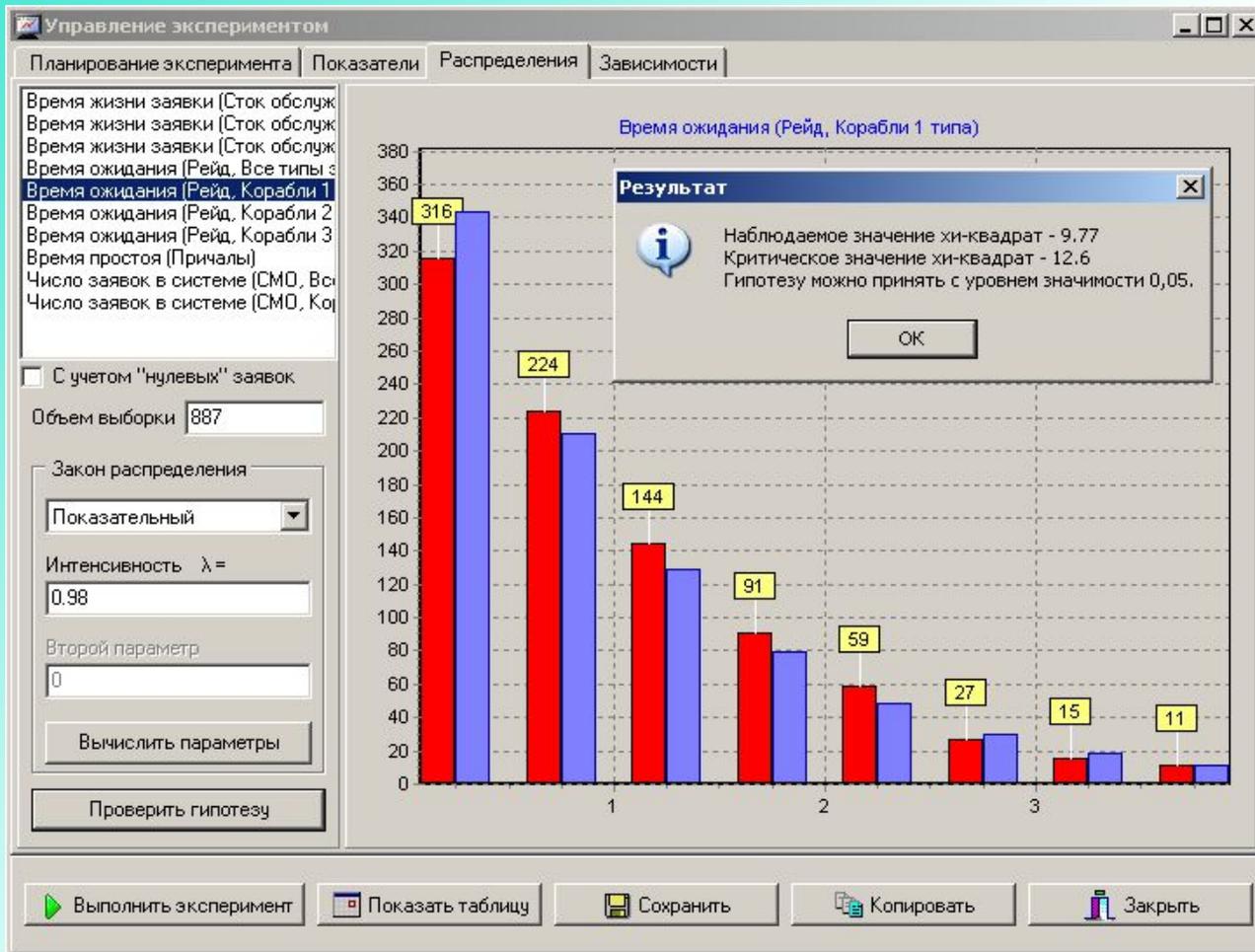
**Аналогия** - прием, используемый в методах познания состоящий в том, что знания о предметах и явлениях выявляются на основании изучения сходных с ними в каком-либо отношении (по структуре, составу, принципу действия, используемым средствам, характеристикам) объектов.



**Рис. 1.2.** Протоколы общения между людьми и между компьютерами

Однако, делая выводы на основании аналогии нужно знать, насколько эти выводы достоверны. Модель никогда полностью не тождественна оригиналу, между ними всегда есть определенные различия. Поэтому выводы на основании аналогии всегда имеют не абсолютно достоверный, а предположительный характер.

**Гипотеза** - предположение, основывающееся на догадке, наблюдении, опыте и требующее подтверждения или доказательства. В процессе познания каждая гипотеза подвергается проверке. С накоплением новых фактов одна гипотеза может быть заменена другой.



При этом часто старая гипотеза не отбрасывается полностью, а только исправляется и уточняется. В результате исправленная и уточненная гипотеза превращается в теорию или закон.

**Краеугольным камнем** метода моделирования является теория подобия, устанавливающая те условия, при которых модель действительно отражает (в том или ином смысле) оригинал.

**Подобие явлений**, характеризующееся соответствием (например, пропорциональностью) величин, участвующих в изучаемых явлениях, происходящих в оригинале и в моделях, по степени соответствия параметров модели и оригинала может быть трех видов:

- 1. полное подобие,*
- 2. неполное подобие,*
- 3. приближенное подобие.*

**Неполное подобие**, в отличие от **полного подобия**, связано с изучением процессов только во времени или только в пространстве.

**Приближенное подобие** реализуется при некоторых упрощающих допущениях, что, как правило, приводит к искажениям, которые должны заранее оцениваться количественно.

Все виды подобия подчиняются общим закономерностям, описываемым теоремами о подобии и некоторыми дополнительными положениями.

Помимо соблюдения условий подобия **эффективность моделирования** зависит от того, в какой степени модель согласована с культурной средой, в которой ей предстоит функционировать. Она должна органически вписываться в эту среду, а не представлять собой чуждый ей элемент. Еще одним аспектом согласованности является обеспеченность модели ресурсами.

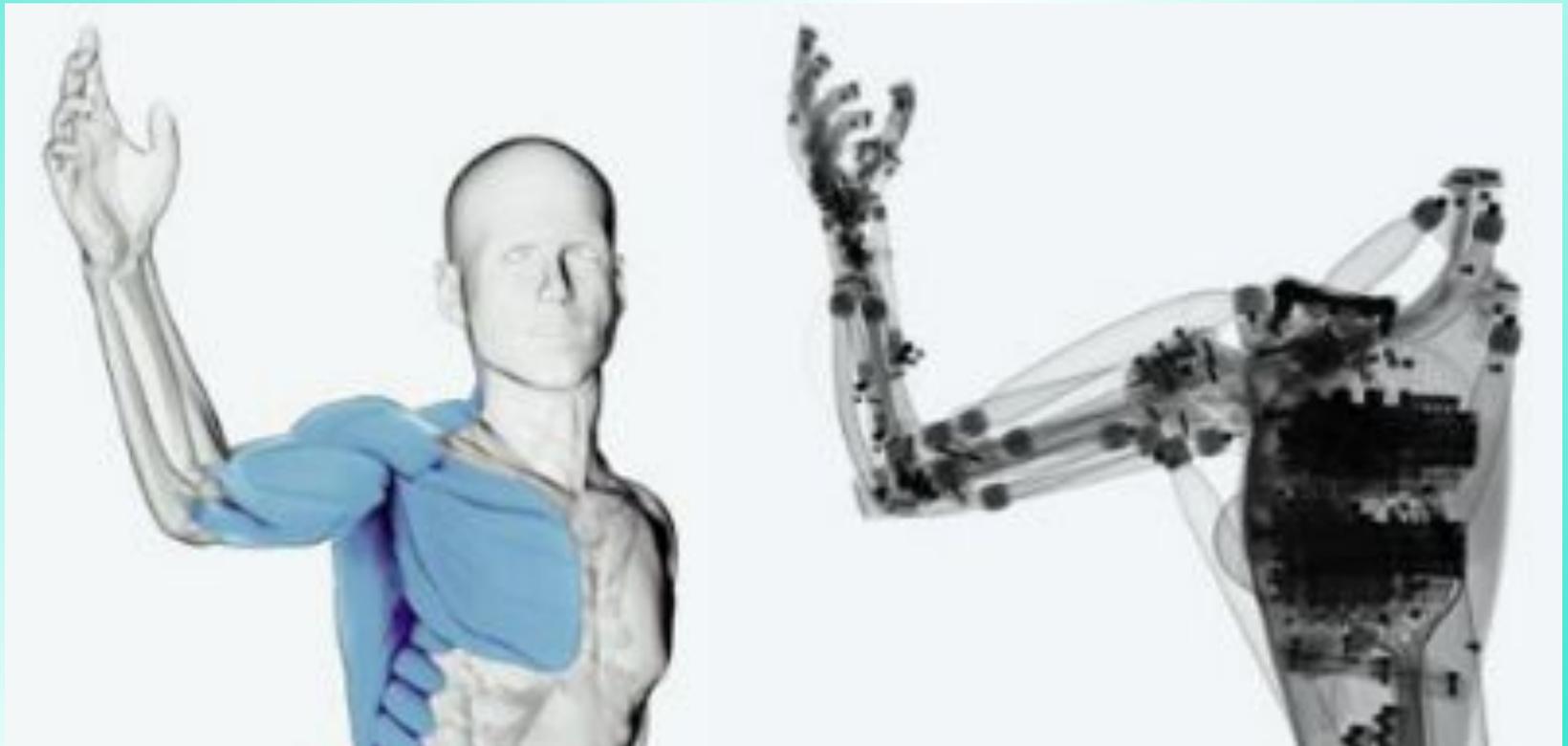
**Основные различия между моделью и действительностью** связаны с конечностью, упрощенностью и приближенностью моделей.

**Основное противоречие познавательных моделей** состоит в необходимости использования для познания бесконечного мира ограниченных средств. Поэтому модель подобна оригиналу лишь в конечном числе отношений.

**Познавательные возможности** модели обуславливаются тем, что модель отображает лишь наиболее существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимой и достаточной мере сходства оригинала и модели и об адекватности модели требует особого анализа.

Модель, с помощью которой успешно достигается поставленная цель, называется **адекватной этой цели**.

**Сходство модели и действительности** проверяется на практике. При моделировании, как и в других методах исследования, решающим критерием истинности является практика. Помимо безусловно истинного, в модели есть, как правило, и верное лишь при определенных условиях, и даже неправильное, т.е. не имеющее отношение к оригиналу.



# Виды моделей

**По сфере применения** модели разделяются на: *экономические, социальные, биологические, производственно-технологические, научно-исследовательские* и др.

В каждой области знаний существует своя классификация моделей. Ввиду обширности этого вопроса рассмотрим лишь некоторые общие признаки, по которым эту классификацию можно производить.

**С точки зрения целей создания модели** делятся на *познавательные* и *прагматические*.

**Познавательные модели** создаются на основании изучения и для изучения уже существующих объектов. Они являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. В процессе их создания познавательные модели приближаются к реальности, которую они отображают.

**Прагматические модели** служат для организации практических действий, на основе сформулированной ранее «идеальной» модели. В этом случае выявляемые расхождения между реальностью и моделью устраняются путем «подгонки» реальности под модель.

**Примерами** таких процессов могут служить: техническое проектирование, экономическое реформирование. При проведении экономических реформ реальная жизнь подстраивается под некие схемы (модели), внедрение которых, по мнению их авторов, должно улучшить социальные и экономические показатели.

Таким образом, имеется **два основных отличия** рассмотренных выше типов моделей.

**Во-первых**, познавательные модели строятся на основании отображаемых объектов, в то время как построение прагматических моделей предшествует созданию реальных объектов.

**Во-вторых**, познавательные модели отображают существующее, а прагматические - не существующее (а лишь желаемое).

**В зависимости от используемых средств модели делятся на абстрактные или идеальные и материальные, т.е. реальные или вещественные.**



**Абстрактные модели** являются идеальными конструкциями, построенными средствами мышления, сознания.

Они бывают двух типов: **мысленные, умозрительные или интуитивные** модели, с одной стороны, и **логико-математические**, с другой.

Класс абстрактных моделей образуют **вербальные** (словесные), **знаковые** и **математические** модели.

**Вербальные модели** используют *естественные* и *специальные* языки.

Примерами моделей, основанных на использовании **естественных языков**, являются различные инструкции, планы действий и т.д.

Для построения таких моделей не требуется специальной подготовки, но точность таких моделей не велика. На практике их приблизительность, расплывчатость преодолевается с помощью «правильного» понимания (интерпретации).

Дифференциация наук потребовала создания **специализированных языков**, более четких и точных, чем естественный язык.

Применение специальных языков требует дополнительных затрат на их разработку и изучение, но они многократно окупаются за счет преимуществ использования компактных, ясных и точных моделей.

**Знаковые модели** изучаются в семиотике (науке о знаках).

В семиотике выделены три основные группы или аспекта отношений:

**синтаксис** (греч. «построение», «порядок») - отношение между знаками;

**семантика** (греч. «обозначение») - отношение между знаками и тем, что они обозначают;

**прагматика** (греч. «дело», «действие») - отношение между знаками и результатом их использования.

Знаковые модели особенно широко применяются в системах искусственного интеллекта (СИИ).

**Математическая модель** есть описание какого-либо класса явлений внешнего мира, выраженное с помощью математической символики.

Класс математических моделей очень широк, для их изучения необходимо знание соответствующих разделов математики, поэтому ограничимся лишь перечислением некоторых из них.

К математическим моделям относятся: *алгебраические, логико-алгебраические, графовые.*

При построении математических моделей процессов функционирования систем существуют следующие основные подходы:

1. непрерывно-детерминированный (например, дифференциальные уравнения, уравнения состояния);
2. дискретно-детерминированный (конечные автоматы);
3. дискретно-стохастический (вероятностные автоматы);
4. непрерывно-стохастический (системы массового обслуживания);
5. обобщенный или универсальный (агрегативные системы).

Классификация моделей и видов моделирования объектов и систем в соответствии с теорией подобия должна выделить в них наиболее общие признаки и свойства реальных систем.

Признаки классификации	Виды математических моделей
1. Принадлежность к иерархическому уровню	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <u>микроуровня</u> Модели</li> <li>▪ <u>макроуровня</u> Модели</li> <li>▪ Модели <u>метауровня</u></li> </ul>
2. Характер взаимоотношений со средой	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ <u>непрерывный обмен</u> <u>Открытые</u></li> <li>▪ <u>связь</u> <u>Закрытые</u> (слабая)</li> </ul>
3. Характер отображаемых свойств объекта	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Структурные</li> <li>▪ Функциональные</li> </ul>
4. Способ представления свойств объекта	<ul style="list-style-type: none"> <li>▪ Аналитические</li> <li>▪ Алгоритмические</li> <li>▪ Имитационные</li> </ul>

5. Способ получения модели	<ul style="list-style-type: none"><li>▪</li><li>▪</li></ul>	Теоретические Эмпирические
6. Причинная обусловленность	<ul style="list-style-type: none"><li>▪</li><li>▪</li></ul>	Детерминированные Вероятностные
7. По отношению к времени	<ul style="list-style-type: none"><li>▪</li><li>▪</li></ul>	Динамические Статические

8. По типу уравнений

- Линейные
- Нелинейные

9. По множеству значений переменных

- Непрерывные
- Дискретные
- Дискретно-  
непрерывные

10. По назначению

- Технические
- Экономические
- Социальные и т.д.

## **Математический подход к моделированию имеет ряд недостатков:**

1. низкая адекватность математической модели реальному объекту;
2. проблемы, связанные с решаемостью математических моделей из-за наличия в них разрывных функций;
3. непригодность математических моделей для большинства объектов с переменной структурой;
4. приближенные методы реализаций моделей с переменными коэффициентами требуют значительных затрат и не обладают достаточной точностью решения.

# Операции над моделями

## 1. Линеаризация

Пусть  $M = M(X, Y, A)$ , где  $X$  - множество входов,  $Y$  - выходов,  $A$  - состояний системы. Схематически можно это изобразить:  $X \Rightarrow A \Rightarrow Y$

Если  $X, Y, A$  - линейные пространства (множества), а  $f, y$  - линейные операторы, то система (модель) называется линейной. Другие системы (модели) - нелинейные. Нелинейные системы трудно поддаются исследованию, поэтому их часто линеаризуют - сводят к линейным каким-то образом.

## **2. Идентификация**

Пусть  $M=M(X,Y,A)$ ,  $A=\{a_i\}$ ,  $a_i=(a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik})$  - вектор состояния объекта (системы). Если вектор  $a_i$  зависит от некоторых неизвестных параметров, то задача идентификации (модели, параметров модели) состоит в определении по некоторым дополнительным условиям, например, экспериментальным данным, характеризующим состояние системы в некоторых случаях. Идентификация - решение задачи построения по результатам наблюдений математических моделей, описывающих адекватно поведение реальной системы.

## **3. Агрегирование**

Операция состоит в преобразовании (сведении) модели к модели (моделям) меньшей размерности  $(X, Y, A)$ .

## ***4. Декомпозиция***

Операция состоит в разделении системы (модели) на подсистемы (подмодели) с сохранением структур и принадлежности одних элементов и подсистем другим.

## ***5. Сборка***

Операция состоит в преобразовании системы, модели, реализующей поставленную цель из заданных или определяемых подмоделей (структурно связанных и устойчивых).

## ***6. Макетирование***

Эта операция состоит в апробации, исследовании структурной связности, сложности, устойчивости с помощью макетов или подмоделей упрощенного вида, у которых функциональная часть упрощена (хотя вход и выход подмоделей сохранены).

## **7. Экспертиза, экспертное оценивание**

Операция или процедура использования опыта, знаний, интуиции, интеллекта экспертов для исследования или моделирования плохо структурируемых, плохо формализуемых подсистем исследуемой системы.

## **8. Вычислительный эксперимент**

Это эксперимент, осуществляемый с помощью модели на ЭВМ с целью распределения, прогноза тех или иных состояний системы, реакции на те или иные входные сигналы. Прибором эксперимента здесь является компьютер (и модель!).

**Материальные модели** представляют собой некоторые материальные объекты, отражающие в той или иной мере свойства моделируемых объектов моделирования.

По способу отражения этих свойств различают *физические* и *предметно-математические* модели.

**Физические модели** имеют такую же физическую природу, как оригинал и отличаются в основном размерами (модель дамбы, модель самолета).

Необходимо учитывать, что для получения адекватной физической модели не достаточно лишь пропорционально изменить размеры объекта. Необходимо доказать, что натура и модель подобны, подчиняются одним и тем же физическим законам и описываются одинаковыми математическими зависимостями.

Частным случаем физических моделей являются *геометрические* модели, которые отличаются от оригинальных объектов масштабом исполнения (макет здания).

**К недостаткам физических моделей** относится относительно высокая трудоемкость их изготовления, сложность изменения параметров моделей при переходе от одного варианта к другому.

## Аналогии между лабораторным и вычислительным экспериментами

Лабораторный эксперимент	Вычислительный эксперимент
Образец	Модель
Физический прибор	Программа для компьютера
Калибровка прибора	Тестирование программы
Измерение	Расчет
Анализ данных	Анализ данных

**Предметно-математические модели** основаны на совпадении математических выражений, которыми описываются процессы в оригинале и в модели.

Для построения этих моделей могут использоваться **методы прямой аналогии** (например, гидравлическая модель для изучения межотраслевого баланса, электрическая модель для изучения циркуляции денежных потоков) и **машинное моделирование**.

**Метод прямой аналогии (МПА)** основан на одинаковости математического описания многих электрических, механических, тепловых, гидродинамических и других явлений (например, закон Ома для электрической цепи и закон Фурье для теплового потока).

МПА имитирует физическую систему по ее элементам таким образом, что каждому физическому элементу природы соответствует определенный эквивалент в модели. В МПА, как и в физических моделях, происходит расчленение исследуемой системы на составляющие ее физические элементы.

**Метод машинного моделирования** использует другой подход. Его применение связано с расчленением математического описания исследуемой системы на отдельные математические операции. При этом могут использоваться различные классы вычислительных машин: *аналоговые (АВМ), цифровые (ЦВМ) и аналого-цифровые (АЦВМ).*

**Метод полунатурного моделирования (ПНМ)** состоит в том, что на определенном этапе исследования одна часть системы (например, объект управления) замещается моделью, а другая часть (устройство управления) остается натурной. В процессе разработки системы модели отдельных устройств могут заменяться реальными блоками.

# Кибернетические модели

Известно, что первые успехи кибернетики связаны с развитием систем автоматического регулирования (САР). В это время сформировались многие фундаментальные понятия, такие, как: *обратная связь, структурно-графовые модели систем, частотные методы расчета и проектирования систем обработки информации.*

Большое влияние на кибернетику оказала *статистическая физика*, вероятностные методы которой были перенесены и развиты в *теории массового обслуживания и надежности, теории игр* и в *теории распознавания образов*. Эти модели образуют **класс вероятностных моделей**.

**Модели дискретной математики** содержат модели в виде *графов, автоматов, лингвистических и логических структур.*

**По степени универсальности** кибернетические модели условно делятся на три типа:

- 1. модели, не зависящие от предметной области (ПО);*
- 2. модели ориентированные на ПО;*
- 3. модели, настраиваемые на ПО.*

**Модели не зависящие от ПО** так называемые, автономные или синтаксические модели, являются наиболее универсальными. Примерами таких моделей могут служить модели массового обслуживания.

**Модели систем массового обслуживания (СМО)** являются одной из разновидностей вероятностных моделей и характеризуются случайным законом изменения входных воздействий и параметров системы. Они зависят от типа этого закона и структуры системы, но никак не связаны с природой моделируемого объекта (например, управление пассажиропотоками, обслуживание клиентов, передача пакетов по каналам связи).

**Модели ориентированные на ПО** применяются в тех случаях, когда реальные системы обладают только им присущей индивидуальностью. В этом случае необходимо, чтобы в модели присутствовала ПО. Кроме того, это связано еще с требованием семантического (логического или смыслового) и прагматического (целевого) управления. Задачи семантической и прагматической обработки информации не могут быть решены без ориентации на предметную область.

Примером такой модели может служить **ситуационная модель** управления сложной системой (типа аэропорт Пулково). При ситуационном управлении в результате сбора, накопления и формализации знаний об объекте управления и способах управления им вырабатываются правила типа «ситуация - решение по управлению».

**Настраиваемые модели** занимают промежуточное положение между независимыми и ориентированными на ПО моделями.

Примерами таких моделей могут служить *оболочки экспертных систем*. С помощью таких оболочек можно решать определенные задачи (диагностики, мониторинга, проектирования и т.д.) в различных предметных областях. Перед их применением с помощью специалистов-экспертов остается заполнить базу знаний.

**База знаний** - семантическая модель, предназначенная для представления в ЭВМ знаний накопленных людьми в определенной предметной области.

**Имитационное моделирование** используется в тех случаях, когда аналитические методы оказываются малопригодными из-за большой размерности и сложности решаемых задач. Проблема заключается в том, что многочисленные допущения, которые вынужден делать исследователь в этом случае для упрощения задачи, делают аналитическую модель неадекватной реальной системе. Имитационная модель позволяет более полно учитывать особенности реальной системы и в то же время обладает достаточной точностью.

Процесс создания имитационной модели, как правило, включает три стадии:

1. составление вербальной модели системы с помощью естественного и/или специальных языков;
2. составление формализованной модели на основании словесного описания;
3. реализация модели на ЭВМ с помощью специальных программных средств и/или языков моделирования

**Модели систем искусственного интеллекта (СИИ)** возникли в связи с желанием и необходимостью повысить «интеллектуальность» разрабатываемых систем управления, наделить машины способностью принимать решения аналогично тому, как это делает человек.

В настоящее время в психологии мышления существуют ***несколько моделей творческой деятельности.***

**В лабиринтной модели** переход от постановки задачи к решению проходит через лабиринт возможных альтернативных путей. Но не всякая творческая задача сводится к такой схеме, кроме того, возможностей может быть слишком много и их не в состоянии за приемлемое время перебрать даже самая быстрая ЭВМ. В этом случае кроме (или вместо) процедуры целенаправленного поиска требуется, использовать другие процедуры.

**Ассоциативная модель** мышления в качестве основной процедуры использует ассоциативный поиск и ассоциативное рассуждение. Ассоциативное рассуждение позволяет переносить приемы, уже использованные ранее, на текущую ситуацию. Ассоциативные модели в целом не получили широкого распространения, но успешно используются в задачах распознавания образов, в классификационных задачах, для самообучения ЭВМ.

**Модельная гипотеза** опирается на идею внутреннего представления человеком проблемной области, на его знания о ее особенностях, закономерностях и процедурах действия в ней. В модельной гипотезе основными процедурами являются: *представление знаний, моделирование рассуждения, поиск релевантной информации* и некоторые другие. Эти процедуры в совокупности с процедурами целенаправленного и ассоциативного поиска составляют основу СИИ.

# Компьютерное моделирование



После прохождения этих этапов наиболее полно могут быть выполнены требования, предъявляемые к моделям:

***Универсальность*** — характеризует полноту отображения моделью изучаемых свойств реального объекта;

***Адекватность*** — способность отражать нужные свойства объекта с погрешностью не выше допустимой;

***Точность*** — оценивается степенью совпадения значений характеристик реального объекта со значениями этих характеристик, полученных с помощью моделей;

***Экономичность*** — определяется затратами ресурсов ЭВМ (памяти и времени на ее реализацию и эксплуатацию).

***Качество моделирования*** может быть оценено характеристикой его потребительских свойств:

- эффективность использования его по назначению (цели);
- ресурсоемкость;
- стоимость.

# КАЧЕСТВО МОДЕЛИРОВАНИЯ

## ЭФФЕКТИВНОСТЬ

Корректность и  
точность

Понятность  
алгоритма

Сложность  
алгоритма

Уровень сложности  
алгоритмического  
языка

Устойчивость  
результатов

## РЕСУРСОЕМКОСТЬ

Требуемый объем памяти

Количество оборудования

Объем требуемого  
информационного  
обеспечения

Количество личного  
состава

Объем выходных  
данных

## СТОИМОСТЬ

Затраты на  
разработку

Затраты на  
приобретение  
ресурсов

Затраты на  
сопровождение и  
эксплуатацию

Другие виды  
затрат

# Сложные системы и декомпозиция

Системный анализ родился как метод исследования и проектирования сложных систем.

Что же такое "сложная" система?

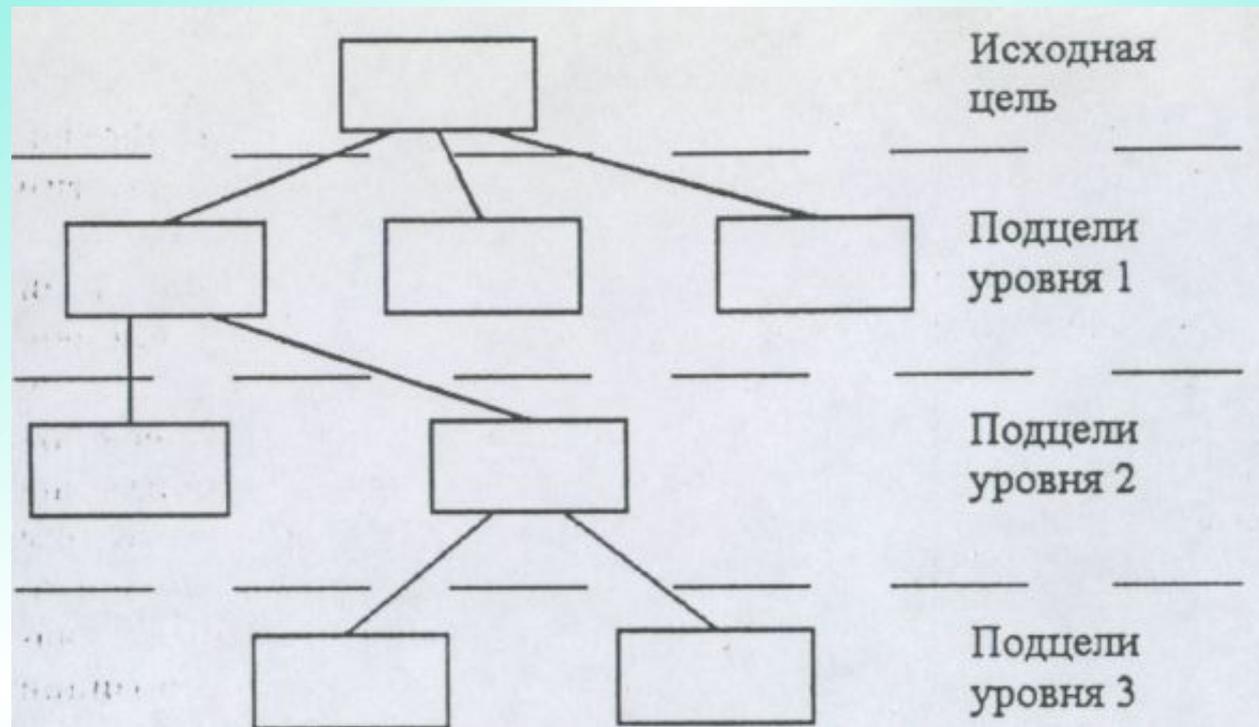
Понятие это неформальное, и обычно, говоря о сложных системах, перечисляют их основные особенности:

1. наличие большого числа разнородных элементов (подсистем);
2. сложный характер, неоднородность связей между подсистемами;
3. сложность функций, выполняемых системой;
4. наличие неопределенности в описании системы;
5. сложность определения (организации) требуемого управляющего воздействия на систему и т.д.

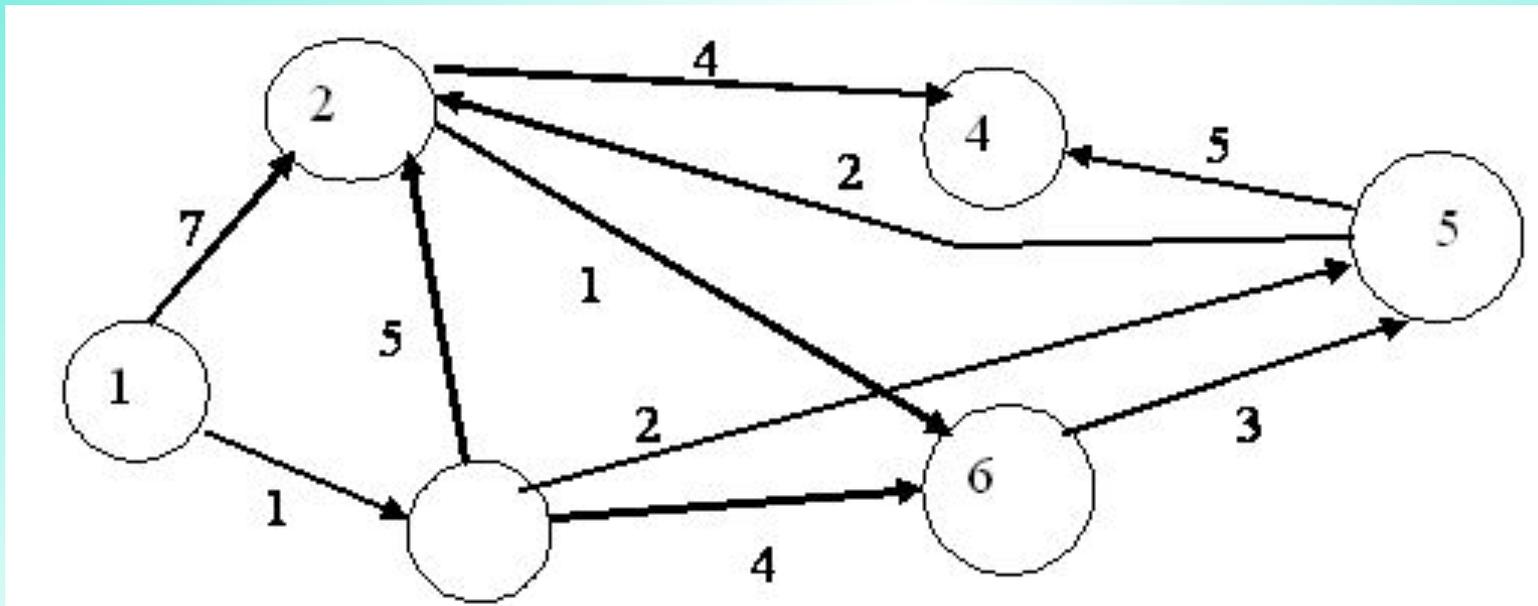
Каждая из этих особенностей может оказаться существенной или несущественной: все зависит от конкретной ситуации и целей исследования. Поэтому более универсальный способ выделения класса сложных систем связан со сложностью самого процесса исследования системы. Если методика математического моделирования приводит к успеху сразу же, "за один проход", то нет оснований называть систему "сложной".

Введение этого термина оправдано, если решить задачу в исходном виде не удастся. В этом случае она разбивается на несколько вспомогательных подзадач, решаемых по отдельности. Такой прием называется **декомпозицией** и является основным методом исследования сложных систем.

При декомпозиции исходная система делится на подсистемы, а цель - на подцели. Далее для решения каждой подзадачи пользуются той же методикой, что и для всей системы. Если в ходе решения (а возможно, и до того) какие-то из подзадач окажутся слишком сложными, то снова проводится декомпозиция: возникают подзадачи следующего уровня и т.д. Результатом этого процесса является структуризация: исходная система приобретает иерархическую (многоуровневую) структуру.

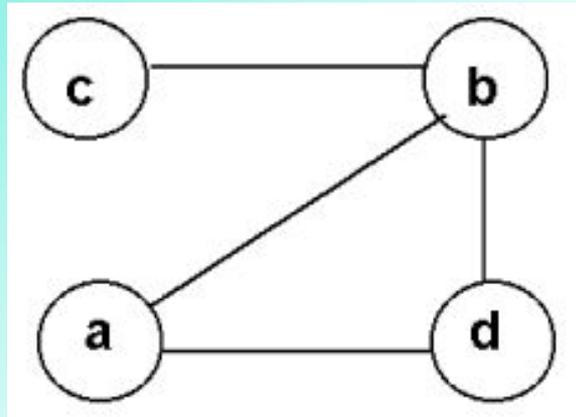


Каждой сложной системе ставится в соответствие граф (*структурный*), вершинами которого являются подсистемы, а дугами - имеющиеся между ними связи. Если связи направленные, то граф системы является **ориентированным** (*направленным*). К этому классу относятся, например, структурные схемы (*граф-схемы*) систем автоматического управления.



Модели на основе направленных графов (модели программ VisSim, Simulink, MBTU).

У других систем влияние связанных подсистем обоюдное и они описываются неориентированными графами (например, сложные электрические и электронные схемы).



Модели на основе ненаправленных графов (модели программы Electronics Workbench).

## По виду направленного графа:

1. Модели с последовательным графом (ПФ разложена на множители).
2. Модели с параллельным графом (ПФ разложена на элементарные дроби).
3. Модели на основе одного из двух универсальных графов, которые соответствуют стандартной форме записи передаточной функции.
4. Модели с графами, специфика которых учитывает эффект квантования параметров.
5. Модели с матричными графами (ABCD-граф или граф для решения уравнений в форме Коши).

В сложных системах часто приходится проводить несколько вариантов декомпозиции и соответственно строить несколько деревьев целей. Это - обычно связано с наличием нескольких критериев функционирования системы. Возникающие при этом задачи многокритериального выбора изучаются в теории принятия решений. Успех декомпозиции часто определяется интуицией и опытом исследователя. Человек, по данным психологов, может мысленным взором охватить структуру декомпозированной системы, если на каждом уровне возникает не более чем  $5 \pm 2$  подзадачи.

## ***Непрерывно-детерминированные модели (D-схемы)***

В качестве математических моделей в *D*-схемах (от английского *dynamic*) используются дифференциальные уравнения.

*Дифференциальными уравнениями* называются такие уравнения, в которых неизвестными будут функции одной или нескольких переменных, причем в уравнение входят не только функции, но и их производные различных порядков. Если неизвестные – функции многих переменных, то уравнения называются уравнениями в частных производных, в противном случае при рассмотрении функций только одной независимой переменной уравнения называются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Обычно в таких математических моделях в качестве независимой переменной, от которой зависят неизвестные искомые функции, служит время  $t$ .

Тогда математическое соотношение для детерминированных систем в общем виде будет

$$\begin{cases} \bar{y}' = \bar{f}(\bar{y}, t), \\ \bar{y}(t_0) = \bar{y}_0, \end{cases}$$

где  $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$   $n$ -мерный вектор,

$\bar{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$   $n$ -мерная функция.

Задачей системы является изменение выходной переменной (выходного сигнала)  $y(t)$  согласно заданному закону с определенной точностью (с допустимой ошибкой). При проектировании и эксплуатации систем автоматического управления необходимо выбрать такие параметры системы, которые обеспечили бы требуемую точность управления, а также устойчивость системы в переходном процессе.

Если система устойчива, то представляет практический интерес поведение системы во времени, максимальное отклонение регулируемой переменной  $y(t)$  в переходном процессе, время переходного процесса и т. п. Выводы о свойствах систем автоматического управления различных классов можно сделать по виду дифференциальных уравнений, приближенно описывающих процессы в системах. Порядок дифференциального уравнения и значения его коэффициентов полностью определяются статическими и динамическими параметрами системы

# Дискретно-детерминированные модели ( $F$ -схемы)

При использовании такого рода моделей система представляется в виде автомата, перерабатывающего дискретную информацию и меняющего свои внутренние состояния лишь в допустимые моменты времени. Автомат можно представить как некоторое устройство (черный ящик), на которое подаются входные сигналы и снимаются выходные и которое может иметь некоторые внутренние состояния.

Конечным автоматом называется автомат, у которого множество внутренних состояний и входных сигналов (а следовательно, и множество выходных сигналов) являются конечными множествами.

Абстрактно конечный автомат (англ. finite automata) можно представить как математическую схему ( $F$ -схему), характеризующуюся шестью элементами:

- конечным множеством  $X$  входных сигналов (входным алфавитом);
- конечным множеством  $Y$  выходных сигналов (выходным алфавитом);
- конечным множеством  $Z$  внутренних состояний (внутренним алфавитом или алфавитом состояний);
- начальным состоянием  $z_0$ , функцией переходов  $\Phi(z, x)$ , функцией выходов  $\Psi(z, x)$ .

Автомат, задаваемый  $F$ -схемой, функционирует в дискретном автоматном времени, моментами которого являются такты, т. е. примыкающие друг к другу равные интервалы времени. Изменение состояния автомата и выходного сигнала может произойти только в тактовые моменты.

Таким образом, работа конечного автомата происходит по следующей схеме: в каждом  $t$ -м такте на вход автомата, находящегося в состоянии  $z(t)$ , подается некоторый сигнал  $x(t)$ , на который он реагирует переходом в  $(t+1)$ -м такте в новое состояние  $z(t+1)$  и выдачей некоторого выходного сигнала. Это можно описать следующими уравнениями:

$$z(t+1) = \Phi[z(t), x(t)], t=0, 1, 2 \dots;$$
$$y(t) = \Psi[z(t), x(t)], t=0, 1, 2 \dots .$$

Различают два вида конечных автоматов. Приведенные выше уравнения описывают работу автомата первого рода, называемого также автоматом Мили.

# Задание конечного автомата Мили

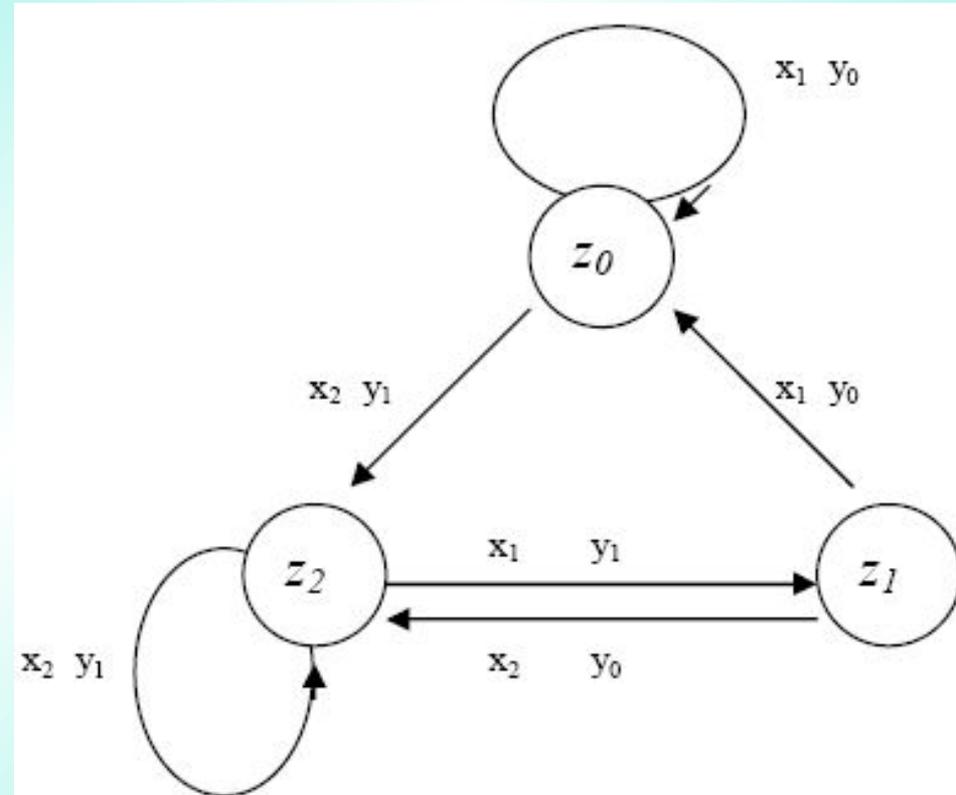
Функция переходов  $z_j = \Phi(z_i, x_k)$

Входной сигнал	Состояния		
	$z_0$	$z_1$	$z_2$
$x_1$	$z_0$	$z_0$	$z_1$
$x_2$	$z_2$	$z_2$	$z_2$

Функция выходов  $y_j = \Psi(z_i, x_k)$

Входной сигнал	Состояния		
	$z_0$	$z_1$	$z_2$
$x_1$	$y_0$	$y_0$	$y_1$
$x_2$	$y_1$	$y_0$	$y_1$

табличный способ



с помощью графа

Для F-автомата второго рода

$$\begin{aligned}z(t+1) &= \Phi[z(t), x(t)], \quad t=0, 1, 2 \dots; \\y(t) &= \Psi[z(t), x(t-1)], \quad t=1, 2, 3 \dots\end{aligned}$$

Автомат второго рода, для которого функция выходов не зависит от входной переменной  $x(t)$  называется автоматом Мура. Для него

$$\begin{aligned}z(t+1) &= \Phi[z(t), x(t)], \quad t=0, 1, 2 \dots; \\y(t) &= \Psi[z(t)], \quad t=1, 2, 3 \dots\end{aligned}$$

По числу состояний различают конечные автоматы с памятью и без памяти. Автоматы с памятью имеют более одного состояния, а автоматы без памяти (комбинационные или логические схемы) обладают лишь одним состоянием. При этом работа комбинационной схемы заключается в том, что она ставит в соответствие каждому входному сигналу  $x(t)$  определенный выходной сигнал  $y(t)$ .

Чтобы задать конечный F-автомат, необходимо описать все элементы множества  $F = (Z, X, Y, \Phi, \Psi)$ , т. е. входной, внутренней и выходной алфавиты, а также функции переходов и выходов. Причем среди множества состояний необходимо выделить состояние  $z_0$ , в котором автомат находился в момент времени  $t = 0$ . Существуют несколько способов задания работы F-автоматов, но наиболее часто используются табличный, графический и матричный.

Простейший табличный способ задания конечного автомата основан на использовании таблиц переходов и выходов, строки которых соответствуют входным сигналам автомата, а столбцы — его состояниям. При этом обычно первый слева столбец соответствует начальному состоянию  $z_0$ . На пересечении  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца таблицы переходов помещается соответствующее значение  $\Phi(z_k, x_i)$  функции переходов, а в таблице выходов — соответствующее значение  $\Psi(z_k, x_i)$  функции выходов. Для  $F$ -автомата Мура обе таблицы можно совместить, получив так называемую отмеченную таблицу переходов, в которой над каждым состоянием  $z_k$  автомата, обозначающим столбец таблицы, стоит соответствующий этому состоянию выходной сигнал  $\Psi(z_k)$ .

При другом способе задания конечного автомата используется понятие направленного графа. Граф автомата представляет собой набор вершин, соответствующих различным состояниям автомата и соединяющих вершины дуг графа, соответствующих тем или иным переходам автомата.

Если входной сигнал  $x_k$  вызывает переход из состояния  $z_i$  в состояние  $z_j$ , то на графе автомата дуга, соединяющая вершину  $z_i$  с вершиной  $z_j$ , отмечается сигналом  $x_k$ . Для того чтобы задать функцию выходов, дуги графа необходимо отметить соответствующими выходными сигналами  $\Psi(z_i, x_k)$ .

Для автомата Мура выходные сигналы связаны только с состояниями и поэтому значениями  $\Psi(z_k)$  отмечают соответствующие вершины графа.

# Задание конечного автомата Мура

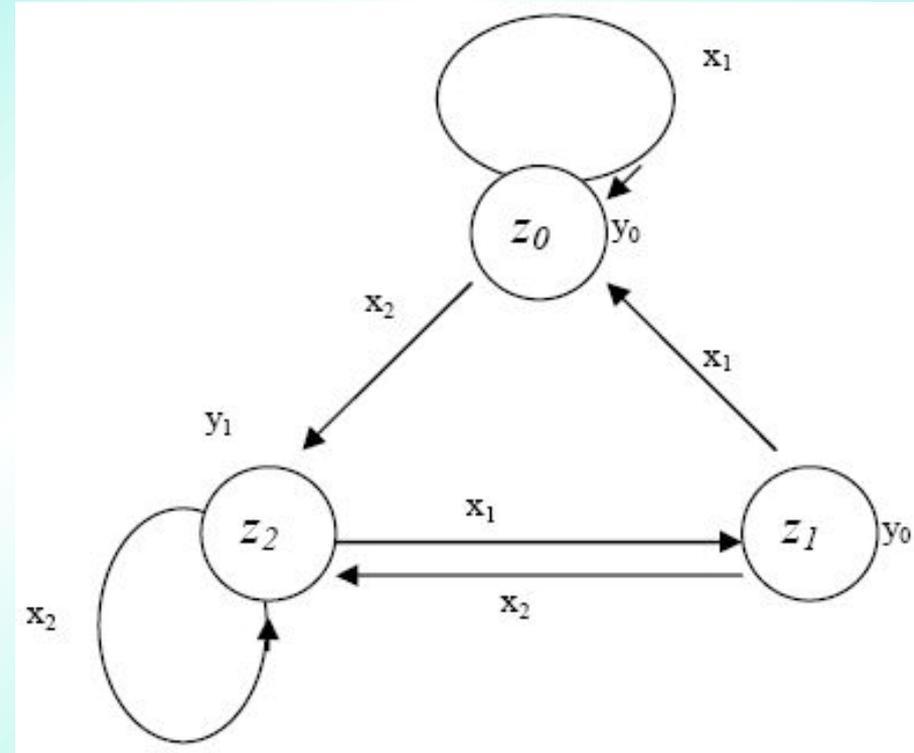
Функция переходов  $z_j = \Phi(z_i, x_k)$

Входной сигнал	Состояния		
	$z_0$	$z_1$	$z_2$
$x_1$	$z_0$	$z_0$	$z_1$
$x_2$	$z_2$	$z_2$	$z_2$

Функция выходов  $y_j = \Psi(z_i)$

Состояния		
$z_0$	$z_1$	$z_2$
$y_0$	$y_0$	$y_1$

табличный способ



с помощью графа

# Дискретно-стохастические модели ( $P$ -схемы)

В общем виде *вероятностный автомат* (англ. probabilistic automat) можно определить как дискретный потактный преобразователь информации с памятью, функционирование которого в каждом такте зависит только от состояния памяти в нем и может быть описано статистически.

Сущность дискретизации времени при этом подходе остается аналогичной рассмотренным ранее конечным автоматам, но при этом добавляется влияние фактора стохастичности. Применение схем вероятностных автоматов ( $P$ -схем) имеет важное значение для разработки методов проектирования дискретных систем, проявляющих статистически закономерное случайное поведение, для выяснения алгоритмических возможностей таких систем и обоснования границ целесообразности их использования, а также для решения задач синтеза по выбранному критерию дискретных стохастических систем, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Для того, чтобы задать вероятностный автомат надо, как и для конечного автомата определить множество  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  ВХОДНЫХ сигналов, множество  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_r)$  ВЫХОДНЫХ сигналов и  $Z = (z_1, z_2, \dots, z_s)$  внутренних состояний. Описание процесса функционирования автомата осуществляется путем задания ряда распределений вероятностей.

Рассмотрим множество  $G$  пар  $(x_i z_j)$  и множество  $D$  пар  $(z_k y_h)$ . Для задания вероятностного автомата надо определить для каждой пары из множества  $G$  вероятности  $b_{kh}$  перехода автомата в состояние  $Z_k$  и появления на выходе сигнала  $V_h$  :

Элементы из $D$	$(z_1 y_1)$	$(z_2 y_2)$	...	$(z_s y_{r-1})$	$(z_s y_r)$
$x_i z_j$	$b_{11}$	$b_{12}$	...	$b_{sr-1}$	$b_{sr}$

При этом  $\sum_{k=1}^s \sum_{h=1}^r b_{kh} = 1.$

Число таких распределений, представленных в виде таблиц, равно числу элементов множества  $G$ . Обозначим множество таких распределений как  $B$ . Тогда совокупность множеств  $Z, X, Y, B$  определяет вероятностный автомат.

Это наиболее общий случай. Если распределения для нового состояния  $P$ -автомата и его выходного сигнала независимы, то это вероятностный автомат Мили. Для его задания надо определить множества распределений

элементы из $Y$	$y_1$	$y_2$	$\dots$	$y_{r-1}$	$y_r$
$x_i z_j$	$q_1$	$q_2$	$\dots$	$q_{r-1}$	$q_r$
элементы из $Z$	$z_1$	$z_2$	$\dots$	$z_{s-1}$	$z_s$
$x_i z_j$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{s-1}$	$p_s$

Число таких распределений равно числу элементов множества  $G$ .  
 Говорят, что задан вероятностный автомат Мили, если заданы два распределения вероятностей

элементы из $Y$	$y_1 y_2 y_3 \dots y_Y$
$(x_i z_\xi)$	$q_1 q_2 q_3 \dots q_Y$

элементы из $Z$	$z_1 z_2 z_3 \dots z_k$
$(x_i z_\xi)$	$p_1 p_2 p_3 \dots p_k$

Где  $\sum_{k=1}^Y q_k = 1, \sum_{k=1}^k p_k = 1$  при этом распределения для  $q$  и  $p$

независимы.

Вероятностный автомат Мура имеет место, если определение выходного сигнала  $P$ -автомата зависит лишь от того состояния, в котором находится автомат в данном такте работы, а элементы из  $Z$  определяются как у автомата Мили.

Детерминированные автоматы это частный случай  $P$ -автомата. Также частными случаями являются  $Y$  – детерминированный и  $Z$  – детерминированные автоматы. Если выходной сигнал  $P$  - автомата определяется детерминировано, то такой автомат называется  $Y$ -детерминированным вероятностным автоматом. Аналогично,  $Z$ -детерминированным вероятностным автоматом называется  $P$  - автомат, у которого выбор нового состояния является детерминированным.

# Марковский случайный процесс

Пусть имеется некоторая система, состояние которой может меняться с течением времени. Если состояние меняется случайным, непредсказуемым образом, будем говорить, что в системе протекает случайный процесс.

**Случайный процесс называется процессом с дискретными состояниями**, если возможные состояния системы:

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

можно перечислить (пронумеровать) одно за другим, а сам процесс состоит в том, что время от времени система скачком (мгновенно) переходит из одного состояния в другое.

**Случайный процесс называется процессом с дискретным временем**, если переходы из состояния в состояние возможны только в строго определенные моменты времени. В промежутках между этими моментами система сохраняет свое состояние.

**Случайный процесс называется процессом с непрерывным временем**, если переход системы из состояния в состояние возможен в любой наперед неизвестный, случайный момент.

**Случайный процесс, протекающий в системе, называется *марковским процессом*** (цепь Маркова) или процессом без последствия, если для каждого момента времени  $t_j$  вероятность любого последующего состояния системы зависит только от текущего состояния и не зависит от того, когда и каким путем система пришла в это состояние (т.е. от того, как развивался процесс в прошлом).

Иными словами, воздействие всей предыстории процесса на его будущее полностью сосредоточено в текущем значении процесса. Отсюда следует, что цепь Маркова должна обладать свойством отсутствия последствия. Это означает, что вероятность перехода в следующее состояние не должна зависеть от того, сколько времени процесс пребывал в текущем состоянии.

При моделировании систем, в которых случайные события, приводящие к изменению состояний, могут происходить только в моменты времени, отстоящие друг от друга на величину, кратную значению тактового интервала  $T$  (*дискретно – стохастические модели*), для описания интервалов времени между событиями используют регулярный просеянный поток. Его можно получить, удаляя в регулярном потоке события с вероятностью  $q$  и оставляя с вероятностью  $1-q$ . **Просеянный поток иногда называют дискретным пуассоновским**, так как его свойства аналогичны для моментов времени, кратных периоду  $T$ , свойствам простейшего потока. К просеянному регулярному потоку приводит, например регулярный поток данных, передаваемый по каналам связи с контролем наличия сбоев в передаваемом коде и исправлением путем повторной передачи.

Вероятность того, что величина интервала между событиями в просеянном потоке окажется равным  $i$  тактам:

$$P_i = q^{i-1} (1 - q)$$

Это выражение соответствует геометрическому распределению.

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение для интервала времени между событиями в таком потоке равны соответственно:

$$m = \frac{T}{1 - q}$$

$$\sigma = m \sqrt{q} = \frac{T \sqrt{q}}{1 - q}$$

Если число состояний системы конечно и из каждого состояния можно перейти (за то или иное число шагов) в любое другое, то существуют предельные (финальные) вероятности состояний, которые не зависят от времени и начального состояния системы. Сумма предельных вероятностей всех состояний системы равна единице:

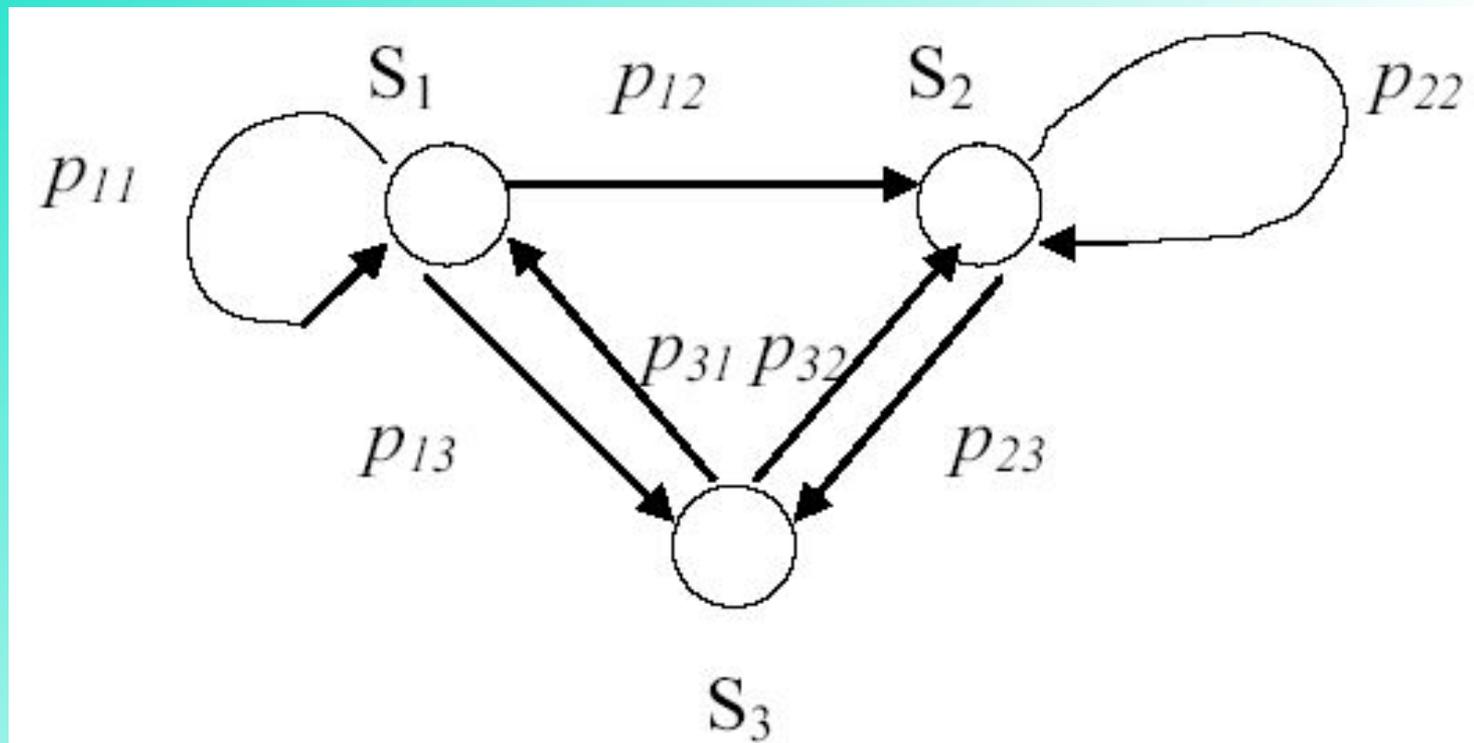
$$\sum_{i=1}^n P_i = 1.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  в системе устанавливается некоторый предельный **стационарный режим**, который состоит в том, что система случайным образом меняет свои состояния, но вероятность каждого из них уже не зависит от времени. Эта вероятность представляет собой не что иное, как относительное время пребывания системы в данном состоянии.

При моделировании систем процесс их функционирования удобно представлять в виде графа, вершинами которого являются состояния  $S_i$ , а направленные дуги описывают переходы между состояниями. Если процесс является марковским и известны вероятности переходов из состояния в состояние, то вероятности состояний  $P_i$  могут быть найдены исходя из того, что вероятность любого состояния  $S_i$  равна сумме произведений вероятностей состояний  $S_j$ , из которых есть переход в данное состояние на вероятности этих переходов  $p_{ji}$ , т.е

$$P_i = \sum_j P_j p_{ji}$$

Рассмотрим на примере эту процедуру.



Система может находиться в одном из трех состояний:  $S_1$ ,  $S_2$  или  $S_3$ .

Систему уравнений для определения вероятностей состояний:

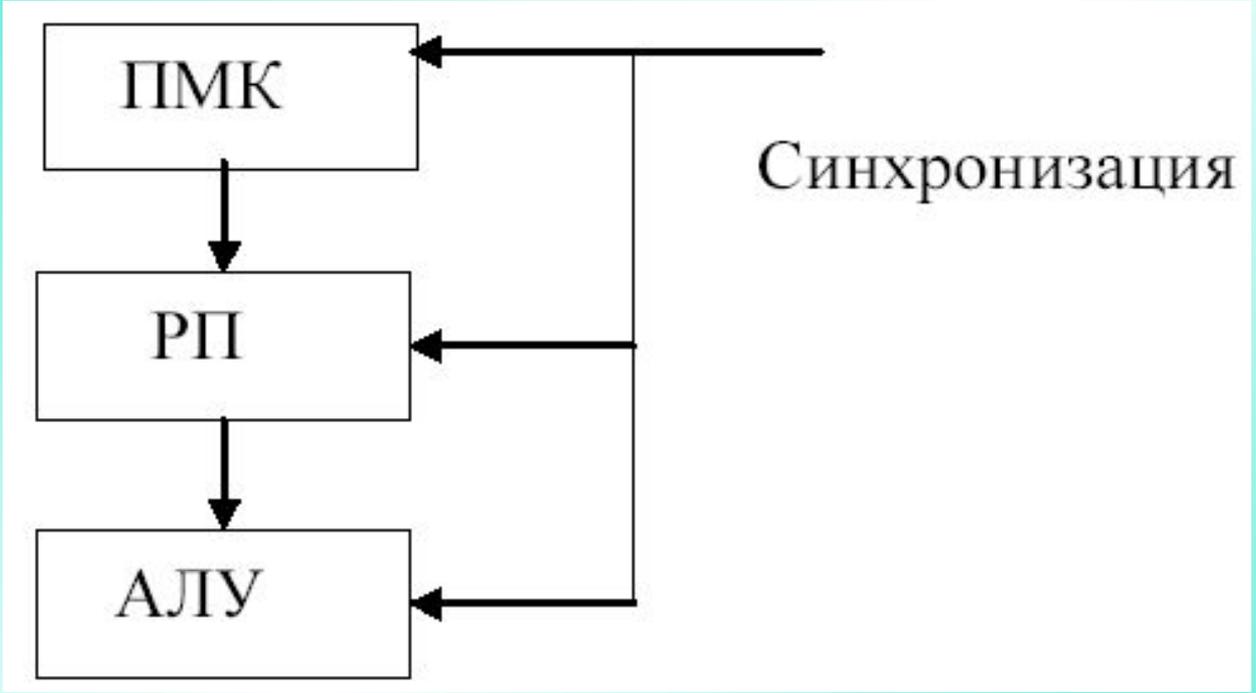
$$\begin{aligned} P_1 &= p_{11}P_1 + p_{31}P_3 ; \\ P_2 &= p_{12}P_1 + p_{32}P_3 + p_{22}P_2 ; \\ P_3 &= p_{13}P_1 + p_{23}P_2 . \end{aligned}$$

Попытка решить эту систему непосредственно неизбежно приведет к тождеству. Но решение существует и может быть получено, если воспользоваться нормировочным уравнением

$$P_1 + P_2 + P_3 = 1.$$

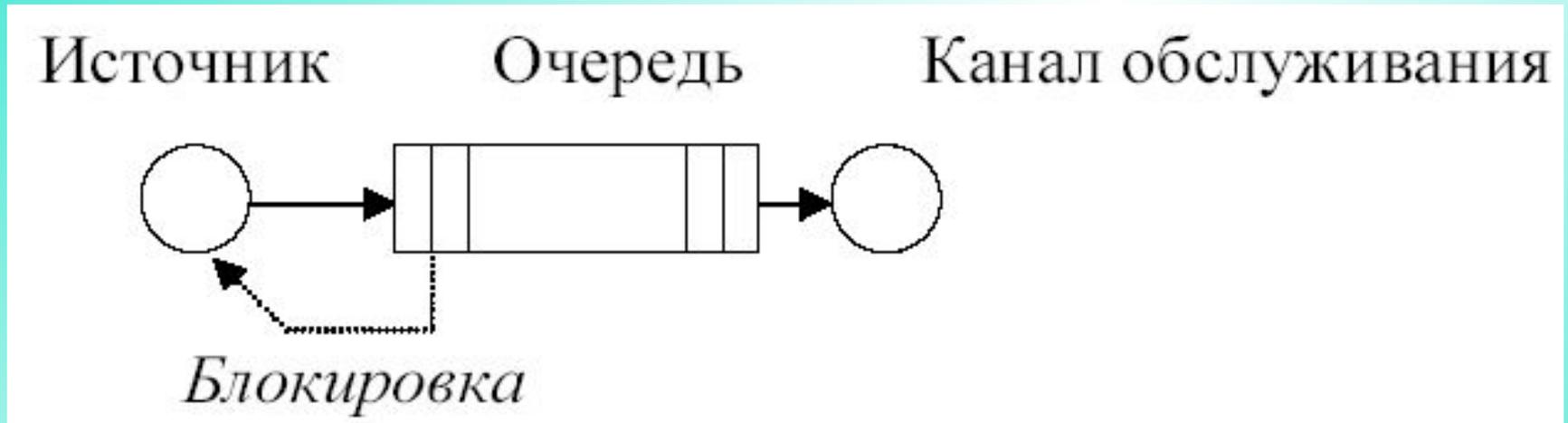
Если подставить его вместо одной из строк системы, то можно будет получить значение вероятностей состояний.

Рассмотрим пример исследования вычислительного узла с использованием аппарата Марковской дискретной цепи.



Из памяти макрокоманд (МК) по синхросигналу через каждые два такта в арифметико-логическое устройство (АЛУ) считываются макрокоманды. Если АЛУ готово принять макрокоманду, она обрабатывается, иначе макрокоманда загружается в регистровую память (РП) объемом  $N$  ячеек (мест ожидания) и ожидает освобождения АЛУ. При полном заполнении РП макрокоманда блокируется в памяти макрокоманд и процесс дальнейшей выборки приостанавливается. Интервалы времени обработки макрокоманд в АЛУ случайны и имеют геометрическое распределение с параметром  $\Pi$ , т.е. с вероятностью  $(1 - \Pi)$  обработка макрокоманды в АЛУ по окончании очередного тактового интервала завершится, а с вероятностью  $\Pi$  продлится еще на один интервал.

При построении и исследовании модели будем пользоваться представлением данного устройства как системы массового обслуживания (СМО).



Т.к. поток обслуживаний представляет собой просеянный регулярный поток, то процесс будет марковским, и мы можем определить финальные вероятности состояний этой системы.

Будем определять состояние системы трехкомпонентным вектором:

$jt_1t_2$ .

Комбинаторная составляющая этого вектора  $j$  - количество заявок, находящихся в накопителе (длина очереди),  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

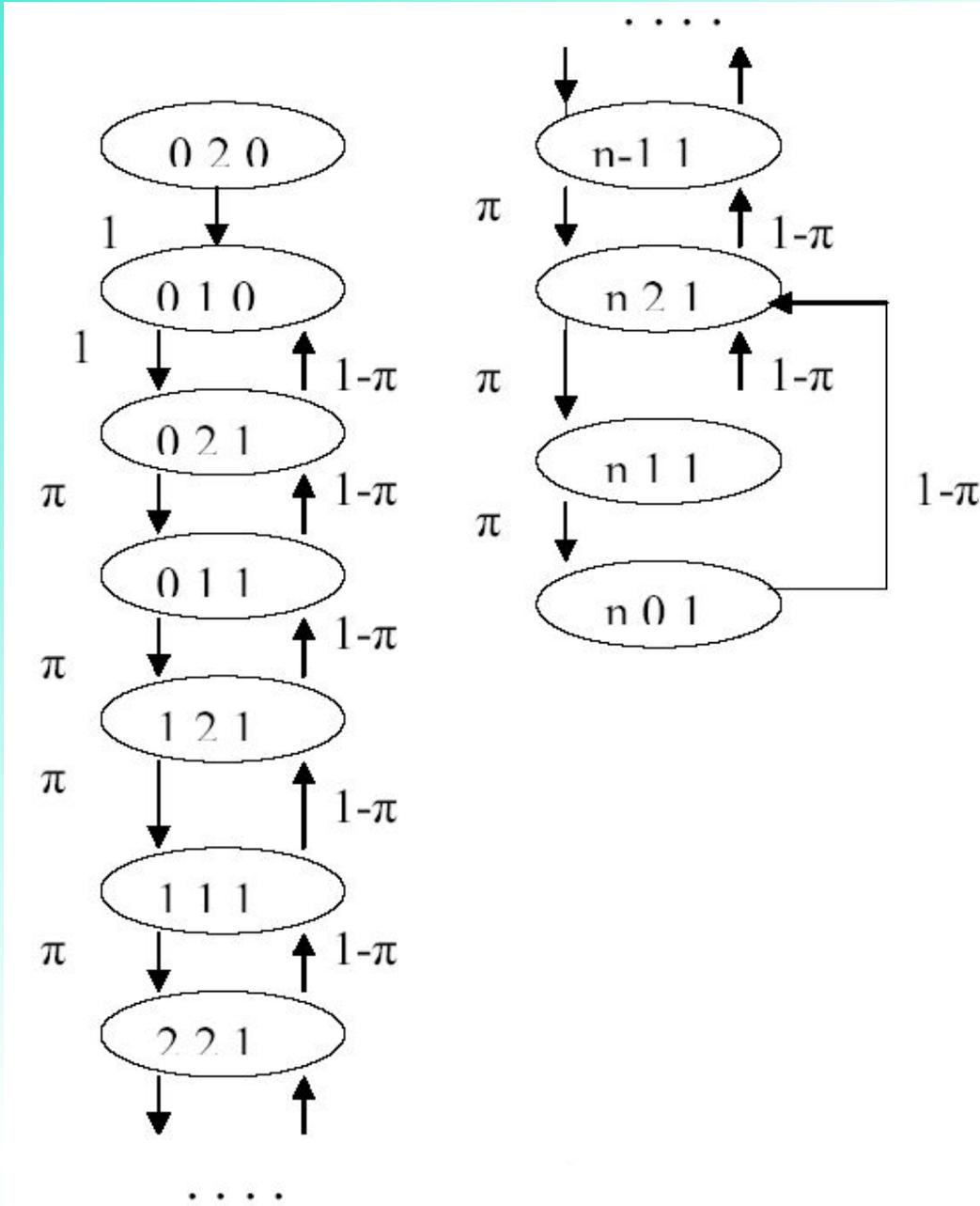
Временная составляющая  $t_1$  - число тактов, оставшихся до появления заявки на выходе источника ( $t_1 = 0, 1, 2$ ). Значение 0 означает, что источник заблокирован.

Составляющая  $t_2$  определяет состояние канала обслуживания (АЛУ) и может принимать два значения:

$t_2 = 0$  - канал свободен;

$t_2 = 1$  - канал занят обслуживанием заявки.

# Построим граф



система уравнений для стационарных (финальных) вероятностей состояний  $P_{jt_1t_2}$ .

В состояние  $P_{020}$  система больше не вернется, поэтому  $P_{020} = 0$ .

$$1. P_{010} = (1 - \pi)P_{021} + P_{020}$$

$$2. P_{021} = (1 - \pi)P_{011} + P_{010}$$

$$3. P_{i21} = \pi P_{i-111} + (1 - \pi)P_{i11} \quad (i = \overline{1, n-1})$$

$$4. P_{i11} = (1 - \pi)P_{i+121} + \pi P_{i21} \quad (i = \overline{0, n-1})$$

$$5. P_{n21} = \pi P_{n-111} + (1 - \pi)P_{n11} + (1 - \pi)P_{n01}$$

$$6. P_{n11} = \pi P_{n21}$$

$$7. P_{n01} = \pi P_{n11} + \pi P_{n01}$$

Выполнив преобразования получим, что сумма - это сумма геометрической прогрессии

$$p = \frac{2(1 - \pi) - 1}{2(1 - \pi) - \omega^{2n+2}}.$$

Используя полученное значение  $p$  (фактически, это вероятность простоя АЛУ) и рассчитав вероятности всех остальных состояний, можно найти другие интересующие нас характеристики системы.

а) Среднее время обслуживания заявки системой в целом (время пребывания заявки в системе)  $S$ .

$$S = \frac{T}{1 - \pi} \cdot \frac{1}{1 - P}$$

б) Интенсивность потока обработанных заявок (абсолютная пропускная способность):

$$\lambda = (1 - p)(1 - \pi) \frac{1}{T} ,$$

где  $(1-p)$  – вероятность того, что канал обрабатывал заявку,  $(1-\pi)$  – вероятность того, что обработка закончилась.

в) Средняя длина очереди

$$L_{оч} = \sum_j j P_{jt} \lambda t_2 \cdot$$

# Непрерывно – стохастические модели (Q – схемы)

Особенностью непрерывно – стохастического подхода при моделировании систем и процессов является использование в качестве типовых математических схем систем массового обслуживания (англ. Queueing system).

Системы массового обслуживания представляют собой класс математических схем, разработанных в теории массового обслуживания и различных приложениях для формализации процессов функционирования систем, которые по своей сути являются процессами обслуживания.

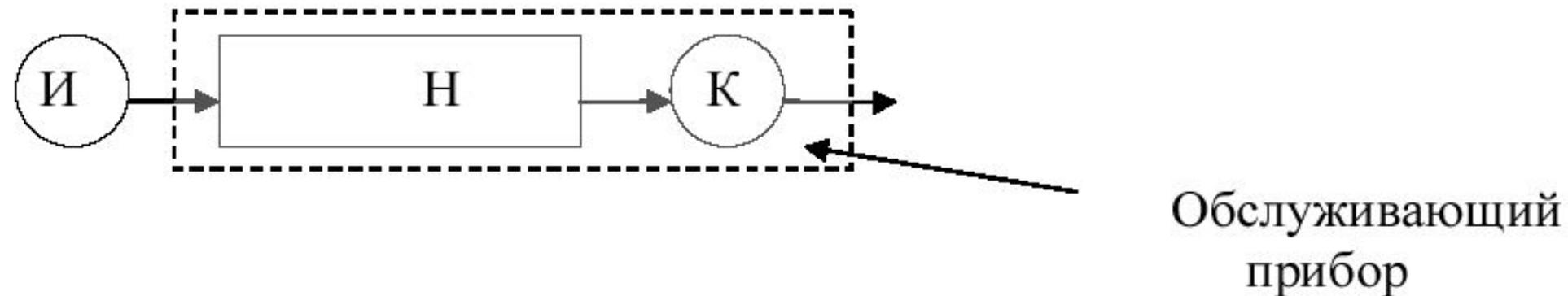
# Системы массового обслуживания. Поток событий

Реальные системы могут быть представлены при моделировании как системы массового обслуживания (СМО), если при их функционировании можно выделить два процесса - поступление заявок на обслуживание и обслуживание заявок. Таким образом могут быть представлены различные по своей физической природе процессы – экономические, технические, производственные и т.п.

Для описания работы СМО используется понятие *поток событий* – последовательность событий, происходящих одно за другим в некоторые моменты времени.

В СМО будем выделять три потока:

- входной поток: множество моментов времени поступления в систему заявок;
- поток обслуживаний: множество моментов времени окончания обработки системой заявок в предположении, что обслуживание осуществляется непрерывно;
- выходной поток: последовательность моментов времени ухода из системы обслуженных заявок.



И – источник заявок;  
Н – накопитель (очередь);  
К – канал обслуживания.

СМО состоит из какого-то числа обслуживающих единиц, которые называются *каналами обслуживания*.

В зависимости от количества каналов СМО могут быть одноканальными и многоканальными.

СМО могут быть двух типов.

1. *СМО с отказами*. В таких системах заявка, поступившая в момент, когда все каналы заняты, получает отказ и покидает систему не обслуженной.

2. *СМО с ожиданием*. Заявка, заставшая все каналы занятыми, становится в очередь и ожидает освобождения одного из каналов.

Число мест в очереди  $m$  может быть как неограниченным, так и ограниченным. В первом случае заявка может стать в очередь в любой момент, в то время как во втором она вынуждена покинуть систему, если очередь превышает заданную длину в момент прихода заявки или в процессе ожидания.

Порядок выборки заявок из очереди **определяется дисциплиной обслуживания.**

Некоторые наиболее употребляемые дисциплины:

1) FIFO (first in – first out) – в порядке поступления;

2) LIFO (last in – first out) – первой обслуживается заявка, поступившая последней;

3) SIRO (service in random order) – обслуживание в случайном порядке;

4) приоритетные системы – заявки обслуживаются в соответствии с их приоритетами.

Наиболее часто на практике используются следующие правила.

1) Каналы занимаются в порядке их номеров. Канал с большим номером не может быть привлечен к обслуживанию заявки, если имеется свободный канал с меньшим номером.

2) Каналы занимаются в порядке очереди. Освободившийся канал поступает в очередь и не начинает обслуживания заявок до загрузки всех ранее освободившихся каналов.

3) Каналы занимаются в случайном порядке в соответствии с заданными вероятностями.

Реальный процесс функционирования системы массового обслуживания для удобства исследования можно представлять в виде последовательности отдельных актов (фаз) обслуживания, выполняемых различными устройствами. При этом, как правило, соблюдается такой порядок, при котором следующее устройство может приступить к обслуживанию заявки лишь тогда, когда работа предыдущего с данной заявкой полностью закончена.

В частном случае обслуживание может быть однофазным.

Характеристики СМО существенно зависят от вида и параметров входного потока и потока обслуживаний.

**Поток событий называется *однородным***, если он характеризуется только моментами наступления событий и задается последовательностью  $\{t_n\}$ , где

$$\{t_n\} = \{0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq \dots\}.$$

**Поток событий является *неоднородным***, если он задается последовательностью  $\{t_n, f_n\}$ , где  $t_n$  – моменты наступления событий, а  $f_n$  – набор признаков событий (приоритеты, принадлежность тому или иному источнику, тип канала для его обслуживания и т. д.).

**Поток *регулярный***, если события поступают через равные промежутки времени.

**Поток *нерегулярный***, если интервалы между событиями представляют собой случайные величины.

Если промежутки времени между последовательными событиями представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины, **поток называется рекуррентным** (поток Пальма, поток с ограниченным последствием).

Для краткой характеристики СМО Д. Кендалл ввел символику (нотацию):

$$A/B/s/m/k$$

Где:

$s$  - число обслуживающих приборов;

$m$  – количество мест ожидания (если не указано, то считается, что  $m=0$ , т. е. это система с отказами); при неограниченной очереди в качестве  $m$  ставят символ  $\infty$ ;

$k$  – количество источников заявок. Если  $k$  отсутствует, то по умолчанию количество источников предполагается равным одному.

A и B характеризуют соответственно: поток требований и поток обслуживания, задавая функцию распределения интервалов между заявками во входном потоке и функцию распределения времен обслуживания.

A и B могут принимать значения:

D – детерминированное распределение;

M – показательное;

$E_r$  – распределение Эрланга порядка  $r$ ;

$H_r$  - гиперпоказательное;

G – распределение общего вида.

При этом подразумевается, что потоки являются рекуррентными, т.е. интервалы между событиями независимы и имеют одинаковое распределение.

Обязательными в этой нотации являются первые три позиции.

# Простейший поток

**Простейшим называется поток**, обладающий следующими тремя свойствами: стационарность, ординарность и отсутствие последействия.

**Поток является *стационарным***, если вероятность наступления заданного числа событий в течение интервала времени фиксированной длины зависит только от продолжительности интервала и не зависит от его расположения на временной оси. Иначе говоря, вероятностные характеристики и интенсивность такого потока со временем не изменяются.

**Поток является *ординарным***, если вероятность появления двух или более событий в течение элементарного интервала времени  $\Delta t \rightarrow 0$  есть величина бесконечно малая по сравнению с вероятностью появления одного события на этом интервале. Другими словами, два и более событий в таком потоке произойти одновременно не могут.

**Поток называется потоком *без последствия***, если для любых неперекрывающихся интервалов времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие. Иногда это свойство формулируют следующим образом: распределение времени до ближайшего события не зависит от времени наблюдения, т.е. от того, сколько времени прошло после последнего события. Отсутствие последствия в потоке означает, что события, образующие поток появляются в последовательные моменты времени независимо друг от друга.

Для простейшего потока число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени подчиняется закону Пуассона, поэтому его иначе **называют стационарным пуассоновским**.

Вероятность того, что за интервал времени  $T$  в простейшем потоке произойдет ровно  $m$  событий

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$$

Где  $\lambda$  – интенсивность, т.е. среднее число событий в единицу времени.

Вероятность того, что в течении интервала времени  $T$  не произойдет не одного события

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau}.$$

Вероятность того, что за это время произойдет хотя бы одно событие

$$P_{\geq 1}(\tau) = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

При построении и анализе непрерывно – стохастических моделей исследуются вероятности появления или не появления событий в течении элементарного интервала времени  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Функция распределения вероятностей и функция плотности вероятностей имеют вид:

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение для  $T$ :

$$m_T = \sigma_T = \frac{1}{\lambda}$$

Одной из числовых характеристик для потоков является коэффициент вариации – отношение среднего квадратического к математическому ожиданию:

$$v = \frac{\sigma}{m}$$

Для реальных потоков значение этого коэффициента лежит в пределах от 0 до 1. Коэффициент вариации характеризует степень стохастичности, непредсказуемости потока.

Для регулярного потока с равными интервалами между событиями  $U = 0$ . Для простейшего потока  $U = 1$ , то есть этот поток является наиболее стохастичным среди всех потоков.

Простейший поток обладает следующими особенностями:

1. Сумма  $M$  независимых, ординарных, стационарных потоков заявок с интенсивностями  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) сходится к простейшему потоку с интенсивностью, равной сумме интенсивностей исходных потоков при условии, что складываемые потоки оказывают приблизительно одинаково малое влияние на суммарный поток. Сходимость суммарного потока к простейшему осуществляется очень быстро. Практически можно считать, что сложение четырех-пяти стационарных, ординарных, независимых потоков, сравнимых по интенсивности, достаточно для того, чтобы суммарный поток был близок к простейшему.

Таким образом, для выяснения всех свойств суммарного потока достаточно знать лишь интенсивности суммируемых потоков и практически не требуется знать внутреннюю структуру этих потоков.

Простейший поток обладает устойчивостью, состоящей в том, что при суммировании независимых простейших потоков получается снова простейший поток, причем интенсивности складываемых потоков суммируются.

2. Поток заявок, полученный путем случайного разрежения исходного потока, когда каждая заявка с определенной вероятностью  $p$  исключается из потока независимо от того, исключены другие заявки или нет, образует простейший поток с интенсивностью

$$\lambda_p = p \lambda,$$

где  $\lambda$  — интенсивность исходного потока. В отношении исходного потока заявок делается предположение лишь об ординарности и стационарности.

3. Для простейшего потока характерно, что поступление заявок через короткие промежутки времени более вероятно, чем через длинные,— 63% промежутков времени между заявками имеют длину, меньшую среднего периода  $1/\lambda$ .

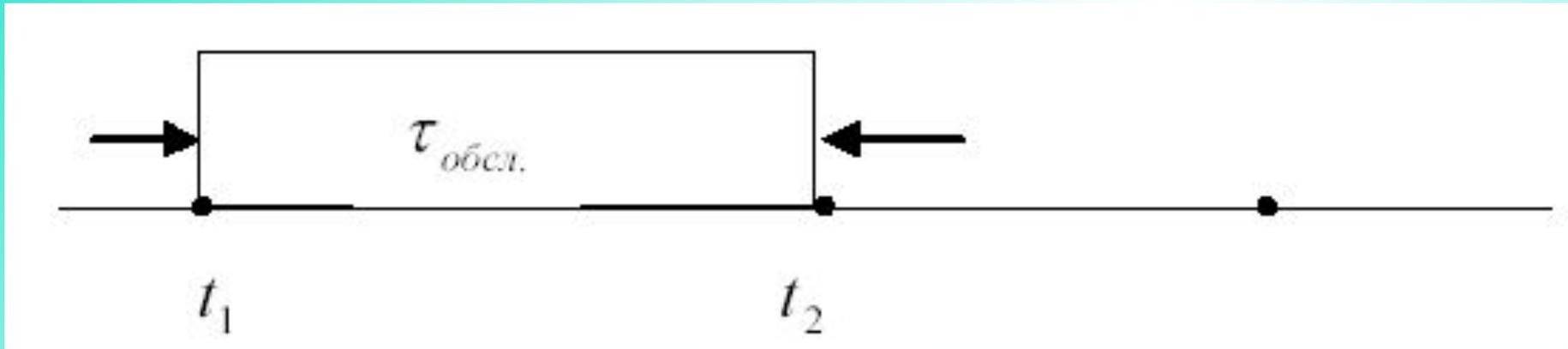
Следствием этого является то, что простейший поток по сравнению с другими видами потоков создает наиболее тяжелый режим работы системы. Поэтому предположение о том, что на вход системы поступает простейший поток заявок, приводит к определению предельных значений характеристик качества обслуживания. Если реальный поток отличен от простейшего, то система будет функционировать не хуже, чем это следует из полученных оценок.

4. Интервал времени между произвольным моментом времени и моментом поступления очередной заявки имеет такое же распределение с тем же средним  $M[T] = 1/\lambda$ , что и интервал времени между двумя последовательными заявками.

Эта особенность простейшего потока является следствием отсутствия последствия.

Выходные потоки обычно имеют последствие, даже если входные потоки им не обладают.

Пример СМО с фиксированным временем обслуживания  $T_{\text{обсл}}$



Если в момент  $t_1$  на выходе появилась обслуженная заявка, то на интервале  $(t_1, t_1 + T_{\text{обсл}})$  заявка не появится.