- *«Никогда не считай, что ты знаешь всё, что тебе уже больше нечему учиться».*
  - *Н.Д. Зелинский*

Уравнения и неравенства .

Алгебраические .

-*ЦЕЛЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ;*

-*ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ;*

-*ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ .*

Трансцендентные.

-*ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ;*

- *ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ;*

- *ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ.*

Комбинированные.

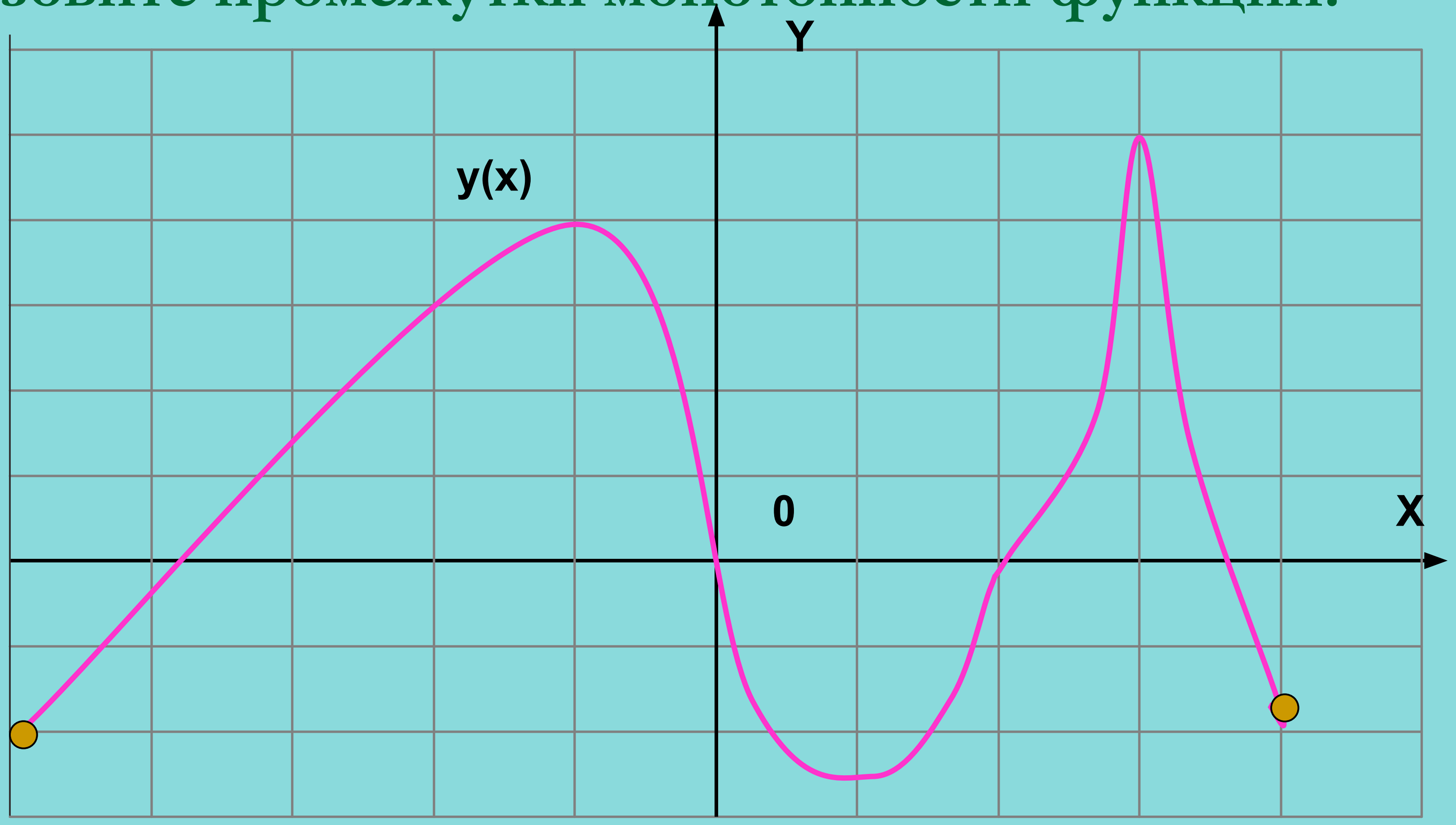

Методы решения уравнений
Метод равносиль-ных переходов
Метод замены переменной
Переход к уравнению-следствию, с проверкой корней
Функцио-нально-графически й
Комбинация нескольких методов

- ***Функционально-графический метод решения задачи - это метод, предполагающий использование при решении свойств и графиков функций, присутствующих в задаче.***

Применение свойства монотонности функций при решении задач.

Работаем устно.

Функция y(x) определена на отрезке $\left[-5;4\right]$ назовите промежутки монотонности функции.



- Может ли строго монотонная функция быть

  а) четной; б) нечетной; в) периодической?
- Известно, что $f(x)$ возрастает на X, $g(x)$ возрастает на Y определите характер монотонности и промежуток монотонности

  для функций а) $f(x)+g(x)$; б) $–f(x)$; в) $f(-x)$;

  г)$1/f(x)$, д) $f(g(x))$. Ответьте на аналогичные вопросы при условии, что $f(x)$ и $g(x)$ убывают соответственно на X и Y, при условии, что $f(x)$ и $g(x)$ соответственно возрастающая и убывающая функции.

- Выберите строго монотонные функции на всей области определения.

$1)\ y = 2{,}7^x$

$2)\ y = \left(1\frac{1}{5}\right)^{2-x}$

$3)\ y = \log_{0,5}(2 - 0{,}5x)$

$4)\ y = \lg|x|$

$5)\ y = 2^x - \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$6)\ y = \sqrt{5^x}$

$7)\ y = \arcsin x + x^{\frac{1}{3}}$

$8)\ y = \log_{0,5}(2x - 1)$

$9)\ y = \sqrt{2 - x}$

$10)\ y = 5^{x^2 + x + 1}$

Найдите ошибку при решении уравнений. Ответ обоснуйте, используя графическую интерпретацию решения.

$$I.$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

$$II.$$

$$x^2 = 2^2$$

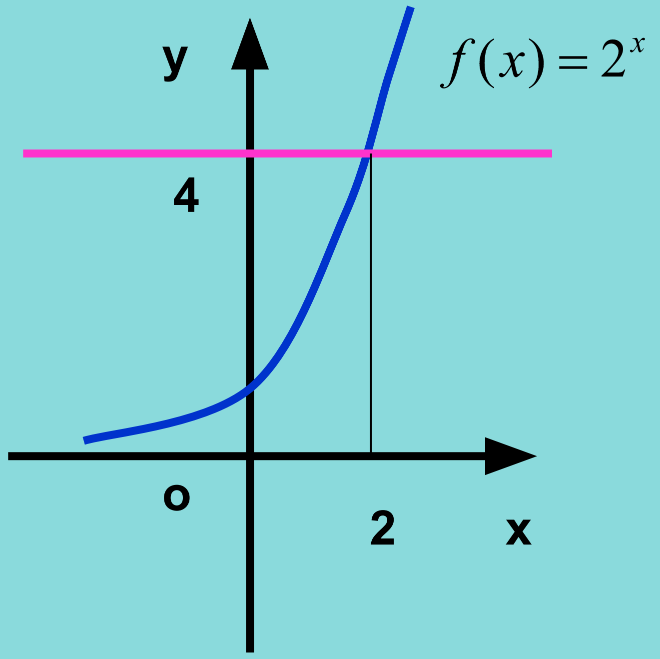
$$x = 2$$

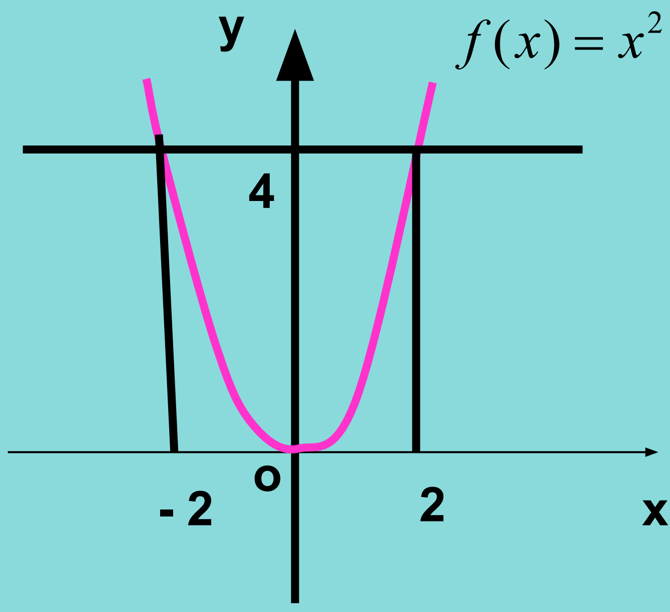
Ответ: 2

Графическое решение.

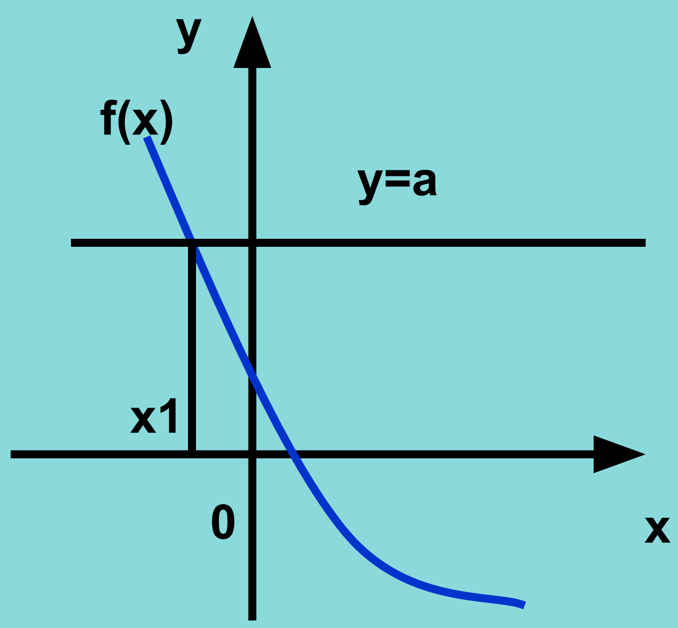
$$2^x = 2^2$$

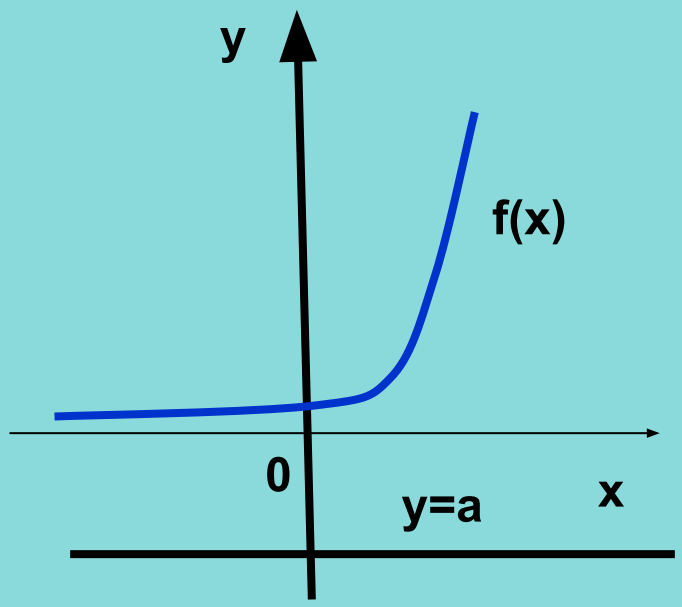
$$x^2 = 2^2$$



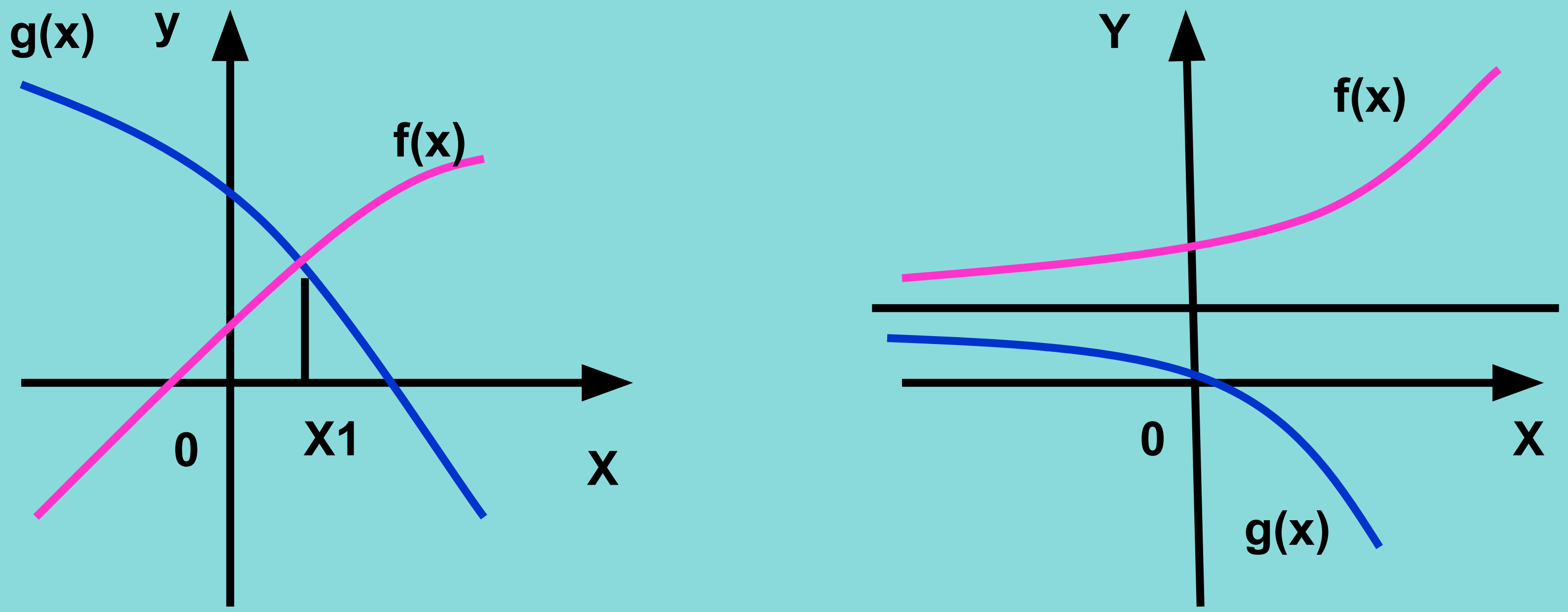


Теорема 1. *Если функция f(x) строго монотонна на промежутке X, то уравнение f(x)=a (a=const) имеет на X не более одного корня.*





Теорема 2. *Если f(x) возрастает на промежутке X, g(x) убывает на этом промежутке, то уравнение f(x)=g(x) имеет на X не более одного корня.*



Решите уравнение

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+1} = \sqrt{2+x}.$$

Решение. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{x+1} = \sqrt{2+x}.$

- Область определения уравнения: $[-2;+\infty)$

Функция $Y = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{X}$, стоящая в левой части

уравнения убывает на рассматриваемом промежутке,
поскольку основание степени $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Функция $y = \sqrt{2+x}$, стоящая в правой части уравнения,
возрастает на промежутке $[-2;+\infty)$.
Поэтому уравнение имеет не более одного корня.
Подбором определяем ,что X=-1. Ответ: -1.

Ответ обоснуйте, используя функциональную интерпретацию решения.

$$I.$$

$$2^x = 2^2$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

$$II.$$

$$x^2 = 2^2$$

$$x = 2$$

Ответ: 2

Функциональная интерпретация решения.

- **Введем функцию** $f(t)=2^t$ **. Тогда уравнение**

$2^x=2^2$ **примет вид** $f(x)=f(2)$ **. Функция** $f(t)=2^t$ **строго монотонна (возрастает) на множестве всех действительных чисел, значит каждое свое значение она принимает ровно один раз . Исходное уравнение имеет ровно один корень** 2.

Введем функцию $g(t)=t^2$

Тогда уравнение $x^2=2^2$ примет вид: $g(x)=g(2)$.

Функция $g(t)=t^2$ на своей области определения, имеет два промежутка монотонности , следовательно уравнение $g(x)=g(2)$ может иметь не более двух корней . Количество корней, в нашем случае два: ± 2 .

В первом случае вышеуказанных рассуждений был осуществлен равносильный переход от уравнения $f(x) = f(y)$ **к уравнению** $x = y$ **, а во втором случае такой переход привел бы к потере корня.**

- ***Теорема 3. Если $f(t)$ строго монотонна на $D(f)$, то уравнение $f(x)=f(y)$ равносильно на $D(f)$ уравнению $x=y$.***

- ***Теорема 4. Если $f(t)$ строго монотонна на $D(f)$, то уравнение $f(g(x))=f(h(x))$ равносильно на $D(f)$ уравнению $g(x)=h(x)$.***

Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-2)+\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2}=\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$$

- Решение.
- Введем функцию $f(t) = \log_{\frac{1}{5}} t + \left(\frac{1}{3}\right)^t$

Ответ:3

- Тогда исходное уравнение примет вид: $f(x^2 - 2) = f(2x + 1)$
- Так как f(t) убывает на $D(f) = (0; +\infty)$. (как сумма двух убывающих функций на этом промежутке функций), то уравнение $f(x^2 - 2) = f(2x + 1)$ равносильно системе:
- $$\begin{cases} X^2 - 2 > 0, \\ 2X + 1 > 0, \\ X^2 - 2 = 2X + 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2X + 1 > 0, \\ X^2 - 2 = 2X + 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} X > -\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} X = -1, \\ X = 3 \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ:3

Установите соответствие между уравнением и количеством его корней.

$$1)\sqrt{x^2-3}=\sqrt{9x+7}$$

$$2)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{9x+7}$$

$$3)\log_{\sqrt{3}}(x^2-3)=\log_{\sqrt{3}}(9x+7)$$

$$4)\arcsin(x^2-3)=\arcsin(9x+7)$$

А) два корня

В) один положительный корень

С) нет корней

D) Один отрицательный корень

Установите соответствие между уравнением и количеством его корней.

$$5)\ \log_{\sqrt{3}}(x^2-3)+arctg(x^2-3)-2=$$

$$=\log_{\sqrt{3}}(9x+7)+arctg(9x+7)-2$$

$$6)\ f(x^2-3)=f(9x+7),\ f(x)-\textit{возрастает}$$

$$\textit{на}\,D(f)=(-\infty;0)$$

A) два корня

B) один положительный корень

C) нет корней

D) Один отрицательный корень

Методы решения неравенств

- **Метод равносильных переходов**
- **Функционально-графический**
- **Метод замены переменной**

Найдите ошибку при решении неравенств.

$$I.$$

$$\left(\sqrt{3}\right)^x > 3$$

$$x > 2$$

Ответ: $(2;+\infty)$

$$II.$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x > \frac{1}{3}$$

$$x \,\square\, 2$$

Ответ: $(2;+\infty)$

Функциональная интерпретация решения. $(\sqrt{3})^x > 3$

- Введем функцию $y(t)=\left(\sqrt{3}\right)^t$, тогда неравенство $\left(\sqrt{3}\right)^x > 3$ примет вид y(x)>y(2) .Функция y(t) возрастает на множестве всех действительных чисел. Из неравенства видно, что y(x) - большее значение функции. Так как функция y(t) возрастающая, то большему значению функции соответствует большее значение аргумента. Значит x>2. **Ответ:** $\left(2;+\infty\right)$.

Функциональная интерпретация решения. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x > \frac{1}{3}$

- Введем функцию $f(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^t$, тогда неравенство

примет вид y(x)>y(2) .Функция y(t) убывает на множестве всех действительных чисел.

Из неравенства видно, что y(x) - большее значение функции. Так как функция y(t) убывающая, то большему значению функции соответствует меньшее значение аргумента. Значит x<2. **Ответ:** $(-\infty;2)$.

- Теорема 5. *Если функция $f(t)$ строго возрастает на $D(f)$, то неравенство $f(x)>f(y)$ равносильно на $D(f)$ неравенству $x>y$.*

Теорема 6. *Если функция $f(t)$ строго убывает на $D(f)$, то неравенство $f(x)>f(y)$ равносильно на $D(f)$ неравенству $x<y$.*

Теорема 7. Если функция $f(t)$ строго возрастает (убывает) на $D(f)$, то неравенство $f(h(x))>f(g(x))$ равносильно на $D(f)$ неравенству $h(x)>g(x)$ ($h(x)<g(x)$).

Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(x^2-2)+\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2}<\log_{\frac{1}{5}}(2x+1)+\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1}$$

Решение.

- Введем функцию $f(t) = \log_{\frac{1}{5}} t + \left(\frac{1}{3}\right)^t$
- Тогда исходное неравенство примет вид:
- $f(x^2-2) < f(2x+1)$.Так как f(t) убывает на $D(f) = (0;+\infty)$. (как сумма двух убывающих на этом промежутке функций), то неравенство равносильно системе:
- $$\begin{cases} X^2-2>0, \\ 2X+1>0, \\ X^2-2>2X+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2X+1>0, \\ X^2-2>2X+1 \end{cases}; \quad \begin{cases} X>-\frac{1}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} X<-1, \\ X>3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $(3;+\infty)$.

- **Выберите неравенство или систему неравенств, которые равносильны исходному.**

$$A \Leftrightarrow B$$

I

$$\begin{cases} -1 \le x^2 - 5 \le 1 \\ -1 \le 5x - 9 \le 1 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} 5x - 9 > 0, \\ x^2 - 5 > 5x - 9 \end{cases}$$

$$1)\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-5} < \left(\frac{1}{2}\right)^{5x-9}$$

III

$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

V

$$\begin{cases} x^2 - 5 \ge 0 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

IV $x^2 - 5 > 5x - 9$

$$2)\log_{\sqrt{3}}(x^2-5)<\log_{\sqrt{3}}(5x-9)$$

I

$$\begin{cases} -1\le x^2-5\le 1 \\ -1\le 5x-9\le 1 \\ x^2-5<5x-9 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} 5x-9>0, \\ x^2-5>5x-9 \end{cases}$$

III

$$\begin{cases} x^2-5>0 \\ x^2-5<5x-9 \end{cases}$$

IV $x^2-5>5x-9$

V

$$\begin{cases} x^2-5\ge 0 \\ x^2-5<5x-9 \end{cases}$$

$$3)(x^2-5)^{\frac{1}{3}} > (5x-9)^{\frac{1}{3}}$$

I $\begin{cases} -1 \le 5x-9 \le 1 \\ x^2-5 > 5x-9 \end{cases}$

II $\begin{cases} 5x-9 \ge 0, \\ x^2-5 > 5x-9 \end{cases}$

III $\begin{cases} x^2-5 > 0 \\ x^2-5 < 5x+9 \end{cases}$

IV $x^2-5 > 5x-9$

V $\begin{cases} x^2-5 \ge 0 \\ x^2-5 > 5x-9 \end{cases}$

$$4)\ \arcsin(x^2-5) < \arcsin(5x-9)$$

I
$$\begin{cases} -1 \le x^2 - 5 \le 1 \\ -1 \le 5x - 9 \le 1 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

II
$$\begin{cases} 5x - 9 > 0, \\ x^2 - 5 > 5x - 9 \end{cases}$$

III
$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ x^2 - 5 < 5x + 9 \end{cases}$$

IV
$$x^2 - 5 > 5x - 9$$

V
$$\begin{cases} x^2 - 5 \ge 0 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

I

$$\begin{cases} -1 \le x^2 - 5 \le 1 \\ -1 \le 5x - 9 \le 1 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} 5x - 9 > 0, \\ x^2 - 5 > 5x - 9 \end{cases}$$

$$5)\ \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 5) + arctg(x^2 - 5) - 2 < \\ < \log_{\sqrt{3}}(5x - 9) + arctg(5x - 9) - 2$$

III

$$\begin{cases} x^2 - 5 > 0 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

IV

$$x^2 - 5 > 5x - 9$$

V

$$\begin{cases} x^2 - 5 \ge 0 \\ x^2 - 5 < 5x - 9 \end{cases}$$

I

$$\begin{cases} 5x-9<0, \\ x^2-5>5x-9 \end{cases}$$

II

$$\begin{cases} 5x-9>0, \\ x^2-5>5x-9 \end{cases}$$

$6) f(x^2-5)<f(5x-9), f(x) - убывает$

$на D(f)=(-\infty;0)$

III

$$\begin{cases} x^2-5>0 \\ x^2-5<5x-9 \end{cases}$$

IV

$$x^2-5>5x-9$$

V

$$\begin{cases} x^2-5<0 \\ x^2-5>5x-9 \end{cases}$$