РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ ГРАФОВ.

Презентация подготовлена
учителем математики МБОУ
«Лицей №35» Шепталенко Т.Н.

В последнее время интерес к комбинаторике в школьном курсе математики заметно возрос. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в новые стандарты по математике для основной и профильной школ. Формирование комбинаторных представлений и развитие комбинаторного мышления школьников входит в число основных целей обучения математике.

Однако обычно, когда говорят об элементах комбинаторики, имеют в виду задачи алгебраического содержания. Здесь мы рассмотрим комбинаторные задачи, которые можно решать с помощью графов.

Пусть задано некоторое непустое множество V и множество E пар различных элементов из V. Элементы множества V называются ***вершинами*** графа, элементы множества E – ***ребрами*** графа. Множество вершин и множество ребер называют ***графом***.

Будем использовать геометрическое представление графа. Вершины графа изображаются в виде точек на плоскости. Если две вершины образуют ребро, то соответствующую пару точек соединяют линией.

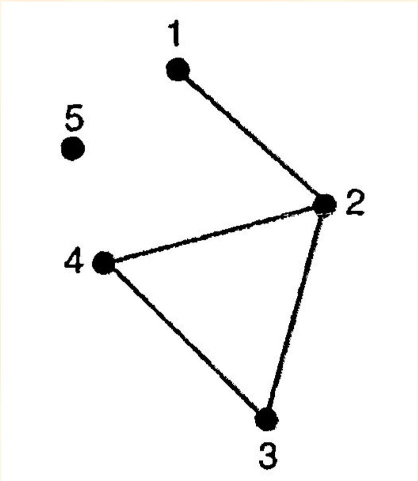


Рис.1

Например, на рис.1 изображен граф G, заданный множеством вершин V={1,2,3,4,5} и множеством ребер E ={(1,2), (2,3), (4,3), (4,2)}

Число ребер, выходящих из вершины v, называют ***степенью*** вершины v и обозначается d(v). Вершина степени 0 называется ***изолированной***, вершина степени 1 – ***висячей***.

$0 \le d(v) \le n-1$, где n- число вершин графа.

Задача 1. Сколько диагоналей имеет пятиугольник? n-угольник?

Рис.2

Решение.
Всего отрезков, соединяющих 2 вершины n-угольника равно

$$C_n^2 = \frac{n!}{2!\,(n-2)!}$$

Из них n отрезков являются сторонами, остальные – диагонали.
Получим формулу для нахождения числа диагоналей:

$$m = C_n^2 - n = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n \cdot (n-3)}{2}$$

Замечание:
Сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер.

Для пятиугольника :

$$4 \cdot 5 = 2r$$

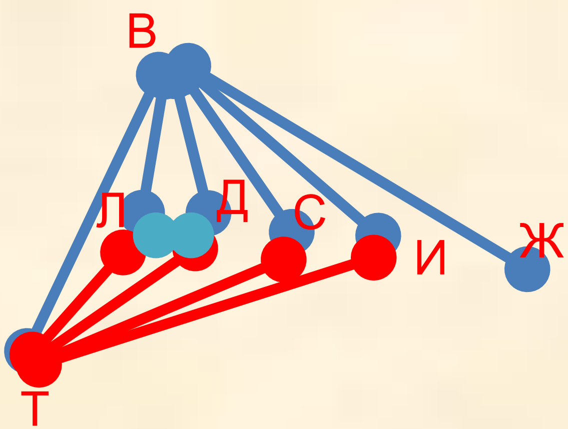
$$r = 10$$

$$m = 10 - n = 10 - 5 = 5$$

Задача 2. В шахматном турнире по круговой системе участвуют 7 школьников.
Информация о сыгранных партиях представлена в таблице. С кем сыграл Леша?

Имя	Количество игр
Ваня	6
Толя	5
Леша	3
Дима	3
Семен	2
Илья	2
Женя	1

Решение.
Построим граф встреч игроков, в котором каждая вершина соответствует участнику.



По графу видно, что Леша встречался с Ваней, Толей и Димой.
Кроме этого можно сказать, с кем встречались остальные школьники.

Задача 3. Соревнование проводится по круговой системе. Это означает, что каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, проведшие одинаковое количество встреч.

Решение.

Поставим в соответствие каждому игроку точку плоскости – вершину графа. Если 2 игрока встретились между собой, то соединим соответствующие вершины графа ребром. Получим граф встреч игроков. Надо доказать, что существуют 2 игрока, проведших одинаковое количество встреч, т.е. *в графе обязательно найдутся 2 вершины, степени которых одинаковы*.

Рис.3

Доказательство (от противного). Допустим, что существует граф Н, степени всех вершин которого различны. В промежутке от 0 до n-1 существует ровно n целых чисел: 0,1, 2,…, n-1. Степени n вершин графа тоже расположены в этом промежутке. Поэтому должны существовать такие вершины v_1, v_2, …, v_n, что $d(v_1)=0$, $d(v_2)=1$, …, $d(v_n)=n-1$. Т.к. $d(v_1)=0$, то вершина v_1 не соединена ребром ни с какой другой вершиной. $d(v_n)=n-1$, следовательно, вершина v_n соединена со всеми остальными вершинами, в том числе и с v_1. Пришли к противоречию. Существование графа Н, степени всех вершин которого различны, невозможно.

Вывод: Хотя бы два игрока проведут одинаковое количество встреч.

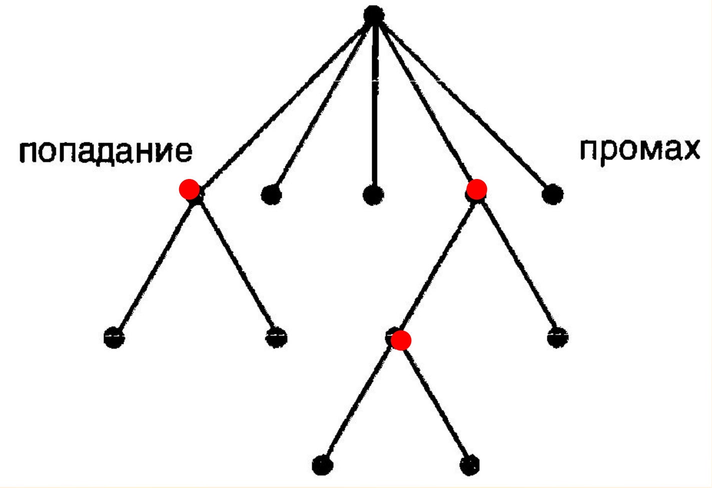
Задача 4. Андрей пошел с отцом в тир. Уговор был такой: Андрей делает 5 выстрелов и за каждое попадание получает еще по 2 выстрела. Андрей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

Решение.

Стрельбу Андрея можно описать деревом, которое называется *корневым деревом.*

В этом дереве все вершины, кроме верхней, соответствуют выстрелам. Если Андрей попал, то степень соответствующей вершины равна 3, если промахнулся -1. Степень верхней вершины равна 5. Дерево имеет 26 вершин и 25 ребер.

Пусть n - число попаданий. Тогда граф содержит n вершин степени 3, (25-n) вершин степени 1 и одну вершину степени 5.



Т.к. сумма степеней вершин графа равна удвоенному числу ребер, получим :

$$3 \cdot n + 1 \cdot (25 - n) + 5 = 2 \cdot 25$$

$$n = 10$$

Ответ: Андрей попал 10 раз.

Следует отметить, что применение графов для решения задач не всегда целесообразно. Например, большое количество ребер графа может запутать учеников.

Однако, с помощью графов можно
наглядно
моделировать
задачу,
что несомненно важно для развития комбинаторного мышления учащихся.