

# Кривые второго порядка

Урок по математике  
для студентов 2 курса, специальность  
«Прикладная информатика».  
Разработала: Богданова Н.А.

# Повторение

- Какие линии на плоскости вы можете построить?
- Какими уравнениями эти линии можно задать?
- Выделить среди приведенных уравнений уравнения первого порядка, уравнения второго порядка.

$$y = kx + b$$

Кубическую параболу

$$y = ax^2 + bx + c$$

прямую

$$y = \sqrt[n]{x}$$

параболу

$$y = \frac{k}{x}$$

гиперболу

# Определение

- Алгебраической кривой второго порядка называется кривая  $\Gamma$ , уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где не все коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны одновременно нулю.

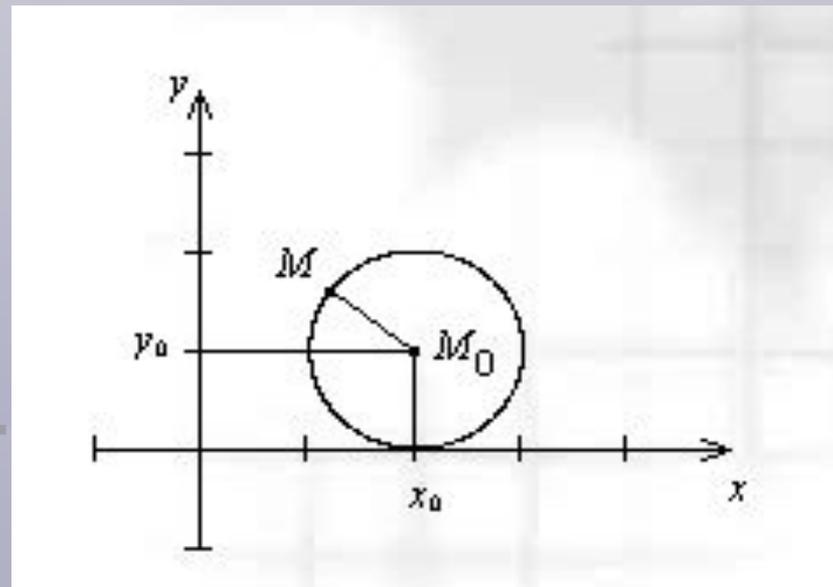
# Виды кривых второго порядка

## 1. Окружность.

### Определение:

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, одинаково удаленных от одной точки, называемой центром.

$M_0$  – центр окружности,  
 $M_0M$  - радиус



# Уравнение окружности

- Уравнение окружности с центром в точке  $M_0(x_0, y_0)$  и радиуса  $R$  имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Вывод

- Пример 1: Написать уравнение окружности с центром в точке  $C(3;5)$  и радиусом  $R=3$ .
- Если центр окружности в начале системы координат, то уравнение имеет вид:

*Решение:*  $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$



# Вывод уравнения окружности

$$M(x; y), M_0(x_0; y_0) \Rightarrow$$

$$|M_0M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$

$$|M_0M| = R \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$



# Окружность

- Пример 2: Найти центр и радиус окружности и построить ее

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 100$$

- Решение:

$$R=10, M_0(-3;2)$$

# Окружность

- Пример 3: Доказать, что уравнение задает окружность, найти координаты центра и радиус, построить окружность

$$x^2 - 2x + 4y + y^2 - 20 = 0$$

- Решение:

$$R=5, M_0(1;-2)$$

# Окружность

- Пример 4.

Дана окружность  $x^2+y^2-4x+2y-15=0$  и хорда  $x+y-7=0$ . Найти длину этой хорды.

Решение:

1. Найти уравнение окружности.
2. Построить чертеж
3. Решить систему, найти точки пересечения линий
4. Найти расстояние между двумя точками

# Окружность

- Пример 5.

Дана окружность  $(x+2)^2+(y+3)^2=13$  и точка на ней с ординатой, равной нулю. Найти ее абсциссу.

- Пример 6.

Написать уравнение окружности, проходящей через три точки  $A(0;2)$ ,  $B(1;1)$ ,  $C(2,-2)$ .

# Окружность

- Пример 7.

Окружность касается обеих осей координат и проходит через точку  $A(2;9)$ . Написать уравнение этой окружности.

- Пример 8.

Окружность касается оси  $Oy$  в точке  $A(0;-3)$  и имеет радиус  $r=2$ . Написать уравнение этой окружности.

# Домашнее задание

- Построить окружности:  
 $(x+3)^2+(y-2)^2=16$  и  $x^2+(y-4)^2=25$
- Найти координаты центра и длину радиуса окружности  $x^2+y^2-6x-8y=0$ .
- Составить уравнение окружности, касающейся оси  $OX$  в начале координат и проходящей через точку  $A(0;-8)$ .

# Виды кривых второго порядка

## 2. **Эллипс**

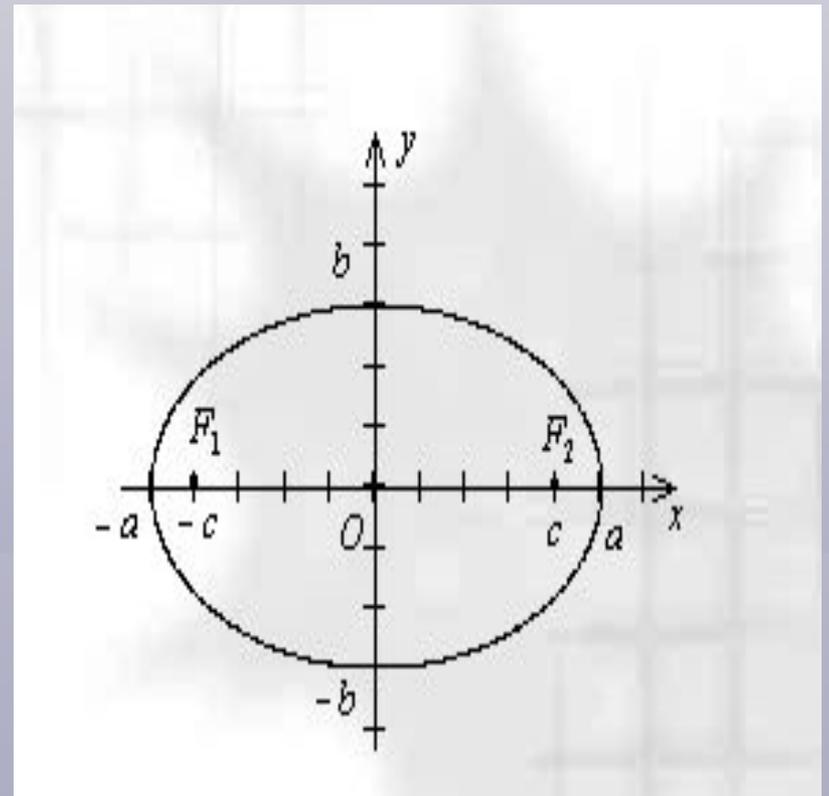
### Определение:

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек той же плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная и больше расстояния между фокусами

# Эллипс

- $F_1$  и  $F_2$  – фокусы,
- $F_1(-c,0)$ ,  $F_2(c,0)$
- $F_1F_2$  – фокальной расстояние
- $|F_1F_2|=2a$

Пусть  $M(x;y)$  – точка на эллипсе, то  $MF_1=MF_2$



# Эллипс

- Вывод уравнения эллипса:

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

*Тогда*

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

*Раскроем скобки, упростим выражение :*

# Эллипс

- Уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса.

# Эллипс

- Число  $a$  называется большой полуосью,  $b$  – малой полуосью.
- Точки  $A, A_1, B, B_1$  называются вершинами эллипса.
- Точка  $O$  – центр эллипса.
- Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между его фокусами к длине большей оси ( $a > b$ ), т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

# Эллипс

- Располагается симметрично осей.
- Ограничен прямыми  $x=\pm a$ ,  $y=\pm b$ , т.е. вписан в прямоугольник, стороны которого параллельны координатным осям и имеют длины, равные  $2a$  и  $2b$ , а диагонали пересекаются в начале координат.

# Эллипс

- Пример 1.

Дан эллипс  $16x^2+25y^2=400$ . Определить длину его осей, координаты вершин и фокусов, а также величину эксцентриситета.

- Пример 2.

Написать каноническое уравнение эллипса, если фокальное расстояние равно 8, и эллипс проходит через точку  $M(0,-3)$

# Эллипс

- Пример 3

Определить длину осей и координаты фокусов эллипса  $49x^2 + 24y^2 = 1176$

- Пример 4

Составить уравнение эллипса, если две его вершины находятся в точках  $A(8;0)$  и  $A_1(-8;0)$ , а фокусы имеют координаты  $(\pm 5;0)$

# Эллипс

- Пример 5

Написать уравнение эллипса, координаты фокусов которого  $(\pm 3; 0)$ , а длина большей оси равна 12.

- Пример 6

Найти эксцентриситет эллипса  
 $4x^2 + 9y^2 = 180$

# Эллипс

- Если координаты центра эллипса смещены относительно центра, то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

# Эллипс

## Пример 7

- Найти координаты центра, длины осей и эксцентриситет эллипса:

$$\frac{(x-5)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$$

- Построить эллипс

# Домашнее задание

- Написать каноническое уравнение эллипса, если даны длины его полуоси  $a=5$  и  $b=4$ .
- Дан эллипс, определить его оси и расстояние между фокусами:

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$$

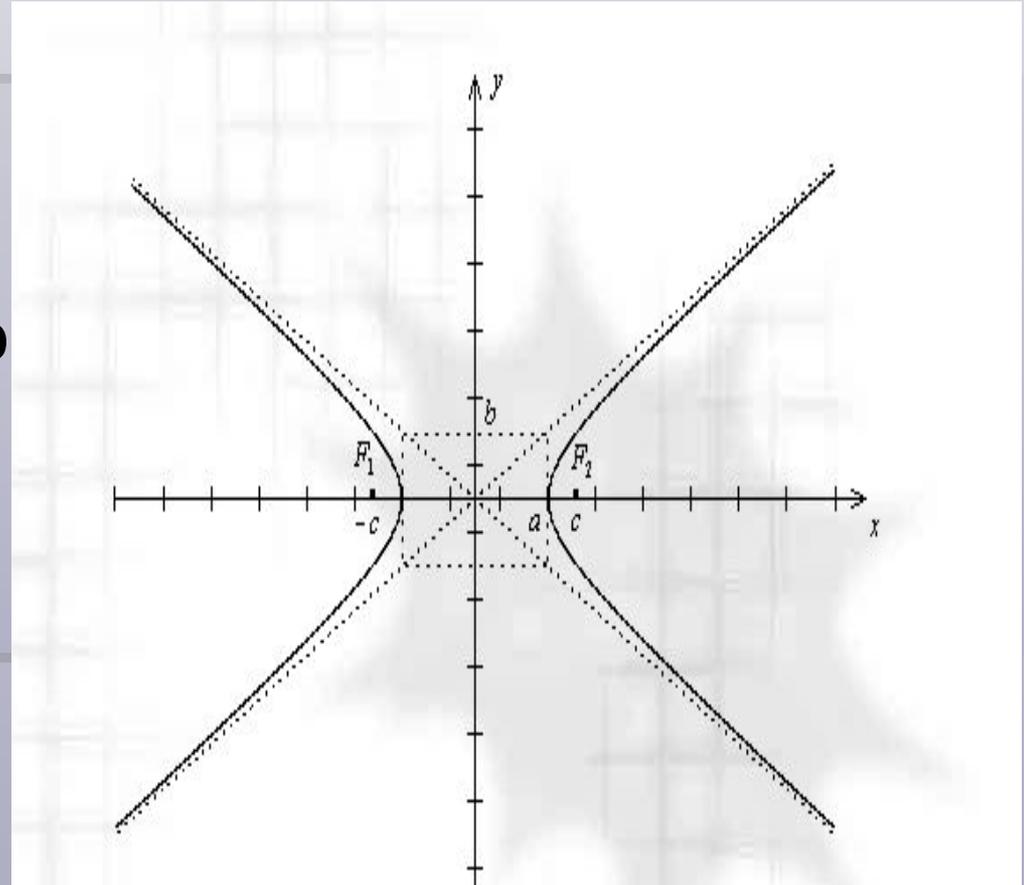
# Виды кривых второго порядка

## 3. Гипербола.

**Определение.** Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух данных точек плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная.

# Гипербола

- $F_1, F_2$  – фокусы гиперболы
- $F_1F_2$  – фокально расстояние
- $F_1(-c,0), F_2(c,0)$



# Вывод формулы уравнения гиперболы

$$F_1M = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_2M = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

*Тогда*

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

*Раскроем скобки, упростим выражение :*

# Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

# Гипербола

- Гипербола симметрична относительно оси  $OX$ , оси  $OY$
- Пересекает ось  $OX$  в точках  $A1(-a,0), A2(a,0)$  – вершинах гиперболы.
- $O(0,0)$  – центр гиперболы
- $A1A2$  – вещественная ось,  $B1B2$  – мнимая ось
- $F1M, F2M$  – фокальные радиусы гиперболы

# Гипербола

- Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине вещественной оси, т.е.

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$$

# Гипербола

- Прямые  $y = \pm b/a x$  называются асимптотами гиперболы.
- Если длины полуосей гиперболы равны, т.е.  $a = b$ , то гипербола называется равнобочной.
- Асимптоты равнобочной гиперболы имеют вид:  $y = \pm x$

# Гипербола

- Пример 1.

Дана гипербола. Узнать, лежит ли точка  $A(2; 1,5)$  на какой-либо ее асимптоте.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

- Пример 2.

Определить координаты фокусов, длину осей и эксцентриситет гиперболы:

$$24x^2 - 25y^2 = 600$$

# Гипербола

- Гипербола называется сопряженной, если ее уравнение имеет вид:
- Гипербола называется равносторонней, если  $a=b$ , т.е.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

$$\text{ò .} \dot{a}. \quad x^2 - y^2 = 1$$

# Гипербола

- Пример 3

Написать уравнение гиперболы, если  $b=6$ ,  $c=13$ .

- Пример 4.

Написать уравнение гиперболы, у которой вещественная ось равна 8, а расстояние между фокусами, лежащими на оси  $OX$ , равно 10.

# Гипербола

- Пример 5.

Найти острый угол между асимптотами гиперболы  $4x^2 - 5y^2 = 100$ .

Пример 6.

Написать уравнения асимптот, а также найти величину эксцентриситета гиперболы  $x^2 - 2y^2 = 6$ .

# Гипербола

- Уравнение гиперболы со смещенным центром:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

# Домашнее задание

- 1) Написать каноническое уравнение гиперболы, если  $a=6$ ,  $b=2$ .
- 2) Определить координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы  $16y^2-9x^2=144$ .

# Виды кривых второго порядка

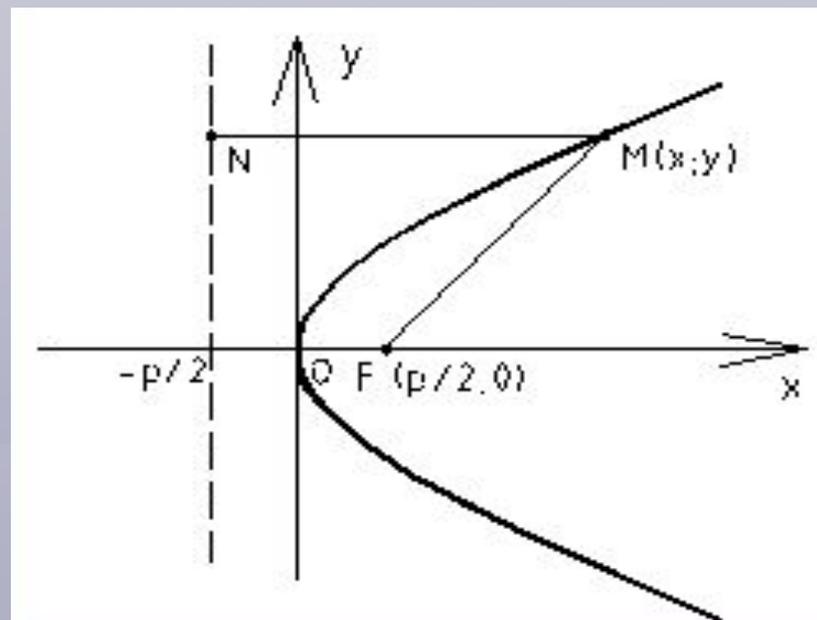
- 4. **Парабола**

**Определение.** Параболой называется геометрическое место точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от точки, называемой фокусом, и от прямой, называемой директрисой.

# Парабола

- $F(p/2, 0)$  – фокус
- $X=-p/2$  – уравнение директрисы
- $O(0,0)$  - вершина
- Уравнение параболы:

$$y^2 = 2px$$



# Парабола

- Парабола проходит через начало координат
- Располагается справа от оси  $OY$  если  $p > 0$
- Парабола симметрична относительно оси  $OX$
- Если уравнение имеет вид  $x^2 = 2py$ , то ветви параболы будут направлены вверх.

# Парабола

- Пример 1

Построить параболу  $y^2=6x$

- Пример 2

Дана парабола  $y^2=12x$ . Найти координаты ее фокуса и написать уравнение директрисы.

- Пример 3.

Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, зная, что фокус имеет координаты  $F(4,0)$

# Парабола

- Пример 4.

Найти точки пересечения параболы  $y^2=9x$  с прямой  $y=2x+1$

- Пример 5.

Написать уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси  $OY$  и проходящей через точку  $A(-4;-2)$ .

# Парабола

- Уравнение параболы со смещенным центром задается уравнением:

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

# Парабола

- Пример 6.

Написать уравнение параболы с центром в точке  $A(1;1)$ , зная что она проходит через точку  $M(2;0)$ , ее ось симметрии параллельна оси  $OY$ .

- Пример 7.

Дана парабола  $x^2-6x+8y-15=0$ . Найти координаты вершин и фокуса, а также уравнения ее оси симметрии и директрисы.

# Домашнее задание

- Выучить лекцию.
- Задача 1.

Построить кривые второго порядка и найти их основные элементы:

$$1) (x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 16$$

$$2) \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$3) \frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$4) y^2 = 8x$$