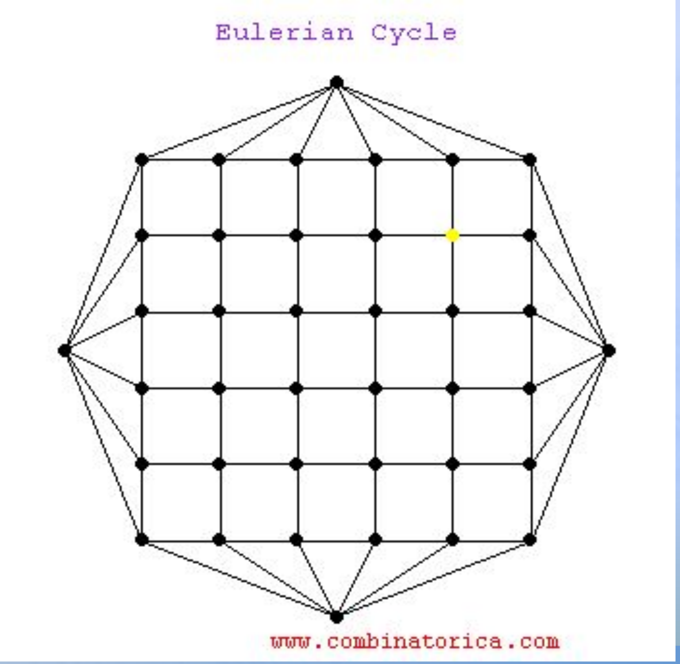
Алгебра

Геометрия



Комбинаторика

Форма занятия
практикум по решению задач
Цели урока **:**
образовательная
- обучать решению задач по комбинаторике
развивающая
- развивать логическое мышление
- расширять математический кругозор
-развивать навыки научно - исследовательской деятельности
воспитательная
-воспитывать культуру письма, речи
-формировать чувство ответственности за принятое решение
Задачи урока **:**
- отработать умения решать простейшие комбинаторные задачи
- способствовать формированию и развитию вероятностного мышления, вероятностной интуиции
- способствовать развитию творческих способностей и дарований
- создать условия для развития умений самостоятельно приобретать и применять знания
-создать условия для расцвета личности школьника с учётом его возрастных особенностей.

Немного истории

Комбинаторика является древнейшей и, возможно, ключевой ветвью математики. В математике есть задачи, в которых требуется из элементов составить различные наборы, подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, составленных по определённому правилу. На практике часто приходится делать перебор определённого количества данных. Например, учителю приходится распределять различные виды работ между группами учащихся, офицеру выбирать из солдат наряд, агроному размещать культуры на полях, завучу составлять расписание и т.д. В данном случае речь идёт о всевозможных комбинациях объектов. Задачи такого типа называются комбинаторными задачами. Область математики, в которой изучают комбинаторные задачи, называется комбинаторикой. Как самостоятельный раздел математики комбинаторика оформилась в Европе в XVIII веке. Некоторые комбинаторные задачи решали в Индии во II веке до н. э., в Древнем Китае, позднее в Римской империи.

Термин "комбинаторика" был введён в математический обиход знаменитым Лейбницем. Готфрид Вильгельм Лейбниц(1.07.1646 - 14.11.1716) - всемирно известный немецкий учёный, занимался философией, математикой, физикой, организовал Берлинскую академию наук и стал её первым президентом. В 1666 году Лейбниц опубликовал "Рассуждения о комбинаторном искусстве". В своём сочинении Лейбниц ввел специальные символы, термины для подмножеств и операций над ними. В течение всей своей жизни Лейбниц многократно возвращался к идеям комбинаторного искусства. Комбинаторику он понимал весьма широко, именно, как составляющую любого исследования, любого творческого акта, предполагающего сначала анализ (расчленение целого на части), а затем синтез (соединение частей в целое). Комбинаторике Лейбниц предрекал блестящее будущее, широкое применение. В XVIII веке к решению комбинаторных задач обращались выдающиеся математики.

Г.В. Лейбниц

Л. Эйлер

Так, Леонард Эйлер рассматривал задачи о разбиении чисел, о паросочетаниях, о циклических расстановках, о построении магических и латинских квадратов. В 1713 году было опубликовано сочинение Я. Бернулли "Искусство предположений", в котором с достаточной полнотой были изложены известные к тому времени комбинаторные факты. Сочинение состояло из 4 частей, комбинаторике была посвящена вторая часть, в которой содержатся формулы. Для вывода формул автор использовал наиболее простые и наглядные методы, сопровождая их многочисленными таблицами и примерами. В работах Я. Бернулли и Лейбница тщательно изучены свойства сочетаний, размещений, перестановок.

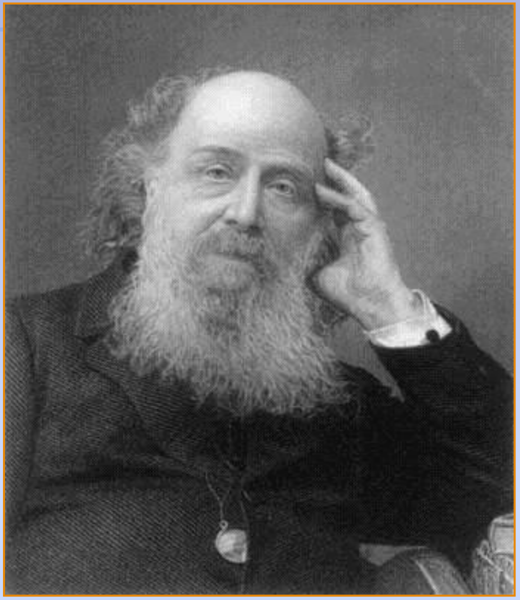
Я. Бернулли

РЕШЕНИЕ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Скажи мне – и я забуду,
Покажи мне – и я запомню,
Вовлеки меня – и я пойму.

(Древняя китайская мудрость)

Число, положение и комбинация -
три взаимно пересекающиеся,
но различные сферы мысли,
к которым можно отнести
все математические идеи.



Английский математик
Джеймс Джозеф Сильвестр
(1814-1897)

Перестановки

Комбинации из n-элементов, отличающиеся друг от друга только порядком расположения в них элементов, называются перестановками из n элементов

$$P = n!$$

$$P = 4! = 4 * 3 * 2 * 1 = 24$$

Задача № 1

Сколькими способами можно развесить 5 цветных шаров на гирлянде?

<u>Решение:</u>

Каждая расстановка будет отличаться от предыдущей порядком следования шаров (элементов). Поэтому это будет перестановка из 5 элементов.

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Сочетания

Комбинации из n элементов по m , отличающиеся друг от друга лишь составом элементов, называются сочетаниями из n элементов по m. Количество сочетаний можно посчитать по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \qquad m \le n$$

Число сочетаний элементов из n по m.

Найдите:

Число сочетаний из 6 по 3:

$$C_6^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3} = 20;$$

Число сочетаний из 4 по 4:

$$C_4^4 = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 1;$$

Задача № 2

Из 20 учащихся надо выбрать двух дежурных.

Сколькими способами это можно сделать?

Решение:

Надо выбрать двух человек из 20.
Ясно, что от порядка выбора ничего не зависит, то есть

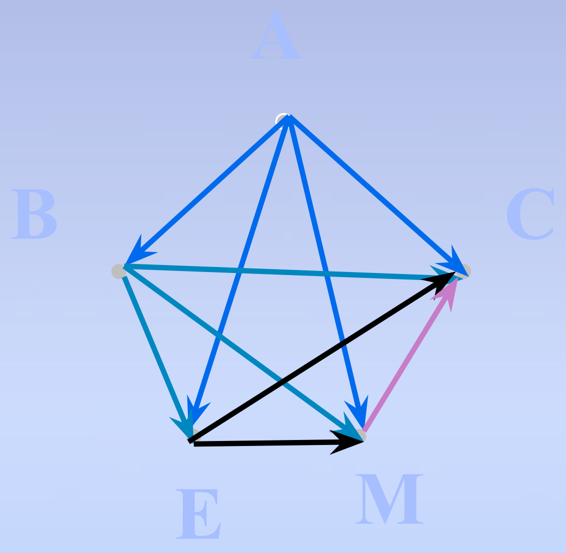
Иванов  - Петров  или Петров  Иванов  это одна

и та же пара дежурных. Следовательно, это будут сочетания из 20 по 2.

$$C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190$$

Задача № 3

Найдите количество отрезков, которыми можно соединить точки А, В, С, Е, М.



$$C_5^2 = \frac{5!}{2!\,(5-2)!}$$

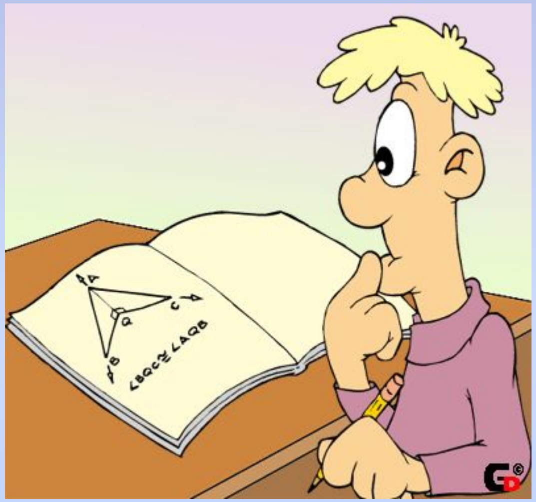
4+3+2+1= 10

Задача № 4

Сколько диагоналей в выпуклом десятиугольнике?

Решение:

- Найдите количество отрезков, которыми можно соединить 10 точек.



$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\,(10-2)!} = 45$$ отрезков

- Сколько из них являются сторонами?

10 являются сторонами, а остальные 45 – 10 = 35 будут диагоналями

Ответ: 35 диагоналей

Размещения

Комбинации из n элементов по m, отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо порядком их расположения, называются размещениями из n элементов по m ($m \leq n$).

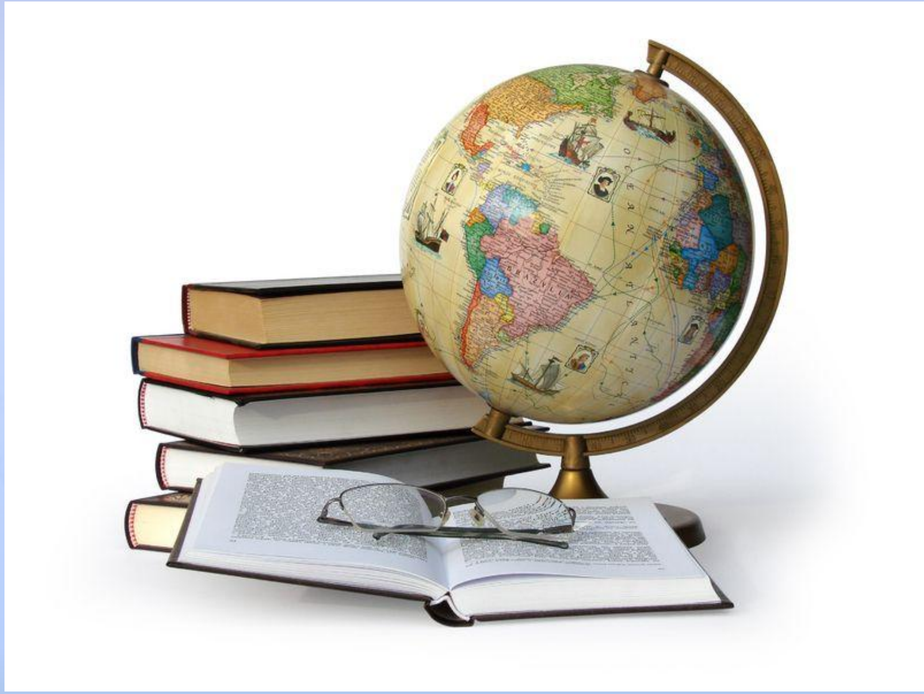
$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Задача № 6

Сколько словарей надо создать, чтобы можно было непосредственно выполнять перевод с любого из пяти языков на любой другой из этих языков?

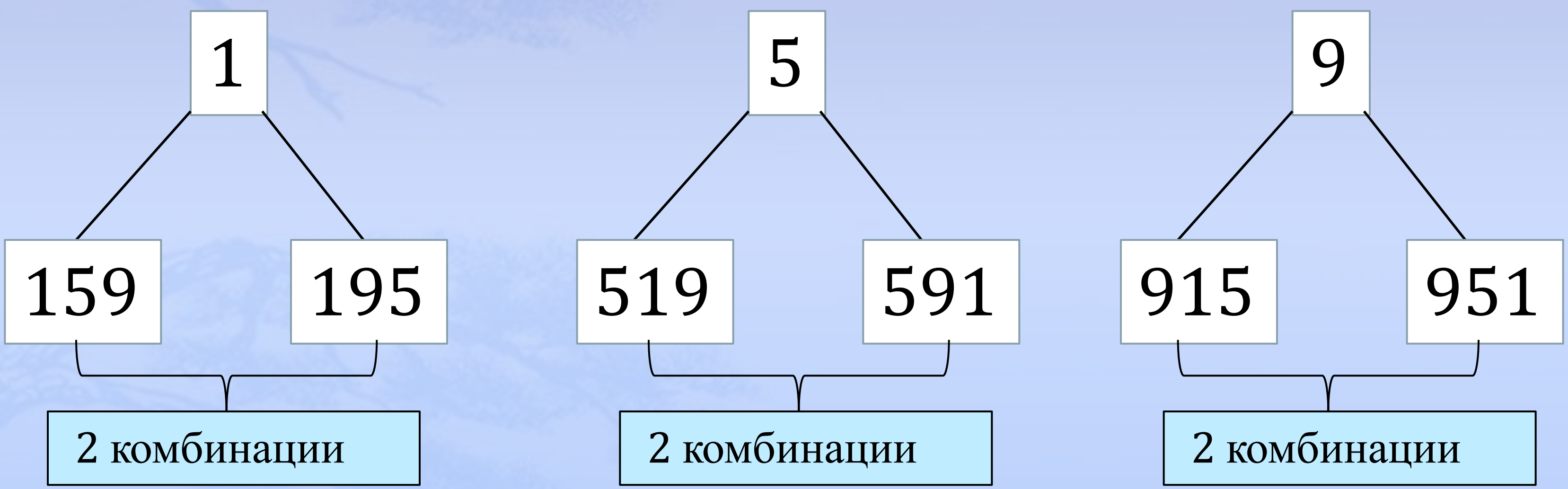
Решение:

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 5 \cdot 4 = 20$$



Ответ: 20 словарей.

Из чисел 1, 5, 9 составить трёхзначное число без повторяющихся цифр.



Какую часть составляют числа, кратные 5?

–это вероятность того, что трехзначное число, составленное из неповторяющихся цифр 1, 5, 9, кратно 5.

Понятие вероятности

<u>Вероятностью события</u> называется число, показывающее какую часть составляют исходы испытания, в которых наступает событие А, от всех исходов этого испытания.

<u>Событием А</u> в теории вероятности называется выполнение какого-либо свой ства в исходах рассматриваемого испытания.

Понятие вероятности

Из чисел 1, 5, 9 составить трёхзначное число без повторяющихся цифр.

1 — 159, 195 — 2 комбинации

5 — 519, 591 — 2 комбинации

9 — 915, 951 — 2 комбинации

Какова вероятность того, что получится число, квадратный корень из которого не больше 24?

кратное 9?

больше 500?

кратное 3?

0

Классическая вероятностная схема.

Для нахождения вероятности случай ного события при проведении некоторого испытания следует:

1) Най ти число N всех возможных исходов данного испытания.

2) Най ти число N(A) тех исходов испытания, в которых наступает событие A.

3)Най ти отношение ; оно и будет равно

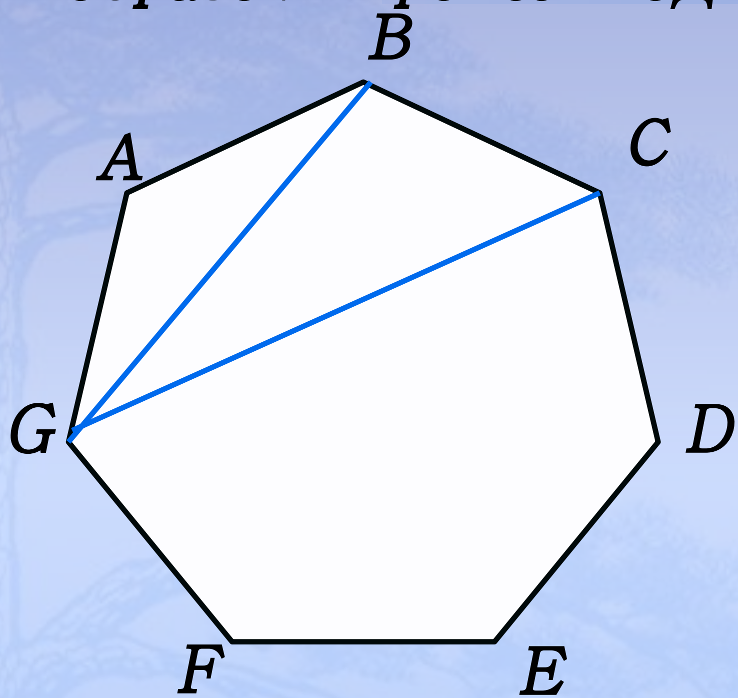
вероятности события A.

Классическое определение вероятности.

Вероятностью события А называется отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов испытания.

Задача № 8

В правильном 7-угольнике ABCDEFG случай ным образом провели одну из диагоналей .

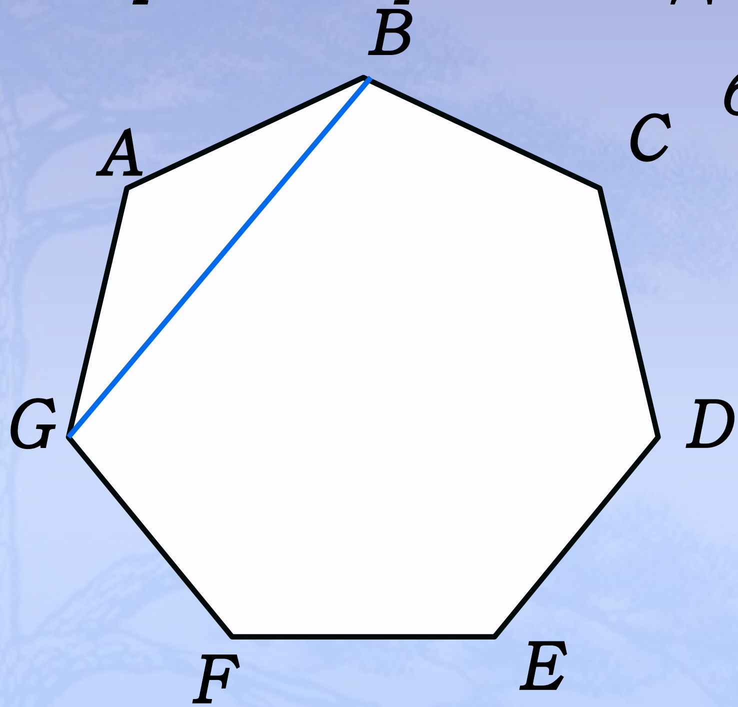


а)Какова вероятность того, что по обе стороны от неё лежит одинаковое количество вершин?

Ответ: 0, невозможное событие

Задача № 8

В правильном 7-угольнике ABCDEFG случай ным образом провели одну из диагоналей .

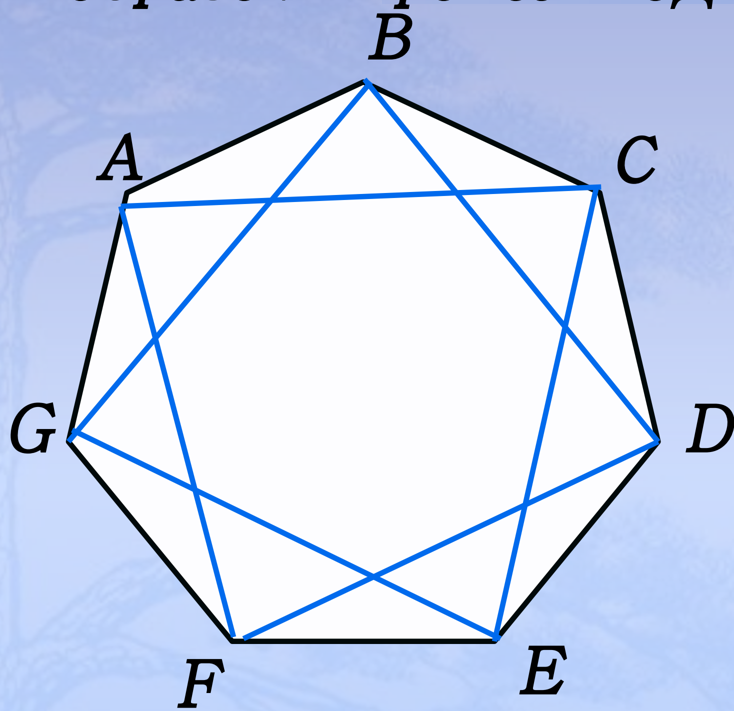


б)Какова вероятность того, что по одну сторону от диагонали лежит
более двух вершин?

Ответ: 1, достоверное событие

Задача № 8

В правильном 7-угольнике ABCDEFG случайным образом провели одну из диагоналей.



в) Какова вероятность того, что диагональ отрезает от 7-угольника какой-то 3-угольник?

Начало диагонали – 7 способов

Конец диагонали – 4 способов

Всего $7 \cdot 4 = 28$ пар концов диагоналей

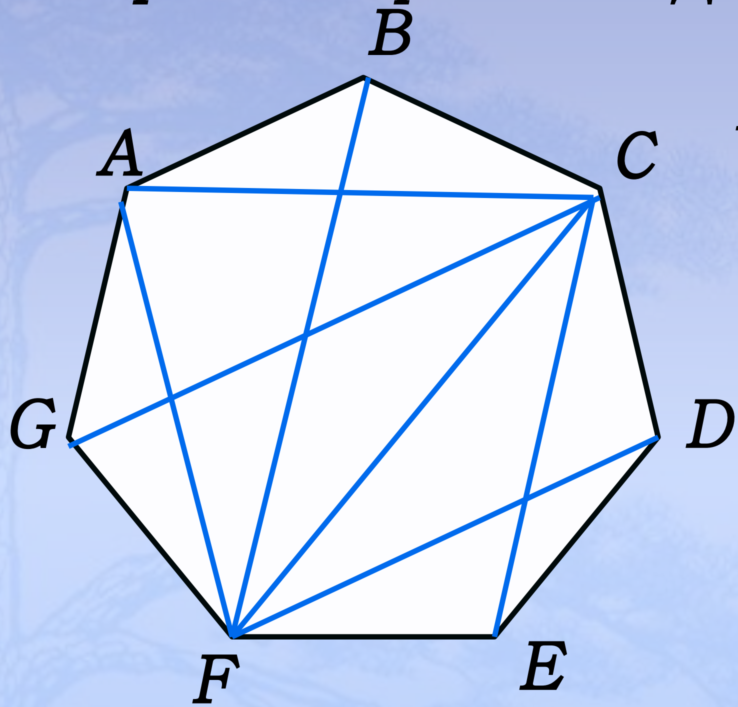
Всего диагоналей – $28 : 2 = 14$, $N = 14$

Всего диагоналей, отсекающих треугольник – 7, $N(A) = 7$

Ответ:

Задача № 8

В правильном 7-угольнике ABCDEFG случайным образом провели одну из диагоналей.



г) Какова вероятность того, что один из концов диагонали – вершина C, или вершина F?

Из вершины C – 4 диагонали

Из вершины F – 4 диагонали

Всего – 4 + 4 – 1 = 7 диагоналей

Ответ:

Правило нахождения геометрической вероятности.

Если фигура X целиком содержит в себе фигуру A, то вероятность того, что точка, случай но выбранная из фигуры X, принадлежит фигуре A равна отношению площади фигуры A к площади фигуры X.

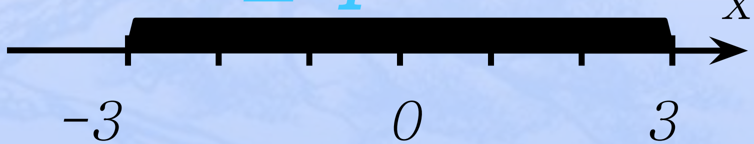
Задача № 9

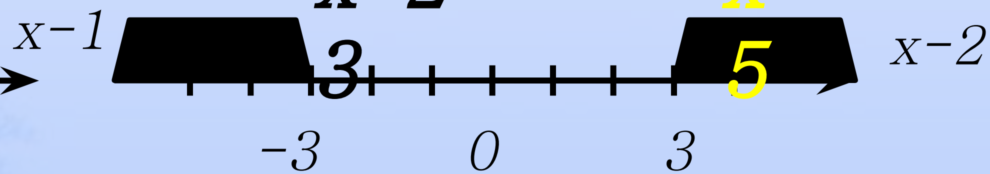
Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x-1| \le 3$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x-2| \ge 3$?

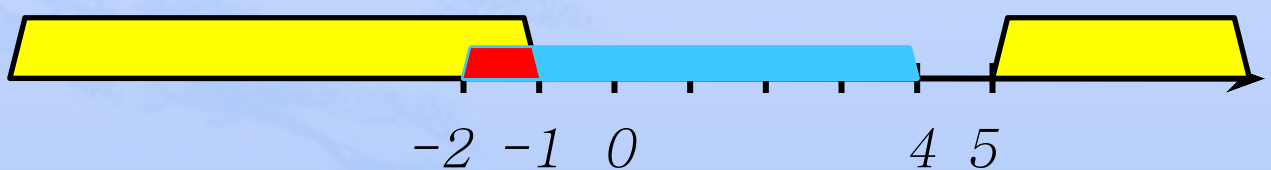
$-3 \le x-1 \le 3$

$-2 \le x \le 4$

$\left[\begin{array}{l} x-2 \le -3 \\ x-2 \ge 3 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge 5 \end{array}\right.$







Ответ. 1/6

Задача №10

Графический редактор, установленный на компьютере, случай но отмечает одну точку на мониторе – квадрате ABCD со стороной 12см. Какова вероятность того, что эта точка:

а) окажется в верхней половине монитора?

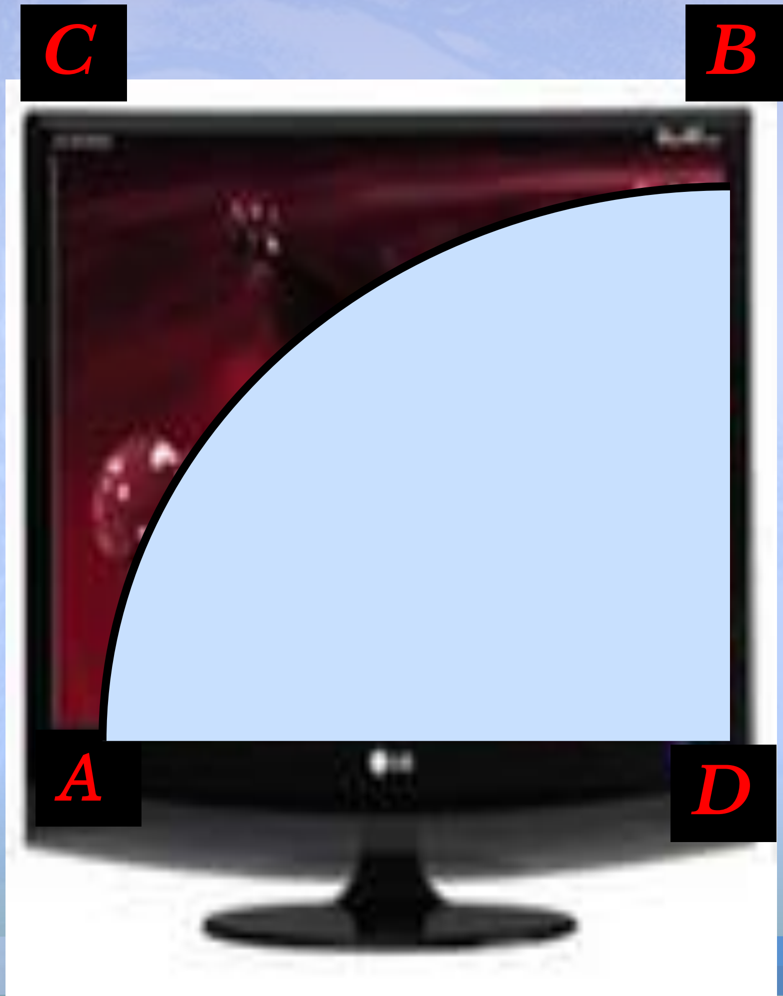
Задача №10

Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе – квадрате ABCD со стороной 12см. Какова вероятность того, что эта точка:

б) окажется одновременно в нижней и левой части монитора?

Задача №10

Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе – квадрате ABCD со стороной 12см. Какова вероятность того, что эта точка:



в)будет удалена от вершины D не более, чем на 11см ?

- Предмет математики столь серьезен, что не следует упускать ни одной возможности сделать его более занимательным.
- Б. Паскаль

Спасибо за внимание.