

## Обобщение темы «Треугольник»

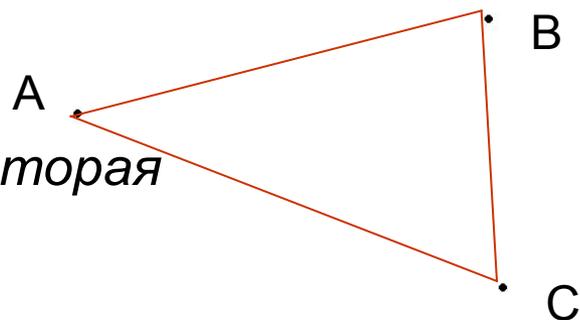
# 1. ЧТО ТАКОЕ ТРЕУГОЛЬНИК

## И ИЗ ЧЕГО ОН СОСТОИТ?

Отметим какие-нибудь **три точки**, не лежащие на одной прямой,

и соединим их попарно **три отрезками**:

Получается геометрическая фигура, которая называется **треугольником**.



Итак,

Треугольник- это геометрическая фигура, состоящая из трёх точек, не лежащих на одной прямой и попарно соединённых тремя отрезками.

Треугольники бывают **равнобедренными**, **равносторонними**, **остроугольными**, **тупоугольными**, **прямоугольными**.

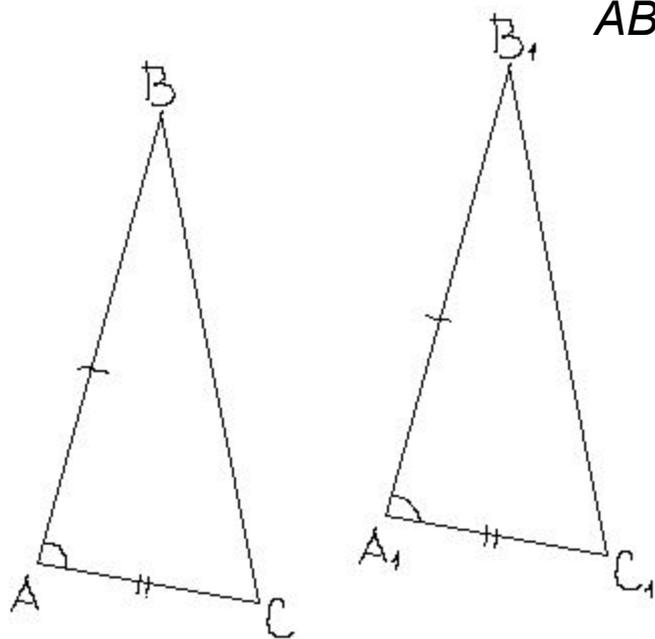
Треугольник состоит из трёх вершин (три точки) и трёх сторон (три отрезка).

## 2. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

### 1. Первый признак равенства треугольников.

**Теорема:** если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

**Доказательство:** рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$ ,  $\angle A=\angle A_1$ .



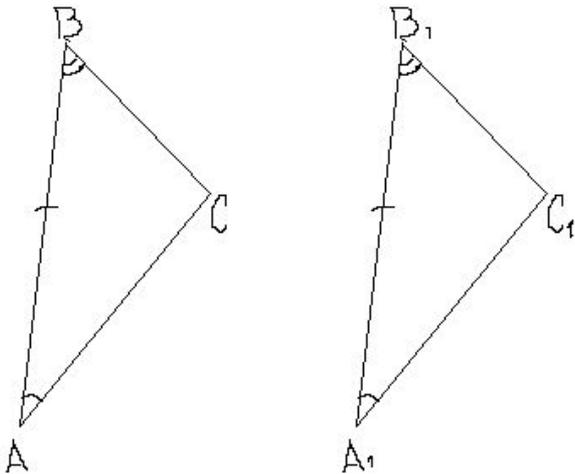
Так как  $\angle A=\angle A_1$ , то треугольник  $ABC$  можно наложить на треугольник  $A_1B_1C_1$  так, что вершина  $A$  совместится с вершиной  $A_1$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  - соответственно на лучи  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ . Так как  $AB=A_1B_1$ ,  $AC=A_1C_1$ , то сторона  $AB$  совместится со стороной  $A_1B_1$ , а сторона  $AC$  - со стороной  $A_1C_1$ ; так же совместятся точки  $B$  и  $B_1$ ,  $C$  и  $C_1$ .

Следовательно, совместятся стороны  $BC$  и  $B_1C_1$ . Отсюда следует, что, так как треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  полностью

совместятся, то эти треугольники **равны**.

## 2. Второй признак равенства треугольников.

**Теорема:** если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.



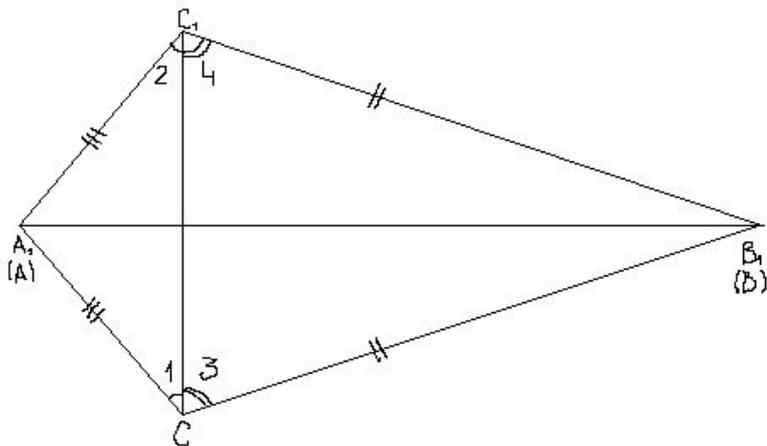
**Доказательство:** Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых  $AB=A_1B_1$ ,  $\angle A=\angle A_1$ ,  $\angle B=\angle B_1$ .

Наложим треугольник  $ABC$  на треугольник  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $A_1$ , сторона  $AB$  – с равной ей стороной  $A_1B_1$ , а вершины  $C$  и  $C_1$  оказались по одну сторону от прямой  $A_1B_1$ .

Так как  $\angle A=\angle A_1$  и  $\angle B=\angle B_1$ , то сторона  $AC$  наложится на луч  $A_1C_1$ , а сторона  $BC$  – на луч  $B_1C_1$ . Поэтому вершина  $C$  – общая точка сторон  $AC$  и  $BC$  – окажется лежащей как на луче  $A_1C_1$ , так и на луче  $B_1C_1$  и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей – вершиной  $C_1$ . Значит, совместятся стороны  $AC$  и  $A_1C_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ . Итак, треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  полностью совместятся, следовательно, они **равны**.

### 3. Третий признак равенства треугольников.

**Теорема:** если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

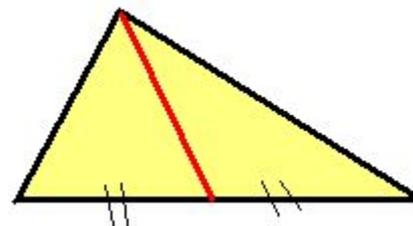


**Доказательство:** Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ , у которых  $AB = A_1B_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $CA = C_1A_1$ . Приложим треугольник  $ABC$  к треугольнику  $A_1B_1C_1$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $A_1$ , вершина  $B$  –  $B_1$ , а вершины  $C$  и  $C_1$  оказались по разные стороны от прямой  $A_1B_1$ . Возможны три случая. Рассмотрим один из случаев: луч  $C_1C$  проходит внутри угла  $A_1C_1B_1$ .

Так как по условию теоремы  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ , то треугольники  $A_1C_1C$  и  $B_1C_1C$  – равнобедренные. По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , поэтому  $\angle A_1CB_1 = \angle A_1C_1B_1$ . Итак,  $AC = A_1C_1$ ,  $BC = B_1C_1$ ,  $\angle C = \angle C_1$ . Следовательно, треугольник  $ABC$  равен треугольнику  $A_1B_1C_1$  по первому признаку равенства треугольников.

### 3. МЕДИАНЫ, ВЫСОТЫ И БИСЕКТРИСЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ.

Отрезок  $AB$ , соединяющий вершину угла  $A$  с серединой противоположной стороны  $B$ , называется **медианой треугольника.**



а) Остроугольный  
треугольник

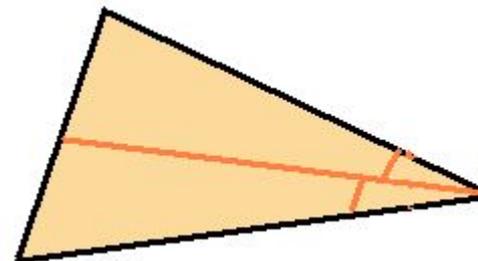


б) тупоугольный  
треугольник



Перпендикуляр, проведённый из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону называется (рис. а и б) **высотой треугольника.**

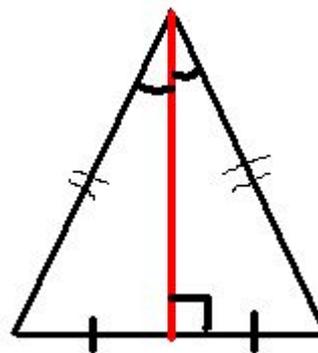
Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника.**



У каждого треугольника всегда три медианы, биссектрисы и высоты, так как три угла (три вершины) и три стороны.

## 4. РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ И ИХ СВОЙСТВА.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.



В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведённая к основанию, является медианой и высотой.

(Высота равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является медианой и высотой; медиана равнобедренного треугольника, проведённая к основанию, является высотой и биссектрисой.)

