Комплексные числа:

от прошлого к настоящему

Урок обощения по теме «Комплексные числа» в 10 классе»

Цель занятия: повторение и обобщение знаний по теме; с выходом на ознакомление с элементами теории функций комплексной переменной.

Задачи:

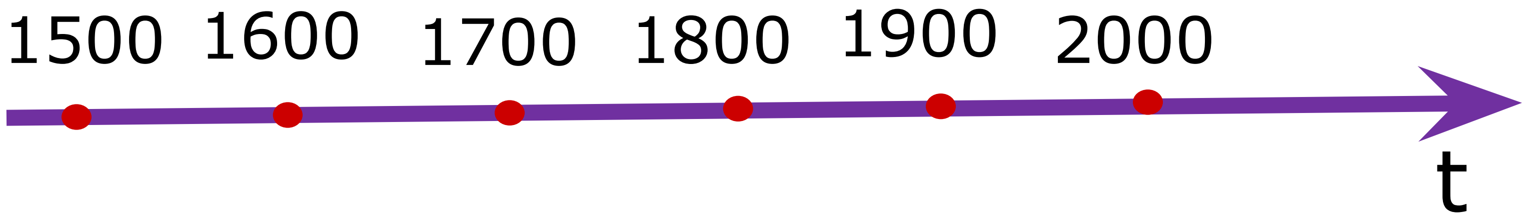
1 - повторение вопросов теории

2 - вычислительная работа, связанная с алгебраической формой комплексного числа

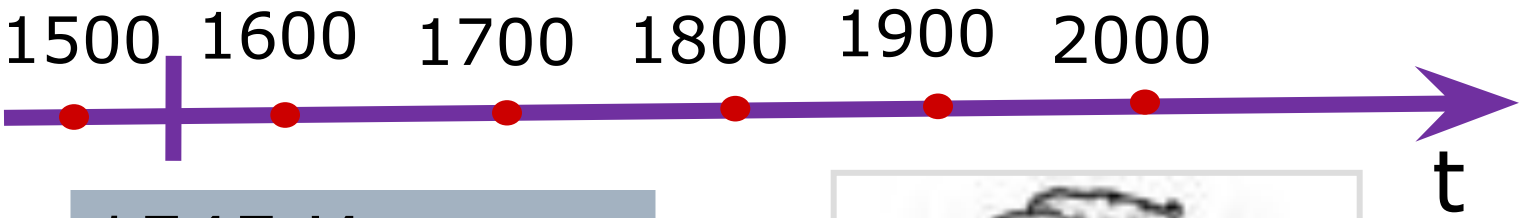
3 - практическая работа, связанная с геометрической интерпретацией комплексных чисел, выход на функции комплексных переменных

4 – итоговый контроль

Лента времени



Лента времени

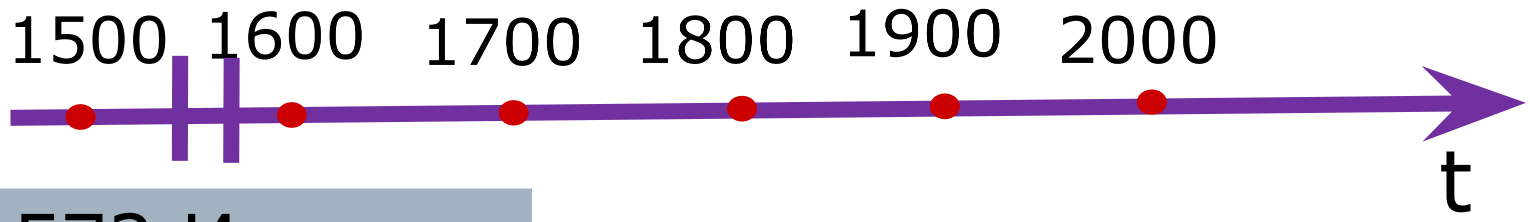


1545 Италия

Д.Кардано

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 40 \end{cases}$$

Лента времени



1572 Италия
Р. Бомбелли

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Выполните действия, ответы запишите в тетрадь

1) (3+2i)+3(-1+3i)

2) i-2-(6-5i)

3) (1+i)(1-i)

4) i^3, i^{101}

5) $\frac{3}{i}$

6) $(1+i)^4$

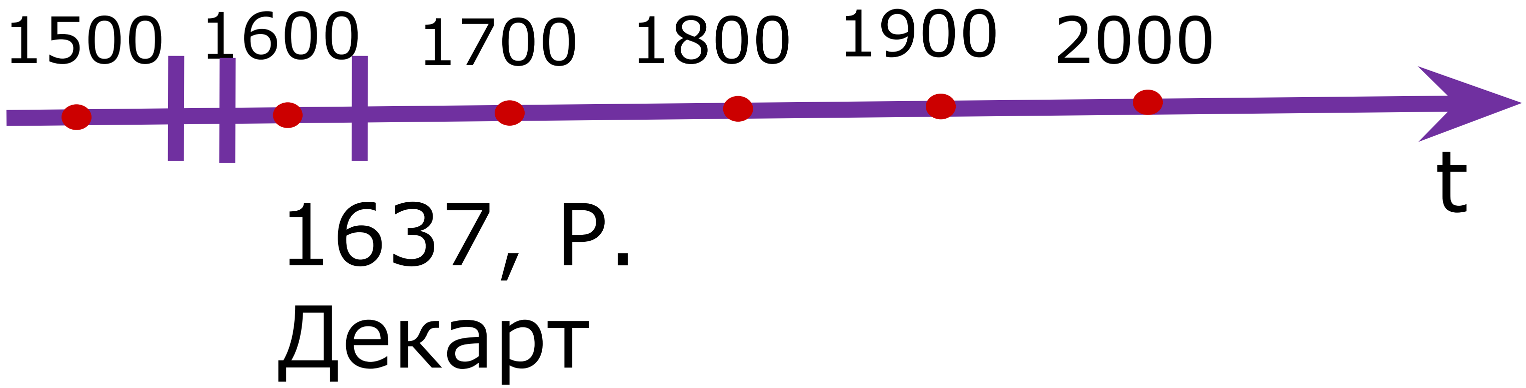
Разложите на множители в комплексных числах:

7) x^2+1, 8) a^2+4b^2, 9) x^4-16

Проверь себя!

- 1) 11i
- 2) -8+6i
- 3) 2
- 4) –i, i
- 5) -3i
- 6) -4
- 7)(x-i)(x+i)
- 8)(a+2bi)(a-2bi)
- 9) (x-2)(x+2)(x-2i)(x+2i)

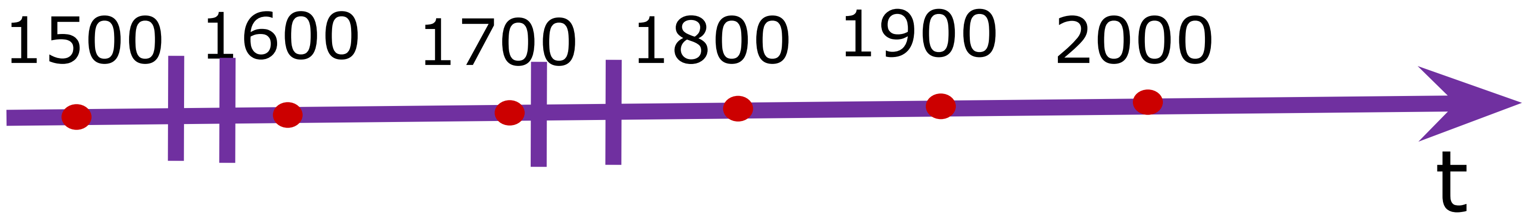
Лента времени



« Мнимые числа - это прекрасное и чудесное убежище божественного духа, почти что амфибия бытия с небытием»

(Г.Лейбниц)

Лента времени



1748 Л. Эйлер

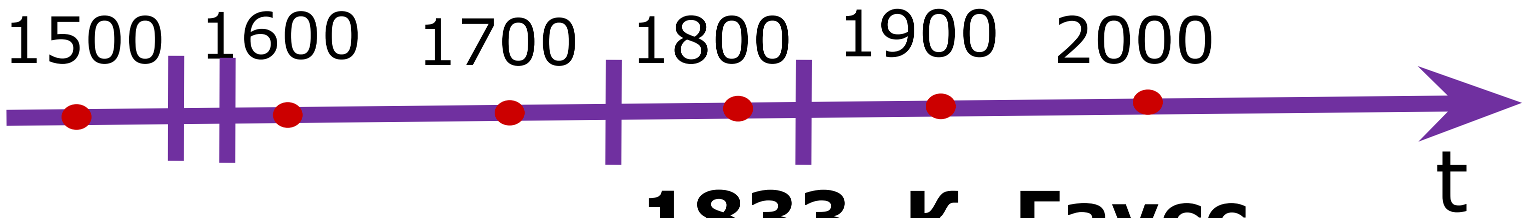
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \text{ при } x = 2\pi$$

Словарь терминов

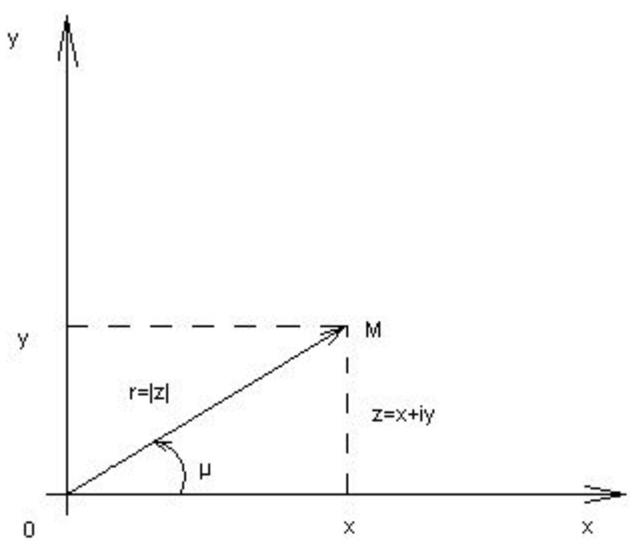
- Комплексный-лат. составной, сложный. Термин введён Гауссом
- i-первая буква французского слова imaginaire, мнимый
- Инверсия, inversio - лат. переворачивание

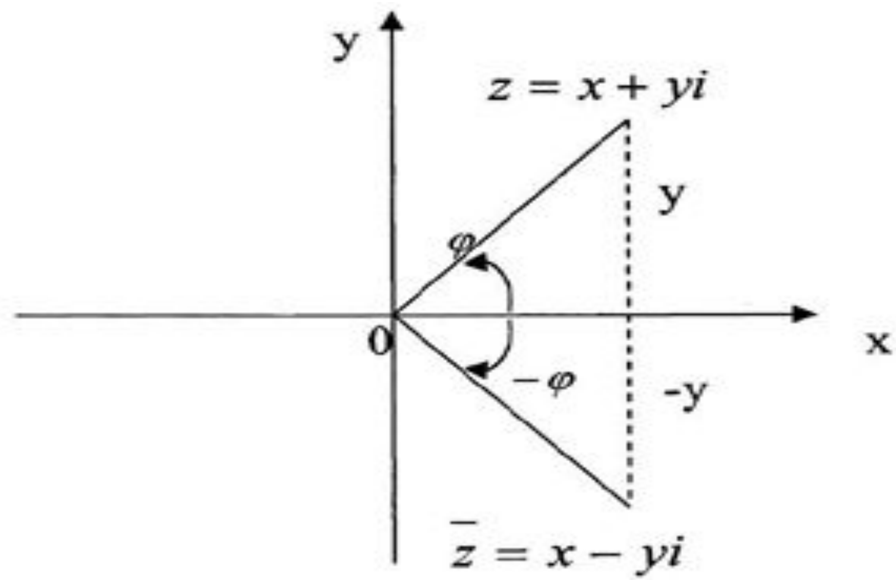
Карл Фридрих Гаусс
1777—1855

Лента времени



1833, К. Гаусс





Основные определения

- Число вида z=a+bi называется *комплексным, a и b-действительные числа, i-мнимая единица*

  Re z=a, Im z=b

- *Модулем комплексного числа называется*

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- *Аргументом комплексного числа z называется угол между положительным направлением полуоси OX и радиус-вектором OM, M(a,b)*
- *Главный аргумент arg z заключен в границах*

$$\varphi \in (-\pi; \pi]$$

- *Тригонометрическая форма комплексного числа*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Основные формулы

$$\bar{z} = a - bi$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ \mathrm{z}_2 = |\mathrm{z}_2|\,(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

$$z^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

формула Муавра (1707)

Тригонометрическая форма комплексного числа

- Изобразите комплексное число на плоскости $z=-2+2i$
- Запишите данное число в тригонометрической форме

Тригонометрическая форма комплексного числа

- Изобразите комплексное число на плоскости z=-2+2i
- Запишите данное число в тригонометрической форме

$$|z| = 2\sqrt{2}, \arg z = \frac{3\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} \right)$$

Решите задачу различными способами в алгебраической и тригонометрической форме

$$\textit{Найдите} \quad z^6, \; \textit{если} \; 3z - \bar{z} = -4 + 8i$$

Указания к решению

1 способ.

Если $z=x+iy$, то получаем уравнение

$$3x+3yi-x+yi=-4+8i,$$

$$x+2yi=-2+4i,$$

Используем условие равенства комплексных чисел, получаем, что $x=-2$, $y=2$.

При возведении в квадрат, получаем число $-8i$, которое возводим в куб.

Ответ: $512i$

2 способ.

Представленное в тригонометрической форме число возвести по формуле Муавра в 6-ю степень.

Геометрическое место точек

- Изобразить на плоскости ГМТ, удовлетворяющих условиям:

№1. $|z+i| = 1{,}5$

№2. $\mathrm{Im}\,\bar{z} \geq -2$

№3. $\dfrac{-\pi}{6} \leq \arg z \leq \dfrac{\pi}{4}$

№4. $\mathrm{Re}(z^2) = 0$

№5. Решения уравнения $w^6 + 1 = 0$

Полученные ГМТ

№1. Окружность с центром (0;-1) и радиусом 1,5

№2. Полуплоскость $y \le 2$.

№3. Угол, заключенный между заданными лучами.

№4. Прямые $y=x$ и $y=-x$.

№5. Точки, расположенные в вершинах правильного

6-тиугольника с центром (0;0).

Модуль равен 1.

Простейший аргумент $\frac{\pi}{6}$

Функции комплексного переменного

- Задайте условиями четверть круга с центром в точке (0;0), радиусом 2.
- Выполните преобразования и постройте ГМТ w, удовлетворяющее условию:

Выполните:

I вариант - а, в, д

II вариант - б, г, д.

$$а)w = z + (3 + i)$$

$$б)w = 2z$$

$$в)w = z(1 - i)$$

$$г)w = z^3$$

$$д)w = \frac{1}{z}$$

Решения задач

$$\begin{cases} 0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{2} \\ |z| \le 2 \end{cases}$$

а) *параллельный перенос на вектор* $(3;1)$.

б) *гомотетия с центром* $(0;0)$ *и коэффициентом* 2.

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi); \quad w = 2|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

в) поворот на угол $\dfrac{\pi}{4}$ *по часовой стрелке;*

гомотетия с коэффициентом $\sqrt{2}$ *и центром* $(0;0)$

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi); \; 1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right))$$

$$w = \sqrt{2}|z|(\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{4}\right))$$

Решения задач

г) $$w = |z|^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi);$$

$$\begin{cases} |w| = 8 \\ 0 \le \arg w \le \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$$

д) $$1 = 1(\cos 0^0 + i\sin 0^0);$$

$$w = \frac{1}{|z|}(\cos(0^0 - \varphi) + i\sin(0^0 - \varphi));$$

$$w = \frac{1}{|z|}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)).$$

$$\begin{cases} |w| = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{\pi}{2} \le \arg w \le 0 \end{cases}$$

Внутренние точки переходят во внешние,

штриховка вне фигуры.

Такое преобразов ание называется *инверсией*.

Этап 4. Итоговый тест. Проверь себя! («да» или «нет»)

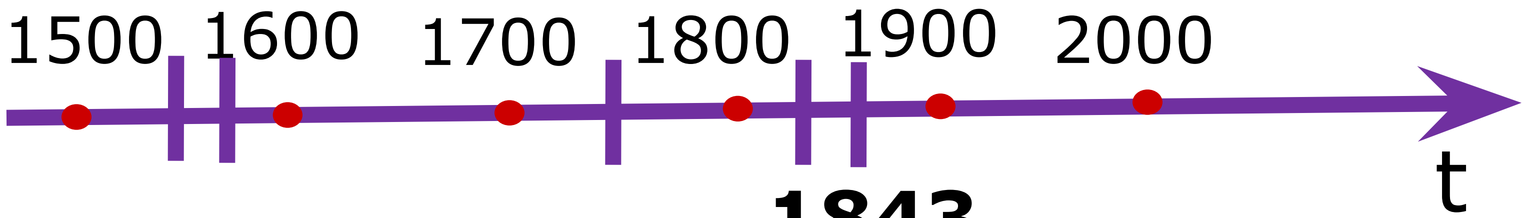
1. Число **1+i** является действительным?
2. **$-2(\cos 90^0+i\sin 90^0)$ -** является тригонометрической формой комплексного числа?
3. Многочлен **(x+4)** можно разложить на множители в комплексных числах?
4. Если комплексное число равно своему сопряженному, то оно является действительным?
5. Число $\boxed{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$ имеет аргумент равный п/3 ?

Ответы

1. Нет
2. Нет
3. Да
4. Да
5. Нет

*

Лента времени



1843

У.Р. Гамильтон

$$q = x + yi + uj + vk,$$

где i, j, k – новые числа, являющиеся аналогом мнимой единицы в комплексных числах.

Домашнее задание:
34.38, 35.42, 32.36(а, б)

«Мысль выражать все числа знаками настолько проста, что именно из-за этой простоты сложно осознать, сколь она удивительна»

Пьер Симон Лалас

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные как тени,
Вы радугой связующей повисли
К раздумиям с вершины вдохновенья.

Валерий Яковлевич Брюсов
(русский писатель, 1873-1924)

Дополнительные задачи

Каков геометрический смысл выражений:

а) $|z|$,

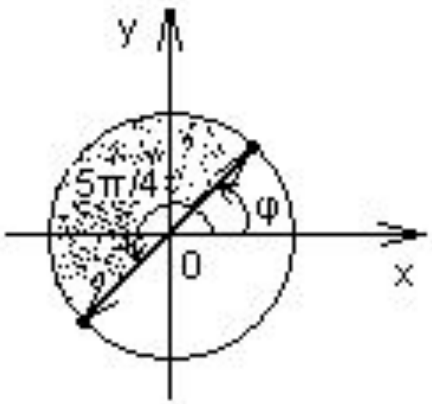
б)$\mathrm{Arg} z$;

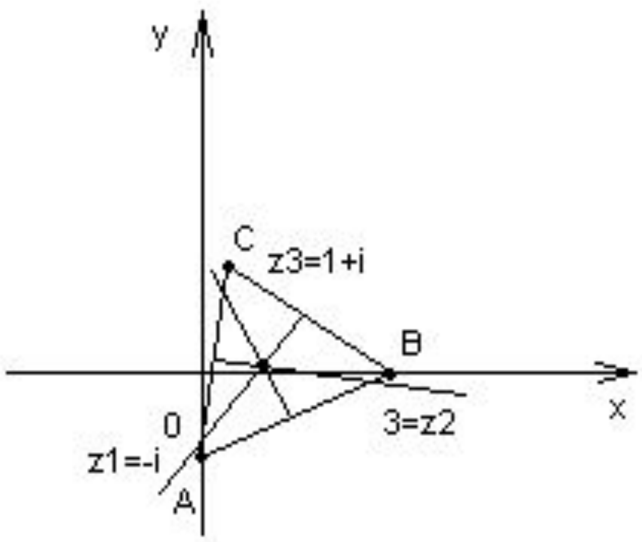
в) $|z_1-z_2|$,

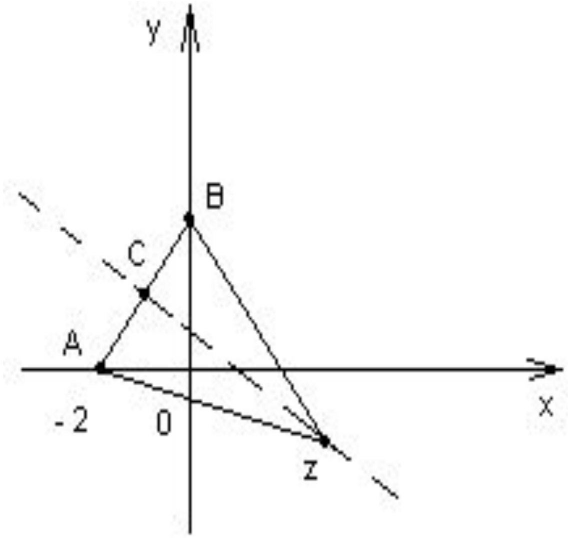
г) $\mathrm{Arg}(z_1/z_2)$?

Найти геометрическое место точек:

$|z-3i|=|z+2|$; $|z+i|=|z-3|=|z-1-i|$; $|z|\leq R$, $\pi/4\leq \arg z\leq 5\pi/4$







Вычислить: $ii^2i^3\ldots i^{10}=?$

Доказать, что

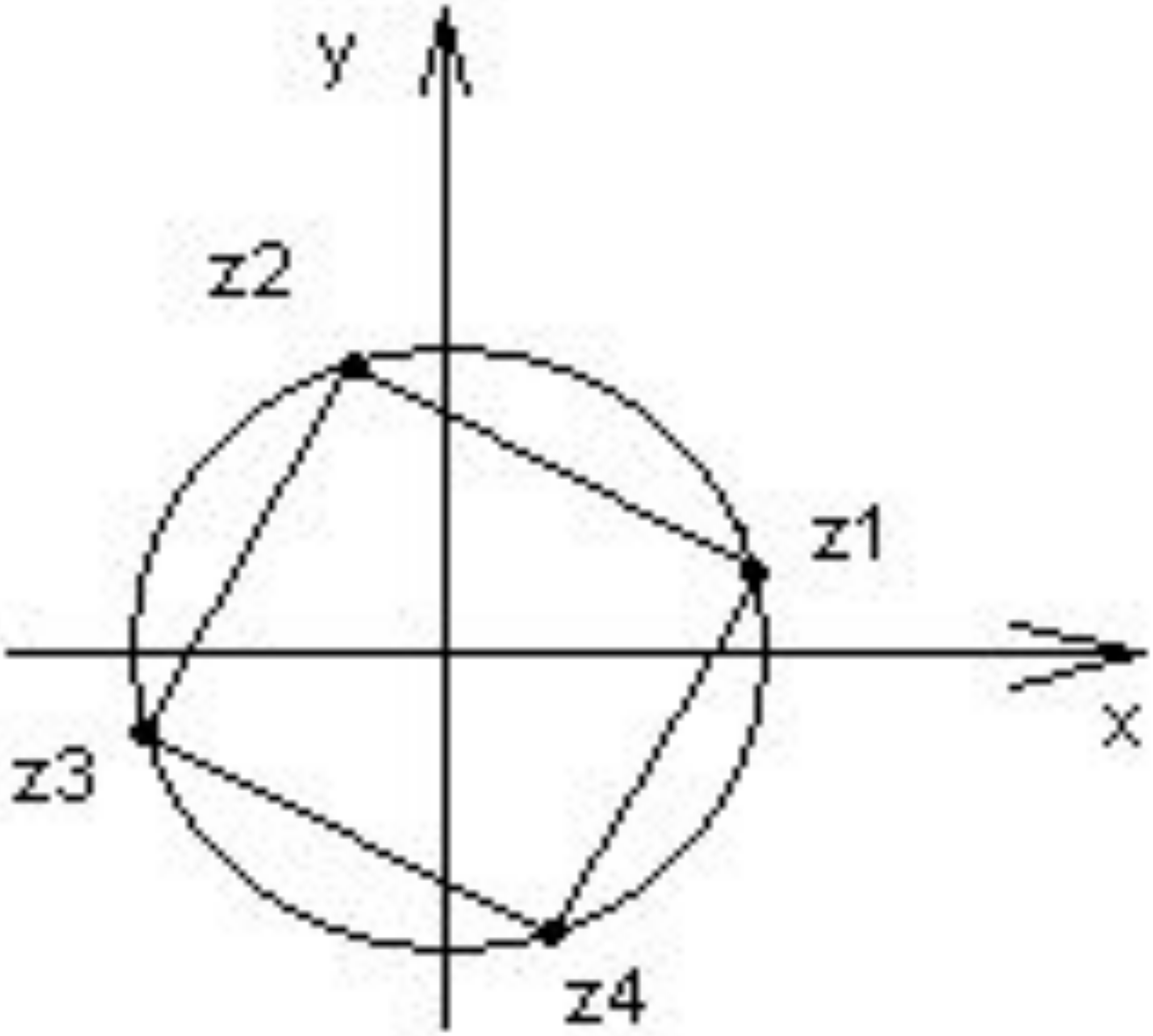
$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\sin^2\varphi\cos\varphi$;
$\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$.

Найти действительные решения уравнения

$$(3+i)x+(-5+2i)y=4+16i.$$

Найти все значения корня $\sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.

Дать геометрическую иллюстрацию.


y
z2
z1
x
z3
z4

Представить в алгебраической форме комплексное число

$$1/(1+i\sqrt{3})^6-1/(\sqrt{3}-i)^6 = z$$

Решить уравнение

$$z^2 - (4+3i)\, z + 1 + 5i = 0$$