

A stylized, light-colored illustration of a plant with a central stem, several large leaves, and a cluster of small, round buds or flowers at the top, set against a dark brown background.

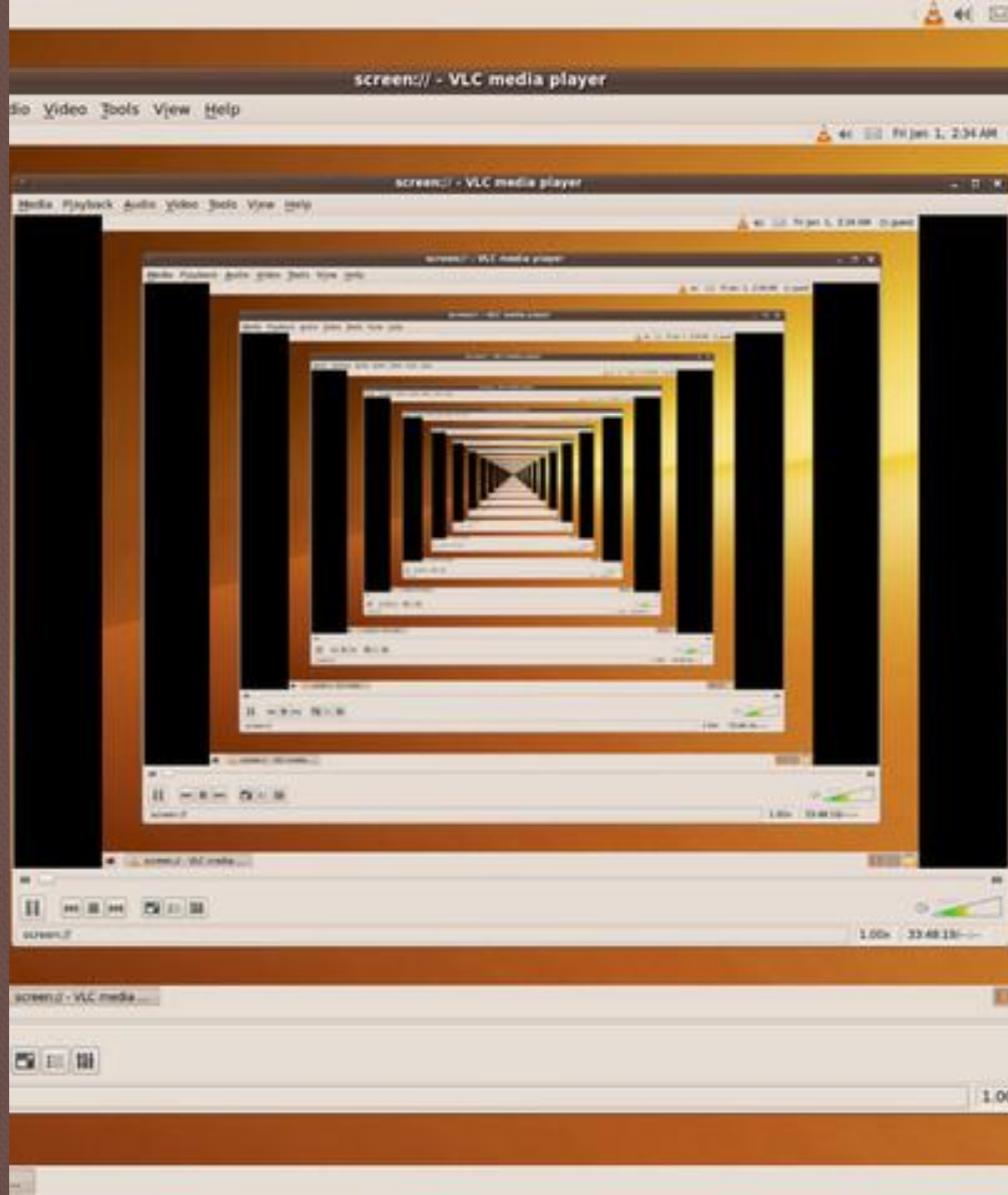
РЕКУРСИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ.

**Задание № 11 ЕГЭ
(базовый уровень, время – 5 мин)**

Автор – Коротун О.В.,
учитель информатики МОУ «СОШ № 71»

Содержание:

- [Определение рекурсии](#)
- Примеры решения задач
- [Пример 1](#)
- [Пример 2](#)
- [Пример 3](#)
- [Пример 4](#)
- [Задания для тренировки](#)



Что нужно знать:

Рекурсия — в определении, описании, изображении какого-либо объекта или процесса внутри самого этого объекта или процесса, то есть ситуация, когда объект является частью самого себя.

Герб Российской Федерации является рекурсивно-определённым графическим объектом: в правой лапе изображённого на нём двуглавого орла зажат скипетр, который венчается уменьшенной копией герба. Так как на этом гербе в правой лапе орла также находится скипетр, получается бесконечная рекурсия.

Рекурсивный герб России





В программировании рекурсия — вызов функции из неё же самой, непосредственно или через другие функции, например, функция А вызывает функцию В, а функция В — функцию А. Количество вложенных вызовов функции или процедуры называется глубиной рекурсии.



РЕКУРСИЯ!



Пример задания:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end  
end;
```

*Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове F(1).*

**Решение с помощью дерева вызовов:
в начале каждого вызова на экран выводится
значение единственного параметра функции**

Пример задания:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3)  
  end  
end;
```

*Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове F(1).*

1

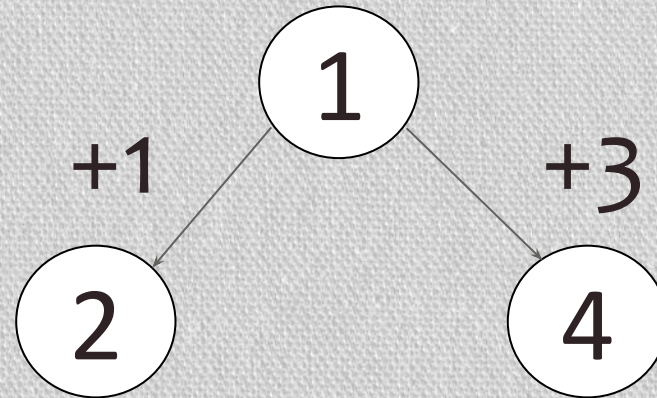
Пример задания:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3);  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове $F(1)$.

при $n < 5$ выполняется два рекурсивных вызова,
и на экране появляются следующие значения
параметра:



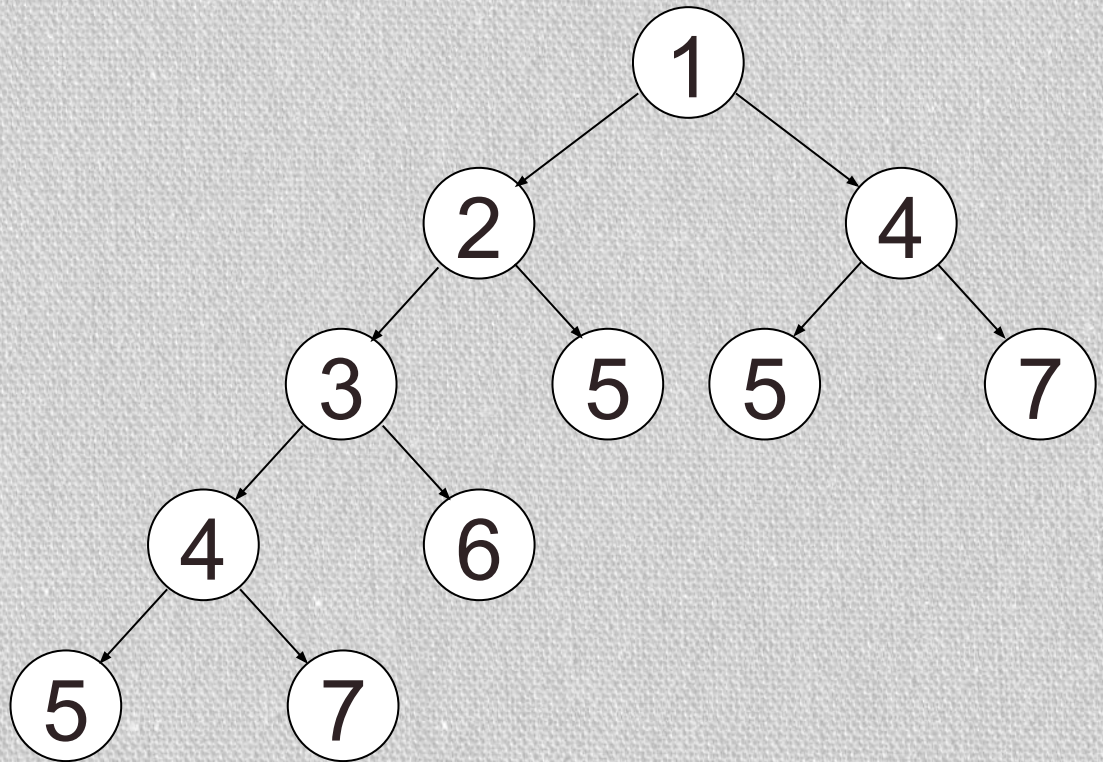
Пример задания:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3);  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове $F(1)$.

Продолжаем до тех пор, пока условие $n < 5$ не
станет ложным для узловых параметров.
Получаем следующие значения:



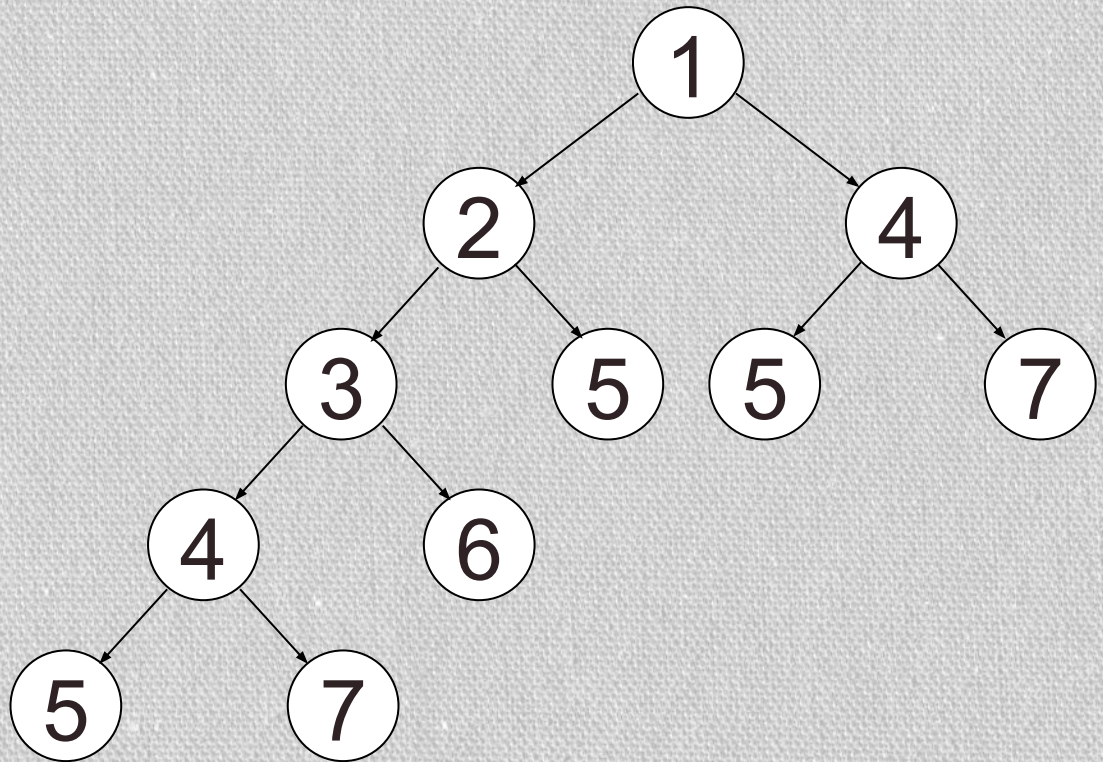
Пример задания:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 5 then begin  
    F(n + 1);  
    F(n + 3);  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове $F(1)$.

Продолжаем до тех пор, пока условие $n < 5$ не
станет ложным для узловых параметров.
Получаем следующие значения:



Складывая все эти числа, получаем **49**



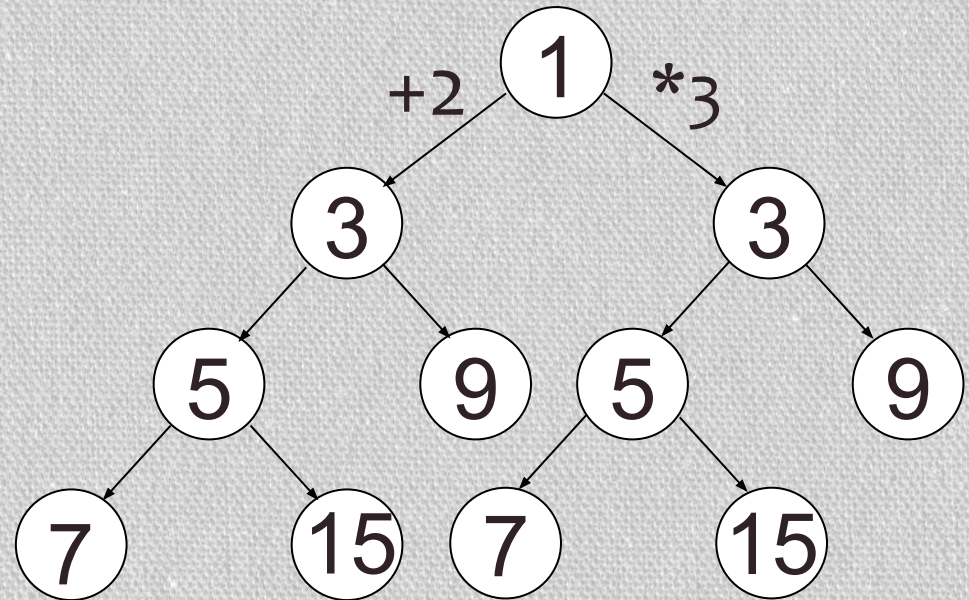
Пример № 2:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 6 then begin  
    F(n+2);  
    F(n*3);  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове $F(1)$.

Аналогичная задача, которую можно решать с
помощью дерева:



Складывая все эти числа, получаем **79**

Пример № 2:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln(n);  
  if n < 6 then begin  
    F(n+2);  
    F(n*3)  
  end  
end;
```

Найдите сумму чисел,
которые будут выведены
при вызове F(1).

А можно обойтись и без дерева!
Пусть $S(n)$ – это сумма чисел,
которые будут выведены при
вызове F(n). Тогда

$$S(n) = \begin{cases} n+S(n+2)+S(n*3), & n < 6 \\ n, & n \geq 6 \end{cases}$$

Выполняем вычисления:

$$S(1)=1+S(3)+S(3)$$

$$S(3)=3+S(5)+S(9)=12+S(5)$$

$$S(5)=5+S(7)+S(15)=5+7+15=27$$

Делаем обратный ход:

$$S(3)=12+27=39$$

$$S(1)=1+39+39=79$$



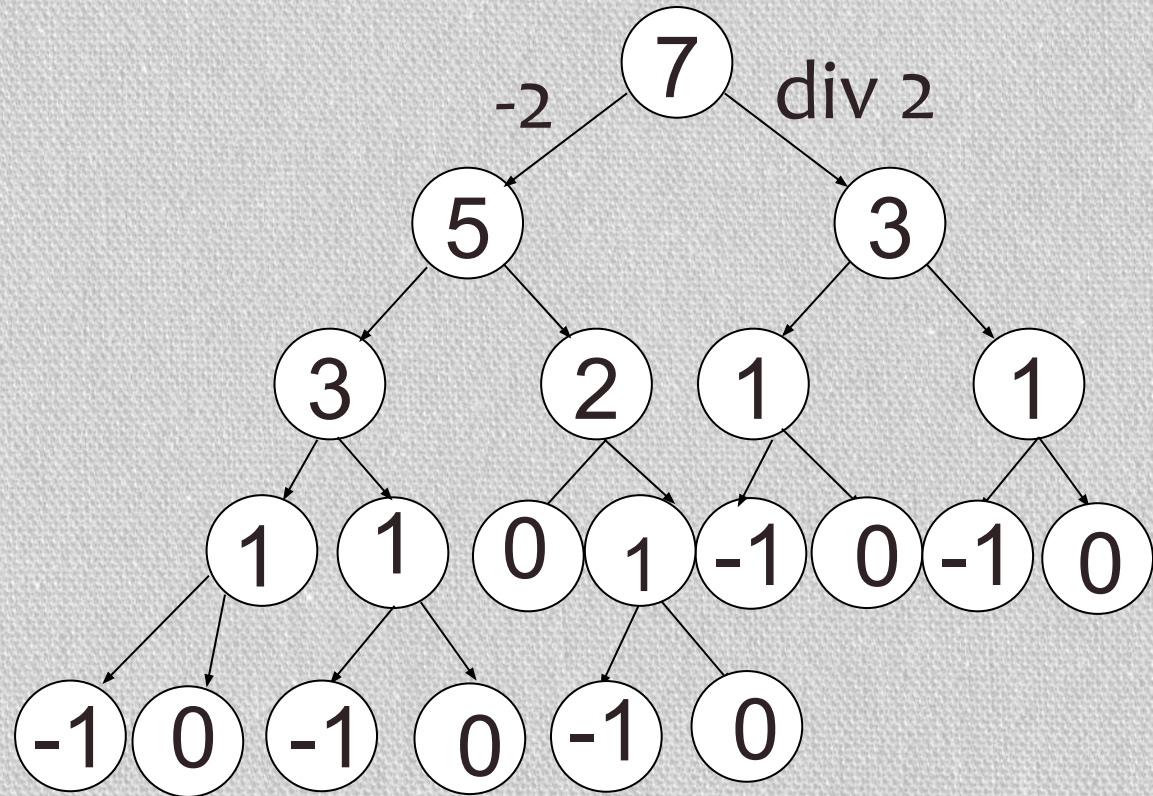
Пример № 3:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 0 then begin  
    F(n-2);  
    F(n div 2)  
  end  
end;
```

Сколько символов "звездочка" будет напечатано на экране при выполнении вызова F(7)?

В этом примере на экран выводятся не значения параметра n, а символ *



Пример № 3:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);
```

```
begin
```

```
  writeln('*');
```

```
  if n > 0 then begin
```

```
    F(n-2);
```

```
    F(n div 2)
```

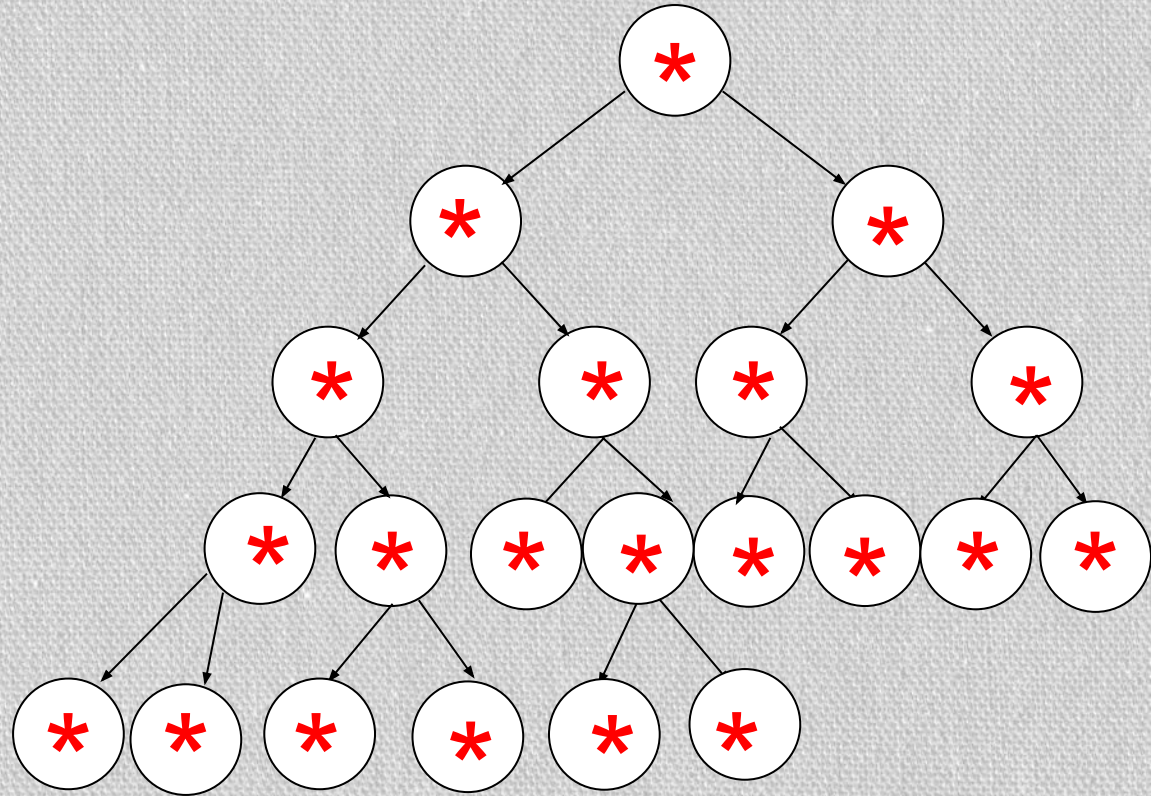
```
  end
```

```
end;
```

Сколько символов
"звездочка" будет
напечатано на экране

при выполнении вызова
 $F(7)$?

В этом примере на экран выводятся не значения параметра n , а символ *



Подсчитав количество «звездочек»,
получаем **21**

Пример № 3:

Дан рекурсивный алгоритм:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  writeln('*');  
  if n > 0 then begin  
    F(n-2);  
    F(n div 2)  
  end  
end;
```

Сколько символов
"звездочка" будет
напечатано на экране
при выполнении вызова
F(7)?

Решим задачу без дерева.

Пусть $S(n)$ – это количество «звездочек»,
которые будут выведены при вызове $F(n)$.

Тогда

$$S(n) = \begin{cases} 1 + S(n-2) + S(n \text{ div } 2), & n > 0 \\ 1, & n \leq 0 \end{cases}$$

Нам нужно узнать $S(7)$.

$$S(7) = 1 + S(5) + S(3)$$

$$S(5) = 1 + S(3) + S(2)$$

$$S(3) = 1 + S(1) + S(1)$$

$$S(2) = 1 + S(0) + S(1) = 1 + 1 + S(1) = 2 + S(1)$$

$$S(1) = 1 + S(-1) + S(0) = 1 + 1 + 1 = 3$$

Делаем обратный ход:

$$S(2) = 2 + 3 = 5$$

$$S(3) = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$S(5) = 1 + 7 + 5 = 13$$

$$S(7) = 1 + 13 + 7 = \mathbf{21}$$

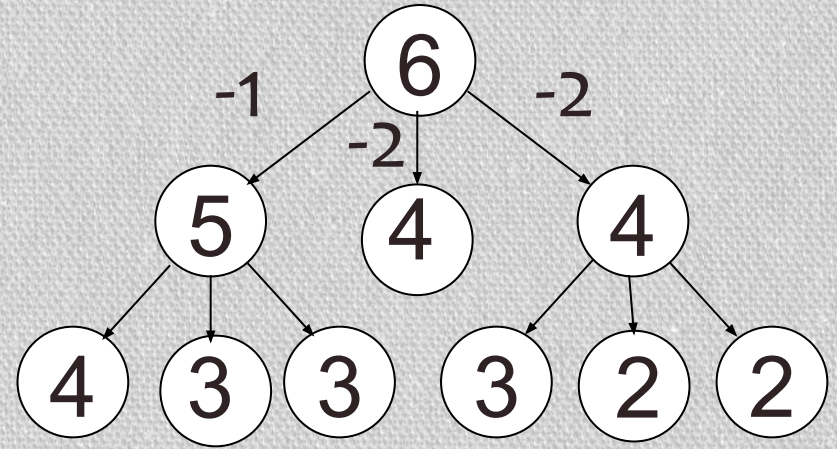


Пример № 4:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 3 then  
    write('*')  
  else begin  
    F(n-1);  
    F(n-2);  
    F(n-2)  
  end;  
end;
```

Сколько звездочек
напечатает эта процедура
при вызове $F(6)$? В ответе
запишите только целое
число.

эта задача по сути такая же, как и
предыдущая: для $n < 3$ функция выводит одну
звездочку, а для бóльших n продолжаем
рисовать дерево

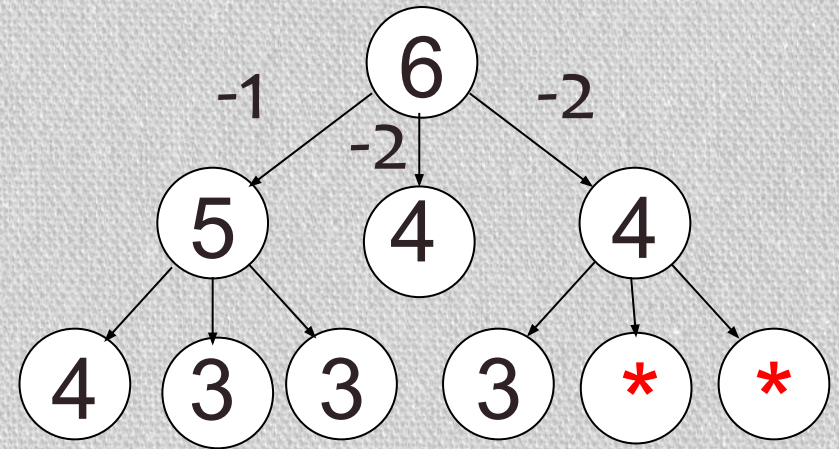


Пример № 4:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 3 then  
    write('*')  
  else begin  
    F(n-1);  
    F(n-2);  
    F(n-2)  
  end;  
end;
```

Сколько звездочек напечатает эта процедура при вызове F(6)? В ответе запишите только целое число.

При условии $n < 3$ на экране появляются «звездочки».



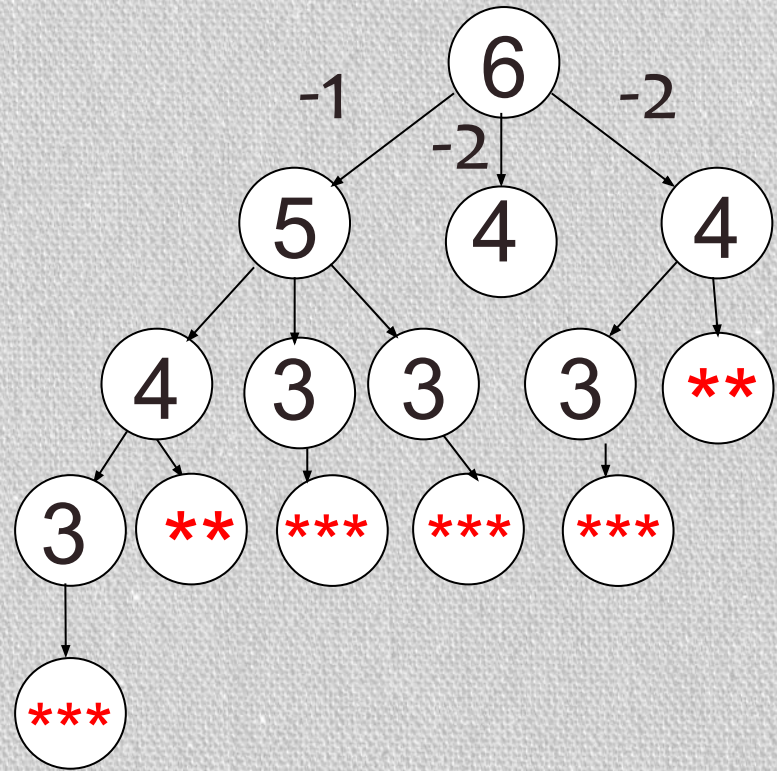
Вторая и третья ветви абсолютно одинаковые, поэтому будем рисовать одну, а количество «звездочек» потом умножим на 2.

Пример № 4:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 3 then  
    write('*')  
  else begin  
    F(n-1);  
    F(n-2);  
    F(n-2)  
  end;  
end;
```

Сколько звездочек напечатает эта процедура при вызове F(6)? В ответе запишите только целое число.

При условии $n < 3$ на экране появляются «звездочки».



Получаем по первой ветви 11 «звездочек», по третьей, а значит и по второй – по 5.

Всего – 21

Пример № 4:

```
procedure F(n: integer);
begin
  if n < 3 then
    write('*')
  else begin
    F(n-1);
    F(n-2);
    F(n-2)
  end;
end;
```

Сколько звездочек напечатает эта процедура при вызове F(6)? В ответе запишите только целое число.

Решим задачу без дерева.

Пусть $S(n)$ – это количество «звездочек», которые будут выведены при вызове $F(n)$.

Тогда

$$S(n) = \begin{cases} S(n-1) + S(n-2) + S(n-2), & n \geq 3 \\ 1, & n < 3 \end{cases}$$

ИЛИ

$$S(n) = \begin{cases} S(n-1) + 2 * S(n-2), & n \geq 3 \\ 1, & n < 3 \end{cases}$$

Пример № 4:

```
procedure F(n: integer);  
begin  
  if n < 3 then  
    write('*')  
  else begin  
    F(n-1);  
    F(n-2);  
    F(n-2)  
  end;  
end;
```

Сколько звездочек напечатает эта процедура при вызове F(6)? В ответе запишите только целое число.

$$S(n) = \begin{cases} S(n-1) + 2 * S(n-2), & n \geq 3 \\ 1, & n < 3 \end{cases}$$

Нам нужно узнать S(6).

$$S(6) = S(5) + 2 * S(4)$$

$$S(5) = S(4) + 2 * S(3)$$

$$S(4) = S(3) + 2 * S(2)$$

$$S(3) = S(2) + 2 * S(1) = S(2) + 2 * 1 = S(2) + 2$$

$$S(2) = 1$$

Делаем обратный ход:

$$S(3) = 1 + 2 = 3$$

$$S(4) = 3 + 2 * 1 = 5$$

$$S(5) = 5 + 2 * 3 = 11$$

$$S(6) = 11 + 2 * 5 = \mathbf{21}$$



A stylized, monochromatic illustration of a plant with several leaves and a cluster of small, round buds or flowers, rendered in a dark brown color against a lighter brown background on the left side of the page.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТРЕНИРОВКИ

Задача 1:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(5)?

Ответ: 34



Задача 2:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    F(N-2);  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(6)?

Ответ: 58



Задача 3:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    F(N-3);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(7)?

Ответ: 15



Задача 4:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    F(N-3);  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(7)?

Ответ: 55



Задача 5:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    F(N-3);  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(6)?

Ответ: 97



Задача 6:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    WRITELN('*');  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(7)?

Ответ: 31



Задача 7:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    WRITELN('*');  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(7)?

Ответ: 81



Задача 8:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN('*');  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    WRITELN('*');  
    F(N-2);  
    F(N-2);  
    F(N DIV 2);  
  END  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(6)?

Ответ: 77



Задача 9:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  IF N > 0 THEN BEGIN  
    F(N-2);  
    F(N-1);  
    F(N-1);  
  END;  
  WRITELN('*');  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(5)?

Ответ: 148



Задача 10:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);
```

```
BEGIN
```

```
IF N > 0 THEN BEGIN
```

```
  WRITELN('*');
```

```
  F(N-2);
```

```
  F(N-1);
```

```
  F(N-1);
```

```
END;
```

```
WRITELN('*');
```

```
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ

"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО

НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ

ВЫЗОВА F(5)?

Ответ: 197



Задача 11:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  IF N > 1 THEN BEGIN  
    F(N-2);  
    F(N-1);  
    F(N DIV 2);  
  END;  
  WRITELN('*');  
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ
"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО
НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ
ВЫЗОВА F(7)?

Ответ: 88



Задача 12:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);
```

```
BEGIN
```

```
IF N > 2 THEN BEGIN
```

```
  WRITELN('*');
```

```
  F(N-2);
```

```
  F(N-1);
```

```
  F(N DIV 2);
```

```
END;
```

```
WRITELN('*');
```

```
END;
```

СКОЛЬКО СИМВОЛОВ

"ЗВЕЗДОЧКА" БУДЕТ НАПЕЧАТАНО

НА ЭКРАНЕ ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ

ВЫЗОВА F(6)?

Ответ: 33



Задача 13:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 6 THEN BEGIN  
    F(N+2);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(2).

Ответ: 30



Задача 14:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 5 THEN BEGIN  
    F(N+2);  
    F(N*2)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 53



Задача 15:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 5 THEN BEGIN  
    F(N+3);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 42



Задача 16:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 7 THEN BEGIN  
    F(N+3);  
    F(N*2)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(2).

Ответ: 44



Задача 17:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 7 THEN BEGIN  
    F(N+2);  
    F(N+3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 81



Задача 18:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 5 THEN BEGIN  
    F(N+2);  
    F(N+3);  
    F(N*2)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 103



Задача 19:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 5 THEN BEGIN  
    F(N+1);  
    F(N+2);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(2).

Ответ: 79



Задача 20:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 6 THEN BEGIN  
    WRITELN(N);  
    F(N+2);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(2).

Ответ: 36



Задача 21:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 5 THEN BEGIN  
    WRITELN(N);  
    F(N+3);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 50



Задача 22:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 7 THEN BEGIN  
    WRITELN(N);  
    F(N+1);  
    F(N+2);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(2).

Ответ: 425



Задача 23:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 6 THEN BEGIN  
    WRITELN(N);  
    F(N+1);  
    F(N+2);  
    F(N*2)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 530



Задача 24:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 6 THEN BEGIN  
    WRITELN(N);  
    F(N+1);  
    F(N*2);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(2).

Ответ: 169



Задача 25:

ДАН РЕКУРСИВНЫЙ АЛГОРИТМ:

```
PROCEDURE F(N: INTEGER);  
BEGIN  
  WRITELN(N);  
  IF N < 7 THEN BEGIN  
    WRITELN(N);  
    F(N+2);  
    F(N*2);  
    F(N*3)  
  END  
END;
```

НАЙДИТЕ СУММУ ЧИСЕЛ, КОТОРЫЕ
БУДУТ ВЫВЕДЕНЫ ПРИ ВЫЗОВЕ F(1).

Ответ: 426

