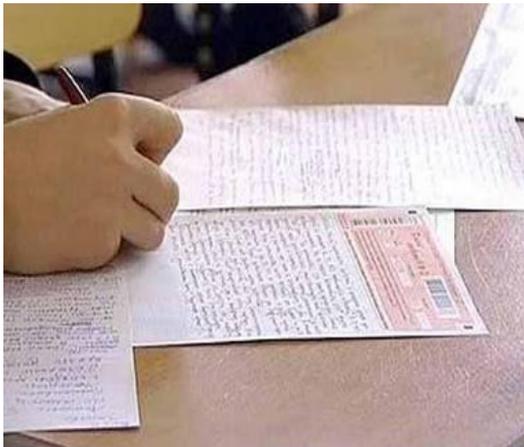


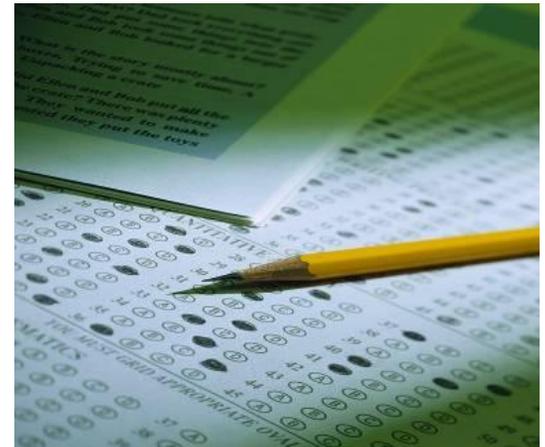
МБОУ «СОШ №14»

Анализ типичных затруднений выпускников при выполнении заданий ЕГЭ по математике

**Методические рекомендации
по некоторым аспектам совершенствования
преподавания математики**



**Учитель математики:
Н.С.Алтунина**



Федеральный институт педагогических измерений

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО НЕКОТОРЫМ АСПЕКТАМ
СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ
МАТЕМАТИКИ**

*(на основе анализа типичных затруднений
выпускников при вы-
полнении заданий ЕГЭ)*

**И.В. Яценко, А.В. Семенов,
И.Р. Высоцкий**

Москва, 2013

**В основной волне ЕГЭ
по математике
в июне 2013 г.
принял участие 830161
человек.**

Задания первой части

I. Задания по алгебре.

II. Задания по геометрии.

III. Практико-ориентированные задачи.

**Для участников экзамена,
заинтересованных в преодолении
порогового балла 5 первичных
или 24 тестовых**

Предназначены задания:

V1 - V5, V10, V13, направленные на:

- выявление и оценку уровня развития общекультурных и коммуникативных математических навыков, необходимых человеку в современном обществе;
- проверку адекватности восприятия текста практико-ориентированных задач;
- проверку базовых вычислительных и логических умений и навыков;

**Для участников экзамена,
заинтересованных в преодолении
порогового балла 5 первичных
или 24 тестовых**

- оценку умения считать и анализировать графическую и табличную информацию;
- оценку способности ориентироваться в постых наглядных геометрических конструкциях.

Для участников экзамена , планирующих использовать результаты ЕГЭ по математике при поступлении в ссузы и вузы, предназначены задания В7 – В14, С1 –С6, требующие математических знаний и направленные на ранжирование абитуриентов по уровню математической подготовки.

Проблемы образования

1. Мотивационные проблемы:

- общественная недооценка значимости математического образования;
- перегруженность школьной математики техническими элементами;
- избыточная уравнительная ответственность, взятая на себя государством за процесс и результаты образовательной деятельности по отношению ко всем учащимся.

Проблемы образования

2. Избыточное единство требований к результатам образования.

- математическое образование единообразно и маловариативно;
- единые требования к результатам обучения нереалистичны для значительной части учащихся;
- противоречия в учебных интересах учащихся одного класса, где учитель не в состоянии удовлетворить принципиально разные запросы.

Проблемы образования

3. Содержательные проблемы и неэффективность:

- старение стандартных математических курсов средней и высшей школы;
- отсутствие связи обучения с потребностями государства и общества в будущих специалистах в специфических математических знаниях и методах.

Результаты ЕГЭ 2013

- задачу В1 на расчет платы за электричество верно выполнили 78% участников экзамена
- задачу В5 (показательное или логарифмическое уравнение) верно решили 86% экзаменуемых.
- задачу на поиск наибольшего значения функции верно решили (53%)
- наглядную задачу по геометрии верно решили (49%).

Системная проблема:

В условиях общности и единства образовательных программ учителя отрабатывают и заучивают алгоритмы решения стандартных задач вместо анализа простых математических моделей жизненных ситуаций

Номер группы	Первичный балл	Тестовый балл	Уровень подготовки	%участников 2013/12г.г.
I низкий	0 - 5	0 - 24	Участники, не преодолевшие порог в 5 первичных баллов или набравшие ровно 5 первичных баллов	18,5 / 13,9
II базовый	6 -10	28 - 44	Выпускники, освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям.	37,5 / 39,2
III базовый	11-14	48 - 60	Выпускники, успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие реальные шансы при наличии мотивации на переход в следующую группу по уровню подготовки. Эти участники экзамена могут быть зачислены на технические специальности.	27,0 / 30,8

Номер группы	Первичный балл	Тестовый балл	Уровень подготовки	%участников 2013/12г.г.
IV Повышенный	15 - 23	63 - 81	Выпускники, успешно освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенного и высокого уровней математической компетентностей	15,3 / 15,3
V Высокий	24 - 32	83 - 100	Выпускники, имеющие уровень подготовки, достаточный для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к уровню математической компетентностей	37,5 / 39,2

Решение, статистика и методический анализ выполнения заданий по ряду вариантов ЕГЭ 2013 года

Задача В1. Вариант 1.

Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток? (Ответ: 3) .

Верный ответ - **83,97%**

Неверные ответы: **2 – 18%**

Процент от общего числа ошибочных
ответов!!!!

Не дали ответа - **1,39%.**

Вариант 2.

В квартире, где проживает Анастасия, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 122 куб. м воды, а 1 октября — 142 куб. м. Какую сумму должна заплатить Анастасия за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

Ответ: 198.

Верный ответ - 88,92%

Массовые неверные ответы:

1207,8 – 19% (показание счётчика на 1 сентября умножили на цену 1 куб. м).

1405,8 – 9% (вероятно, показания счётчика на 1 октября умножили на цену 1 куб. м).

Не дали ответа - 0,27%.

Ошибки:

- неполное решение задачи (в ответ записывали промежуточный результат);
- вычислительные ошибки;
- ряд ошибок мог бы быть замечен и исправлен, если бы участники экзамена сопоставили свой результат с реальностью.

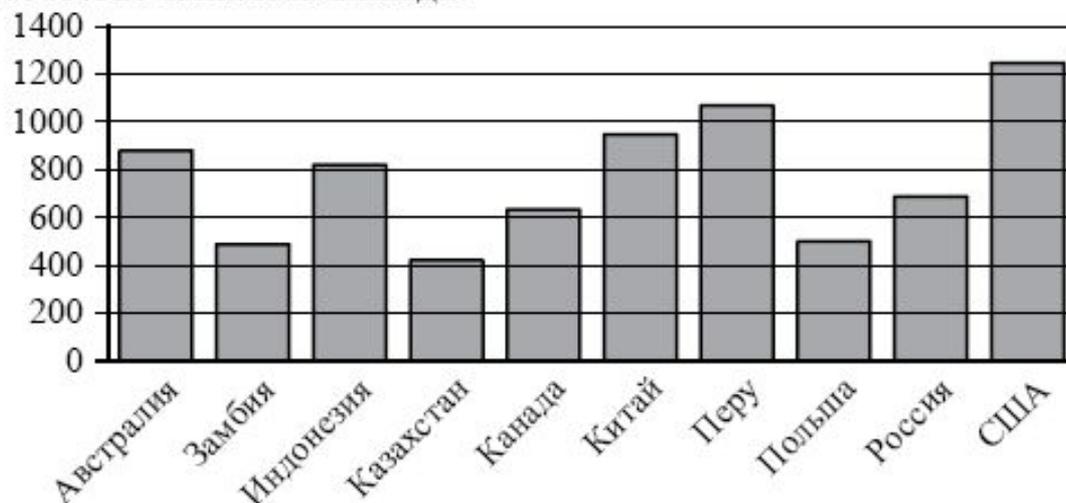
Задача В2. Вариант 1.

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?

Задача В2

Вариант 1.

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?



Ответ: 7.

Верный ответ - **96,14%**

Массовые неверные ответы:

6 – 49% (начали отсчёт с Перу),
4 – 20% (начали отсчёт с конца).

Не дали ответа - **0,24%**.

Ошибки:

- неполное чтение условия задачи (указание объема и отсчёт с конца);
- отсчёт начинается со второго места.

Задача В3. Вариант 1.

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

Ответ: 15.

Верный ответ - **85,10%**

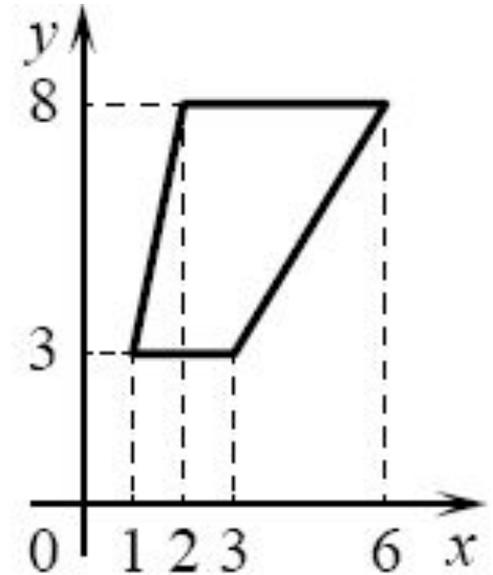
Массовые неверные ответы:

17,5 – 25% (ошибка в

нахождении длины нижнего основания);

20 – 14% (ошибка в нахождении оснований).

1,13% - не дали ответа.



Вариант 3.

Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

Ответ: 6.

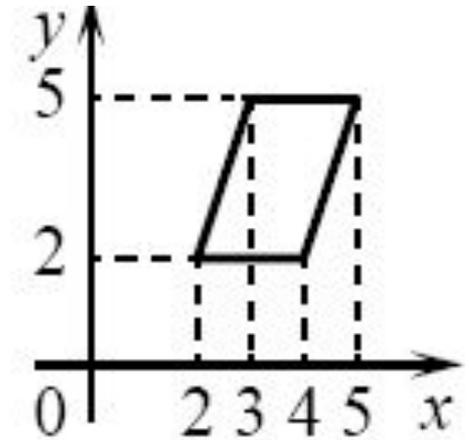
Верный ответ – **87,34%**

Массовые неверные ответы:

3 – 17% (ошибка в формуле площади);

10 – 10% (ошибка в нахождении высоты параллелограмма).

1,54% - не дали ответа



Ошибки:

- ошибочное вычисление длины отрезка по координатам концов отрезка;
- ошибка в нахождении высоты;
- использование неверной формула площади фигуры.

Задача В4. Вариант 1.

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг R бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного $0,01$ средней цены P , показателей функциональности F , качества Q и дизайна D . Каждый из показателей оценивается целым числом от 0 до 4 . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$R=4(2F+2Q+D)-0,01P$. В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4000	1	0	0
Б	4500	4	3	0
В	4400	2	3	0
Г	4200	2	3	4

Верный ответ – 86,99%

Массовые неверные ответы:

11 – 13% (ошибка в определении рейтинга модели Б);

6 – 22% (ошибка в вычислении).

2,21% - не дали ответа

Задача В5. Вариант 2.

Найдите корень уравнения $5^{9+x} = 125$.

Ответ: – 6.

Верный ответ – **92,52%**

Массовые неверные ответы:

6 – 26% (перенос числа из одной части уравнения в другую);

10 – 16% (ошибка в представлении числа 125 как 525).

0,84% - не дали ответа.

Вариант 4.

Найдите корень уравнения:

$$\log_2(12 - 4x) = 5.$$

Ответ: – 5.

Верный ответ – **77,91%**

Массовые неверные ответы:

5 – 19% (, не справились со знаками или уверены, что в логарифмическом уравнении корни могут быть только положительными);

3,25 – 12% (ошибка при переходе от логарифмического уравнения к линейному).

2,62% - не дали ответа.

При выполнении задачи В5 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- вычислительные;
- неверное решение линейного уравнения;
- незнание определения логарифма;
- неверное решение логарифмического уравнения;
- неверное представление числа в виде степени;
- неверное решение показательного уравнения.

Задача В6. Вариант 1.

В треугольнике ABC , $AC=BC$, $AB = 20$, высота AH равна 8. Найдите синус угла BAC .

Ответ: 0,4.

Верный ответ – **78,09%**

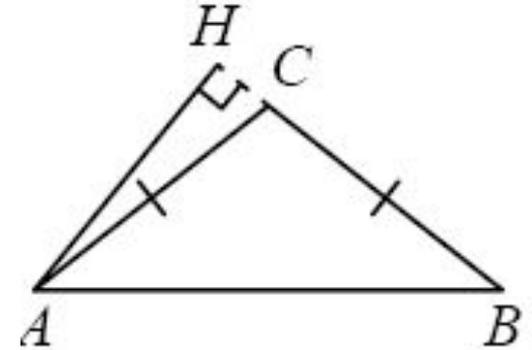
Массовые неверные ответы:

0,5 – 22% (надежда на хороший

ответ в предположении, что угол при основании равен 30°);

0,8 – 8% (при вычислении синуса взята половина основания).

6.01% - не дали ответа.



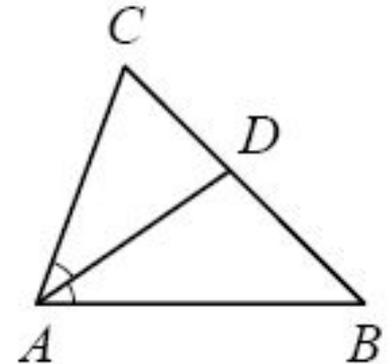
Вариант 4.

В треугольнике ABC , AD — биссектриса, угол C равен 62° , угол CAD равен 32° .

Найдите угол B .

Ответ дайте в градусах.

Ответ: 54.



Верный ответ — **76,36%**

Массовые неверные ответы:

12 – 86% (ошибка в предположении, что угол A равен 32°);

10 – 52% (вычислительная ошибка).

3.00% - не дали ответа.

При выполнении задачи В6 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- незнание свойств равнобедренного треугольника;
- незнание определений тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника;
- вычислительные.

Задача В7

Вариант 1.

Найдите значение выражения $\log_2 240 - \log_2 3,75$.

Ответ: 6.

Верный ответ – **76,65%**

Массовые неверные ответы:

8 – 25% (ошибка в определении логарифма);

22 – 64% (не вычислен логарифм числа).

3,70 % - не дали ответа

Вариант 4

Найдите $\operatorname{tg} \beta$, если $\cos \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$ и $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$.

Ответ: – 0,4.

Верный ответ – 40.98%

Массовые неверные ответы:

0,4 – 42% (ошибка в нахождении области допустимых значений);

1 – 5% (попытка угадать ответ).

18,20 % - не дали ответа

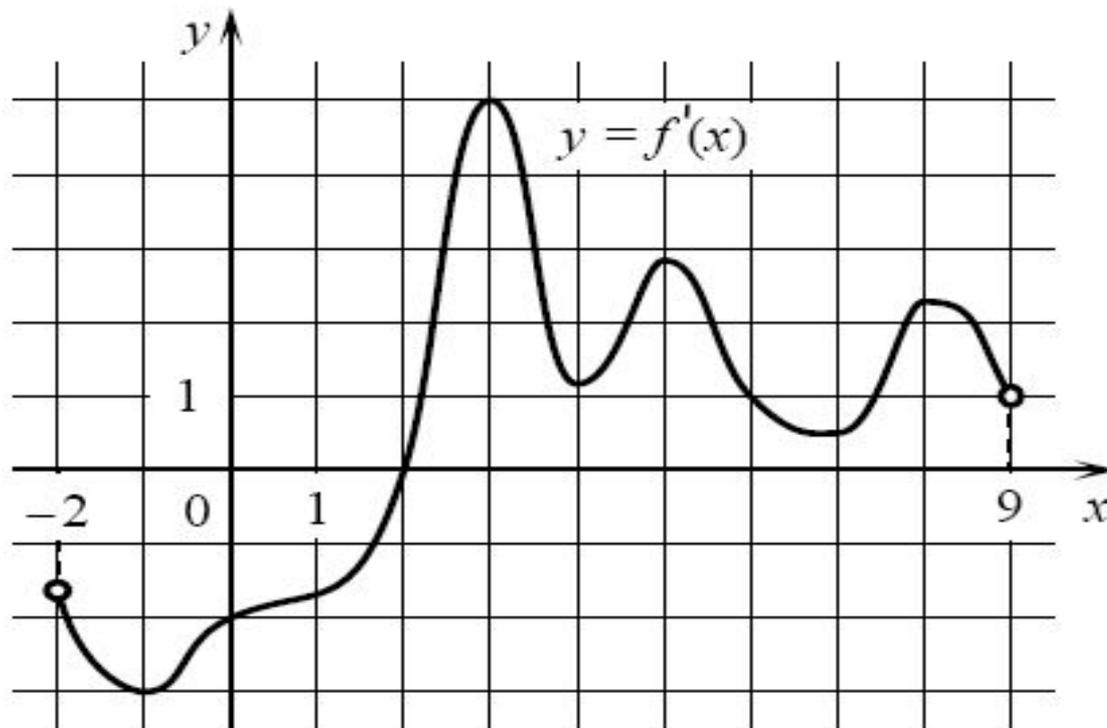
Ошибки при выполнении задания В7:

- незнание логарифмов;
- незнание свойств логарифмов;
- незнание соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же угла;
- незнание знаков тригонометрических функций углов, принадлежащих определенным четвертям;
- арифметические ошибки.

Задача В8. Вариант 2.

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-2; 9)$.

В какой точке отрезка $[2; 8]$ функция $f(x)$ принимает наименьшее значение? Ответ: 2.



Задание В8

Верный ответ – 74,28%

Массовые неверные ответы:

7 – 47% (количество точек экстремума производной);

3 – 11% (найдена абсцисса точки, в которой производная принимает наибольшее значение).

1,97 % - не дали ответа

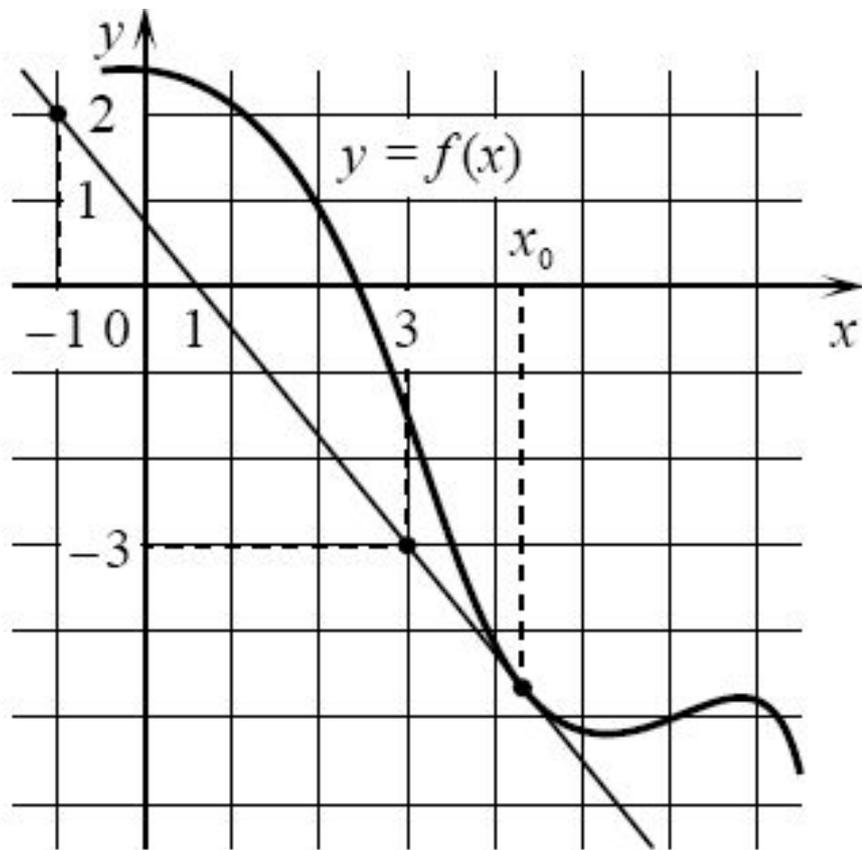
Вариант 3.

На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .
Найдите значение производной функции $f'(x)$ в точке x_0 . Ответ: $-1,25$.

Верный ответ – **53,52%**

Массовые неверные ответы:

- 1,25 – 16%** (предположительно, не учли, что на рисунке график убывающей функции);
- 0,8 – 13%** (предположительно, получили обратную величину).
- 9,81 %** - не дали ответа



Ошибки при выполнении задачи В8:

- неверное вычисление углового коэффициента прямой;
- неумение связать свойства функции с производной;
- невнимательное чтение условия.

Задача В9. Вариант 1.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$.
Найдите образующую конуса. *Ответ: 20.*

Верный ответ – **83,22%**

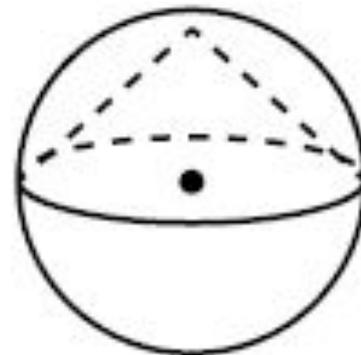
Массовые неверные ответы:

10 – 19% (путаница в терминах:

«радиус» и «диаметр»);

5 – 13% (попытка угадать ответ).

7,60 % - не дали ответа



Вариант 3. Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса. *Ответ: 40.*

Верный ответ – **76,86%**

Массовые неверные ответы:

20 – 29% (найден радиус основания конуса, а не диаметр);

8 – 8% (найдена разность образующей и высоты).

4,74 % - не дали ответа

Ошибки при выполнении задачи В9

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- неумение применить теорему Пифагора к решению прямоугольного треугольника;
- вычислительные.

Задача В10. Вариант 1.

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

Ответ: 0,08.

Верный ответ – **72,24%**

Массовые неверные ответы:

0,8 – 8% (вычислительная ошибка);

0,09 – 7% (округление до сотых отношения 7 к 76).

5,32% - не дали ответа

$$1) 76-1 = 75$$

$$2) 7-1 = 6$$

$$3) 6:75 = 0,08$$

Ошибки при решении задания В10

- неверное прочтение условия задачи;
- нахождение вероятности другого события;
- вычислительные.

Задача В11. Вариант 1.

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки $D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ правильной шестиугольной призмы $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.

Ответ: 8.

12 – 8% (предположительно, ошибка в формуле объёма пирамиды).

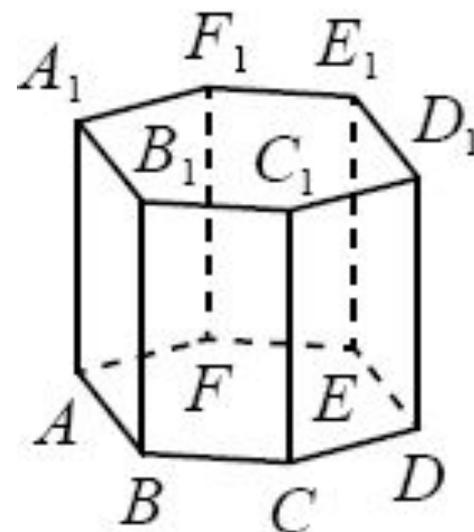
Верный ответ – **62,71%**

Массовые неверные ответы:

24 – 60% (найден объём призмы);

8 – 12% (ошибка в формуле объёма пирамиды).

8,01% - не дали ответа



Ошибки при решении задания В11

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- ошибочная формула объёма тела;
- вычислительные.

Задача В12. Вариант 1.

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле: $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$,

где $c = 1500$ м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала f , если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с.

Ответ выразите в МГц.

Ответ: 220,5.

Верный ответ - 52,11%

Массовые неверные ответы:

220 – 24% (округлили ответ до целых);

22,5 – 13% (вычислительная ошибка).

13,15% - не дали ответа

$$2 = 1500 \cdot ((f-217)/(f+217)) \text{ сократим на } 12$$

$$1 = 125 \cdot ((f-217)/(f+217)) \quad | : 125$$

$$1/125 = (f-217)/(f+217) \text{ по свойству пропорции}$$

$$1(f+217) = 125(f-217) \qquad f+217 = 125f - 27125$$

$$-124f = -27342 \quad | : (-124) \qquad f = 220,5$$

При выполнении заданий В12 допущены вычислительные ошибки

Задача В13. Вариант 2.

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

Ответ: 189.

Решение: Можно считать и по воде, и по "сухой массе":

Сухая масса в изюме: $42 \text{ кг} \cdot 0,81 = 34,02 \text{ кг}$

Эта же масса составляет 18% в "сыром" винограде.

Масса винограда: $34,02 \text{ кг} / 0,18 = 189 \text{ кг}$

Верный ответ – **60,86%**

4 – 68,46% (найдено значение выражения $42 + 42 \cdot \frac{82-19}{100}$) ;

181 – 3,6% (, округление до целого значения

выражения: $\frac{42 \cdot 82}{19}$). **12,43 %** - не дали ответа

Задача В13. Вариант 4

Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 6%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки? Ответ: 41

100% - стоимость куртки. $100 - 6 = 94\%$ - стоимость 10 рубашек от стоимости куртки

$94/10=9.4\%$ стоимость одной рубашки от куртки.

$9.4 \cdot 15=141\%$ от стоимости куртки; $141-100 = 41\%$

Верный ответ- **46,95%**

Массовые неверные ответы:

9 – 26% (вероятно, комбинация чисел $\frac{6 \cdot 15}{10}$);

3 – 24% (вероятно, комбинация чисел $\frac{6 \cdot (15 - 10)}{10}$);

11,12% - не дали ответа

Ошибки в заданиях В13

- ошибки, связанные с неправильным прочтением условия задачи и составлением уравнения;
- попытки получить ответ, манипулируя данными в условии числами;
- вычислительные ошибки.

Задача В14

Вариант 1.

Найдите наименьшее значение функции: $y = \frac{x^2 + 441}{x}$
на отрезке [2; 32]

Ответ: 42

Верный ответ - 63,10%

Массовые неверные ответы:

222,5 – 13 % (видимо, найдено наибольшее значение);

21 – 15% (видимо, найдена абсцисса точки минимума).

Не дали ответа - 12,56%.

Вариант 2.

Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}$$

Ответ: 6.

Верный ответ - 63,34%

Массовые неверные ответы:

6 – 38% (указана точка минимума);

0 – 12% (ошибка в нахождении производной).

Не дали ответа - 12,75%.

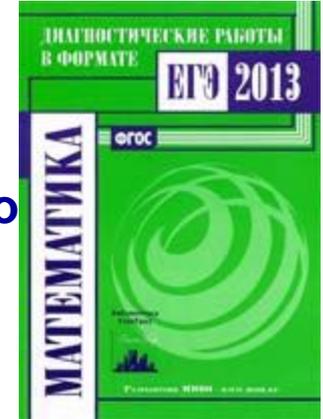
Ошибки в заданиях В14:

- **вычислительные;**
- **незнание и непонимание темы «Применение производной к исследованию функции».**

Сборник И.Р. Высоцкого "Диагностические работы ЕГЭ Э по математике"

предназначен для учителей математики в качестве источника материалов для подготовки к экзамену по математике в 11 классе в формате ЕГЭ. Он содержит:

варианты диагностических работ по математике, формат и содержание которых соответствуют контрольно-измерительным материалам, разработанным Федеральным институтом педагогических измерений для проведения единого государственного экзамена, ответы к заданиям, система оценивания экзаменационной работы, критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.



Авторы пособия являются разработчиками тренировочных и диагностических работ для системы СтатГрад (<http://statgrad.mioo.ru>).

Материалы книги рекомендованы учителям и методистам для выявления уровня и качества подготовки учащихся по предмету, определения степени их готовности к единому государственному экзамену.

Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС)

Составители:

И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов, И.В. Яценко

Спасибо за внимание!!!

