

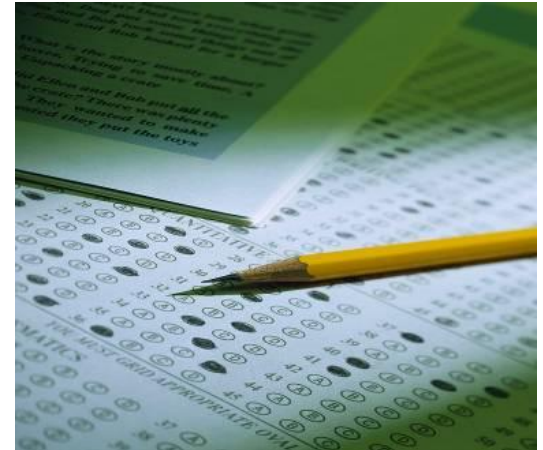
**МБОУ «СОШ №14»**

# **Анализ типичных затруднений выпускников при выполнении заданий ЕГЭ по математике**

**Методические рекомендации  
по некоторым аспектам совершенствования  
преподавания математики**



**Учитель математики:  
Н.С.Алтунина**



**Федеральный институт педагогических измерений**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ  
ПО НЕКОТОРЫМ АСПЕКТАМ  
СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ ПРЕПОДАВАНИЯ  
МАТЕМАТИКИ**

*(на основе анализа типичных затруднений  
выпускников при вы-  
полнении заданий ЕГЭ)*

**И.В. Яценко, А.В. Семенов,  
И.Р. Высоцкий**

**Москва, 2013**

**В основной волне ЕГЭ  
по математике  
в июне 2013 г.  
принял участие 830161  
человек.**

# Задания первой части

I. Задания по алгебре.

II. Задания по геометрии.

III. Практико-ориентированные задачи.

**Для участников экзамена,  
заинтересованных в преодолении  
порогового балла 5 первичных  
или 24 тестовых**

Предназначены задания:

V1 - V5, V10, V13, направленные на:

- выявление и оценку уровня развития общекультурных и коммуникативных математических навыков, необходимых человеку в современном обществе;
- проверку адекватности восприятия текста практико-ориентированных задач;
- проверку базовых вычислительных и логических умений и навыков;

**Для участников экзамена,  
заинтересованных в преодолении  
порогового балла 5 первичных  
или 24 тестовых**

- оценку умения считать и анализировать графическую и табличную информацию;
- оценку способности ориентироваться в простых наглядных геометрических конструкциях.

Для участников экзамена , планирующих использовать результаты ЕГЭ по математике при поступления в ссузы и вузы, предназначены задания В7 – В14, С1 –С6, требующие математических знаний и направленные на ранжирование абитуриентов по уровню математической подготовки.

# Проблемы образования

## *1. Мотивационные проблемы:*

- общественная недооценка значимости математического образования;
- перегруженность школьной математики техническими элементами;
- избыточная уравнительная ответственность, взятая на себя государством за процесс и результаты образовательной деятельности по отношению ко всем учащимся.



# Проблемы образования

## *2. Избыточное единство требований к результатам образования.*

- математическое образование единообразно и маловариативно;
- единые требования к результатам обучения нереалистичны для значительной части учащихся;
- противоречия в учебных интересах учащихся одного класса, где учитель не в состоянии удовлетворить принципиально разные запросы.

# Проблемы образования

## *3. Содержательные проблемы и неэффективность:*

- старение стандартных математических курсов средней и высшей школы;
- отсутствие связи обучения с потребностями государства и общества в будущих специалистах в специфических математических знаниях и методах.

## Результаты ЕГЭ 2013

- задачу В1 на расчет платы за электричество верно выполнили 78% участников экзамена
- задачу В5 (показательное или логарифмическое уравнение) верно решили 86% экзаменуемых.
- задачу на поиск наибольшего значения функции верно решили (53%)
- наглядную задачу по геометрии верно решили (49%).

# Системная проблема:

В условиях общности и единства образовательных программ учителя отрабатывают и заучивают алгоритмы решения стандартных задач вместо анализа простых математических моделей жизненных ситуаций

<b>Номер группы</b>	<b>Первичный балл</b>	<b>Тестовый балл</b>	<b>Уровень подготовки</b>	<b>%участников 2013/12г.г.</b>
<b>I низкий</b>	<b>0 - 5</b>	<b>0 - 24</b>	<b>Участники, не преодолевшие порог в 5 первичных баллов или набравшие ровно 5 первичных баллов</b>	<b>18,5 / 13,9</b>
<b>II базовый</b>	<b>6 -10</b>	<b>28 - 44</b>	<b>Выпускники, освоившие курс математики на базовом уровне, не имеющие достаточной подготовки для успешного продолжения образования по техническим специальностям.</b>	<b>37,5 / 39,2</b>
<b>III базовый</b>	<b>11-14</b>	<b>48 - 60</b>	<b>Выпускники, успешно освоившие базовый курс, фактически близкие к следующему уровню подготовки. Это участники экзамена, имеющие реальные шансы при наличии мотивации на переход в следующую группу по уровню подготовки. Эти участники экзамена могут быть зачислены на технические специальности.</b>	<b>27,0 / 30,8</b>

<b>Номер группы</b>	<b>Первичный балл</b>	<b>Тестовый балл</b>	<b>Уровень подготовки</b>	<b>%участников 2013/12г.г.</b>
<b>IV Повышенный</b>	<b>15 - 23</b>	<b>63 - 81</b>	<b>Выпускники, успешно освоившие курс математики и имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенного и высокого уровней математической компетентностей</b>	<b>15,3 / 15,3</b>
<b>V Высокий</b>	<b>24 - 32</b>	<b>83 - 100</b>	<b>Выпускники, имеющие уровень подготовки, достаточный для продолжения обучения с самыми высокими требованиями к уровню математической компетентностей</b>	<b>37,5 / 39,2</b>

# Решение, статистика и методический анализ выполнения заданий по ряду вариантов ЕГЭ 2013 года

## Задача В1. Вариант 1.

Одна таблетка лекарства весит 70 мг и содержит 4% активного вещества. Ребёнку в возрасте до 6 месяцев врач прописывает 1,05 мг активного вещества на каждый килограмм веса в сутки. Сколько таблеток этого лекарства следует дать ребёнку в возрасте пяти месяцев и весом 8 кг в течение суток? (Ответ: 3) .

Верный ответ - 83,97%

Неверные ответы: 2 – 18%

Процент от общего числа ошибочных  
ответов!!!!

Не дали ответа - 1,39%.

## Вариант 2.

В квартире, где проживает Анастасия, установлен прибор учёта расхода холодной воды (счётчик). 1 сентября счётчик показывал расход 122 куб. м воды, а 1 октября — 142 куб. м. Какую сумму должна заплатить Анастасия за холодную воду за сентябрь, если цена 1 куб. м холодной воды составляет 9 руб. 90 коп.? Ответ дайте в рублях.

*Ответ: 198.*

Верный ответ - 88,92%

Массовые неверные ответы:

1207,8 – 19% (показание счётчика на 1 сентября умножили на цену 1 куб. м).

1405,8 – 9% (вероятно, показания счётчика на 1 октября умножили на цену 1 куб. м).

Не дали ответа - 0,27%.



# *Ошибки:*

- неполное решение задачи (в ответ записывали промежуточный результат);
- вычислительные ошибки;
- ряд ошибок мог бы быть замечен и исправлен, если бы участники экзамена сопоставили свой результат с реальностью.

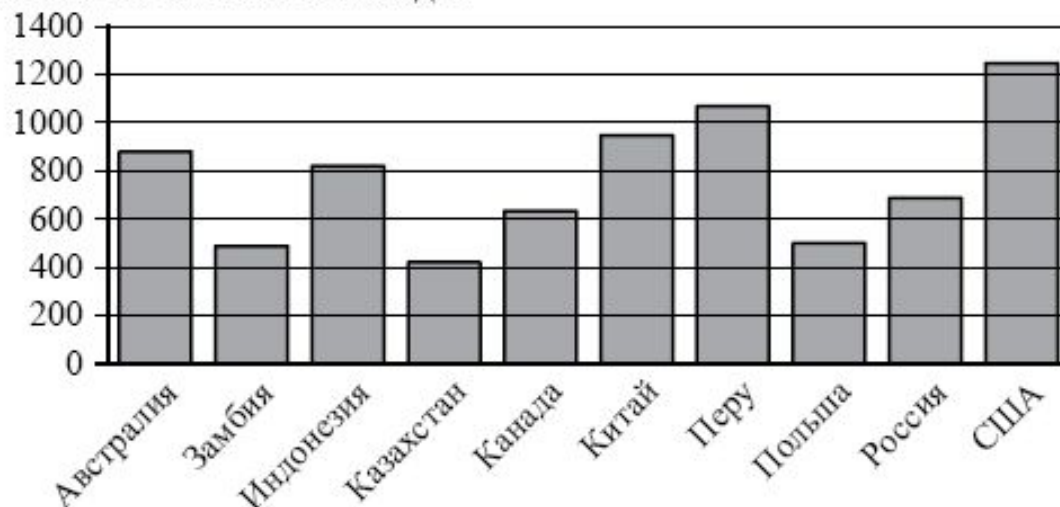
## Задача В2. Вариант 1.

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?

### Задача В2

#### Вариант 1.

На диаграмме показано распределение выплавки меди в 10 странах мира (в тысячах тонн) за 2006 год. Среди представленных стран первое место по выплавке меди занимали США, десятое место — Казахстан. Какое место занимала Канада?



**Ответ: 7.**

Верный ответ - **96,14%**

Массовые неверные ответы:

**6 – 49%** (начали отсчёт с Перу),  
**4 – 20%** (начали отсчёт с конца).

Не дали ответа - **0,24%**.

**Ошибки:**

- неполное чтение условия задачи (указание объема и отсчёт с конца);
- отсчёт начинается со второго места.

## Задача В3. Вариант 1.

Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке.

**Ответ: 15.**

Верный ответ - **85,10%**

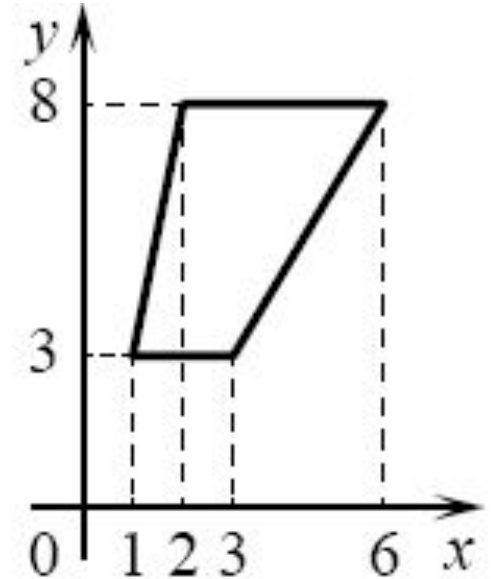
Массовые неверные ответы:

**17,5 – 25%** (ошибка в

нахождении длины нижнего основания);

**20 – 14%** (ошибка в нахождении оснований).

**1,13%** - не дали ответа.



### Вариант 3.

Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке.

**Ответ: 6.**

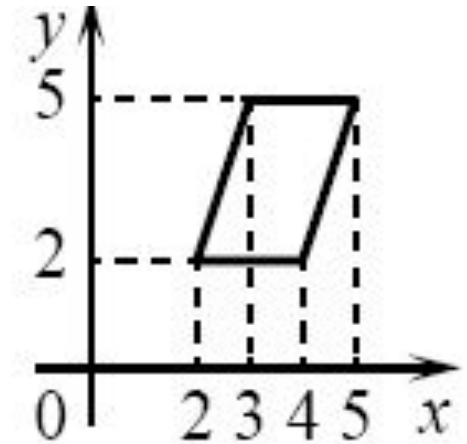
Верный ответ – **87,34%**

Массовые неверные ответы:

**3 – 17%** (ошибка в формуле площади);

**10 – 10%** (ошибка в нахождении высоты параллелограмма).

**1,54%** - не дали ответа



# *Ошибки:*

- ошибочное вычисление длины отрезка по координатам концов отрезка;
- ошибка в нахождении высоты;
- использование неверной формула площади фигуры.

## Задача В4. Вариант 1.

Независимая экспертная лаборатория определяет рейтинг  $R$  бытовых приборов на основе коэффициента ценности, равного  $0,01$  средней цены  $P$ , показателей функциональности  $F$ , качества  $Q$  и дизайна  $D$ . Каждый из показателей оценивается целым числом от  $0$  до  $4$ . Итоговый рейтинг вычисляется по формуле

$R=4(2F+2Q+D)-0,01P$ . В таблице даны средняя цена и оценки каждого показателя для нескольких моделей электрических чайников. Определите наивысший рейтинг представленных в таблице моделей электрических чайников.

Модель чайника	Средняя цена	Функциональность	Качество	Дизайн
А	4000	1	0	0
Б	4500	4	3	0
В	4400	2	3	0
Г	4200	2	3	4

Верный ответ – **86,99%**

Массовые неверные ответы:

**11 – 13%** (ошибка в определении рейтинга модели Б);

**6 – 22%** (ошибка в вычислении).

**2,21%** - не дали ответа



## Задача В5.      Вариант 2.

Найдите корень уравнения  $5^{9+x} = 125$ .

**Ответ: – 6.**

Верный ответ – **92,52%**

Массовые неверные ответы:

**6 – 26%** (перенос числа из одной части уравнения в другую);

**10 – 16%** (ошибка в представлении числа 125 как 525).

**0,84%** - не дали ответа.

## Вариант 4.

Найдите корень уравнения:

$$\log_2(12 - 4x) = 5.$$

**Ответ: – 5.**

Верный ответ – **77,91%**

Массовые неверные ответы:

**5 – 19%** (, не справились со знаками или уверены, что в логарифмическом уравнении корни могут быть только положительными);

**3,25 – 12%** (ошибка при переходе от логарифмического уравнения к линейному).

**2,62%** - не дали ответа.

При выполнении задачи В5 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:

- вычислительные;
- неверное решение линейного уравнения;
- незнание определения логарифма;
- неверное решение логарифмического уравнения;
- неверное представление числа в виде степени;
- неверное решение показательного уравнения.

## Задача В6.      Вариант 1.

В треугольнике  $ABC$ ,  $AC=BC$ ,  $AB = 20$ , высота  $AH$  равна 8. Найдите синус угла  $BAC$ .

**Ответ: 0,4.**

Верный ответ – **78,09%**

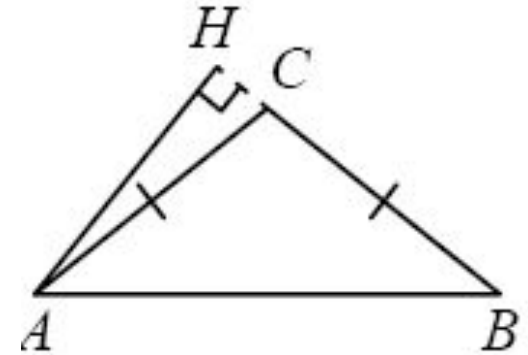
Массовые неверные ответы:

**0,5 – 22%** (надежда на хороший

ответ в предположении, что угол при основании равен  $30^\circ$ );

**0,8 – 8%** (при вычислении синуса взята половина основания).

**6.01%** - не дали ответа.



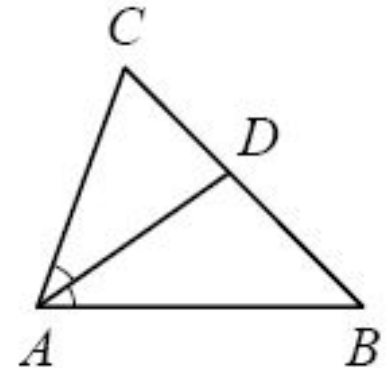
## Вариант 4.

В треугольнике  $ABC$ ,  $AD$  — биссектриса, угол  $C$  равен  $62^\circ$ , угол  $CAD$  равен  $32^\circ$ .

Найдите угол  $B$ .

Ответ дайте в градусах.

**Ответ: 54.**



Верный ответ — **76,36%**

Массовые неверные ответы:

**12 – 86%** (ошибка в предположении, что угол  $A$  равен  $32^\circ$ );

**10 – 52%** (вычислительная ошибка).

**3.00%** - не дали ответа.

**При выполнении задачи В6 допущено много ошибок, из которых самыми массовыми являются:**

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- незнание свойств равнобедренного треугольника;
- незнание определений тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника;
- вычислительные.

## Задача В7

### Вариант 1.

Найдите значение выражения  $\log_2 240 - \log_2 3,75$ .

*Ответ: 6.*

Верный ответ – **76,65%**

Массовые неверные ответы:

**8 – 25%** (ошибка в определении логарифма);

**22 – 64%** (не вычислен логарифм числа).

**3,70 %** - не дали ответа

## Вариант 4

Найдите  $\operatorname{tg} \beta$ , если  $\cos \beta = \frac{5\sqrt{29}}{29}$  и  $\beta \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ .

*Ответ: – 0,4.*

Верный ответ – 40.98%

Массовые неверные ответы:

0,4 – 42% (ошибка в нахождении области допустимых значений);

1 – 5% (попытка угадать ответ).

18,20 % - не дали ответа

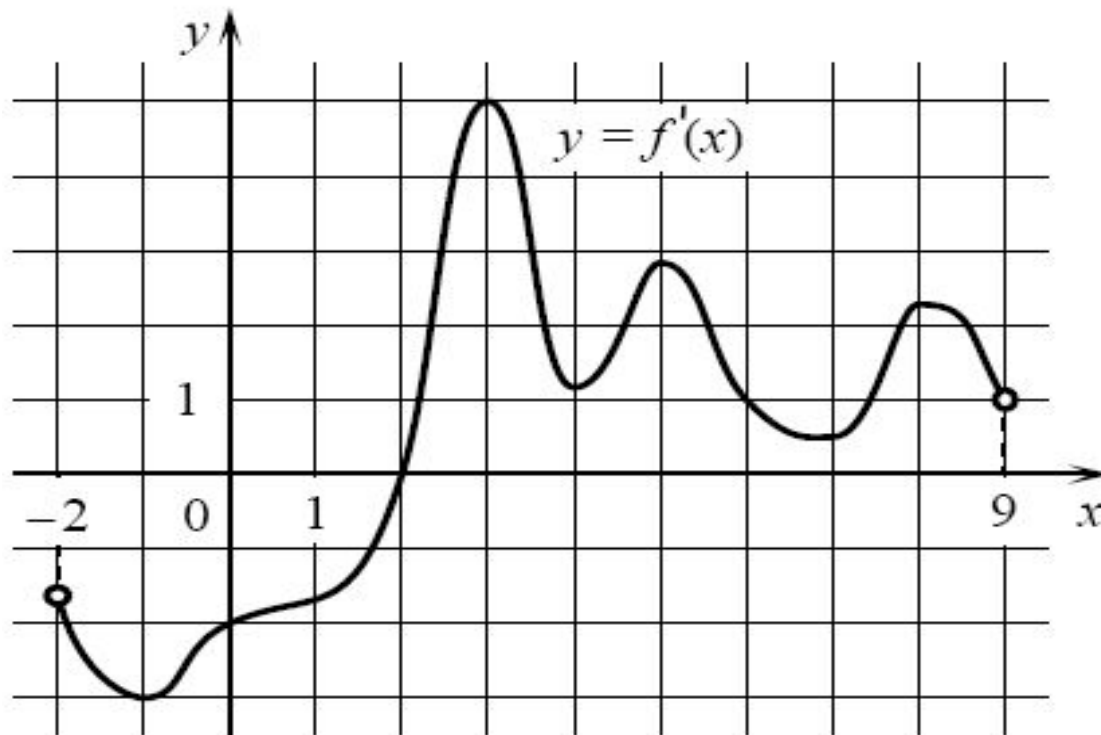


## Ошибки при выполнении задания В7:

- незнание логарифмов;
- незнание свойств логарифмов;
- незнание соотношений между тригонометрическими функциями одного и того же угла;
- незнание знаков тригонометрических функций углов, принадлежащих определенным четвертям;
- арифметические ошибки.

## Задача В8. Вариант 2.

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-2; 9)$ . В какой точке отрезка  $[2; 8]$  функция  $f(x)$  принимает наименьшее значение? Ответ: 2.



## Задание В8

Верный ответ – 74,28%

Массовые неверные ответы:

7 – 47% (количество точек экстремума производной);

3 – 11% (найдена абсцисса точки, в которой производная принимает наибольшее значение).

1,97 % - не дали ответа

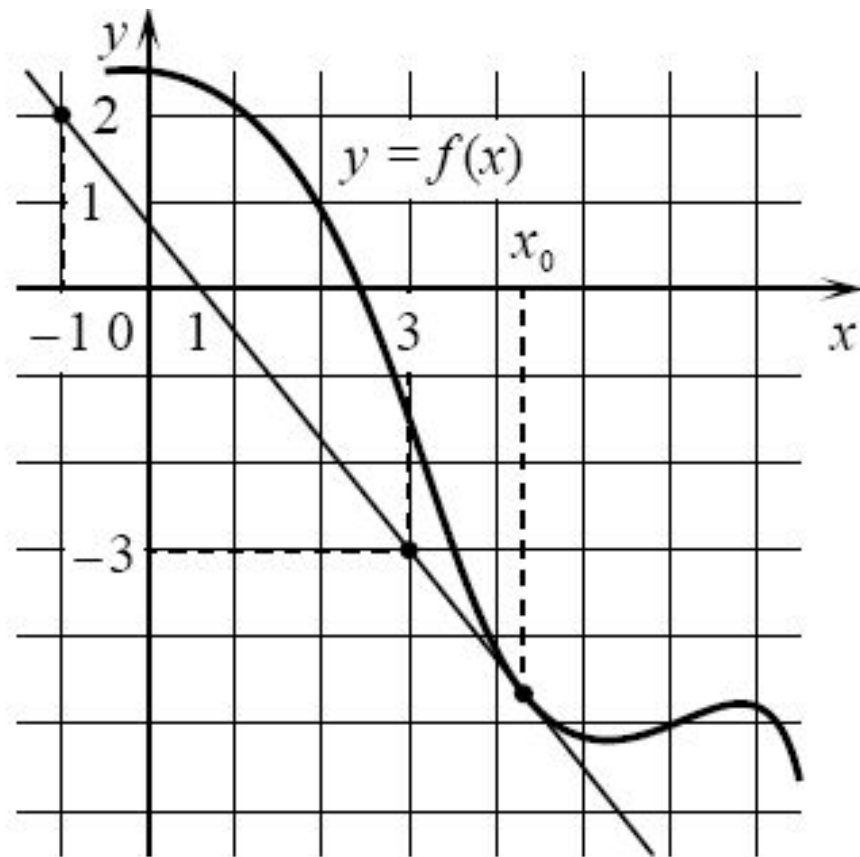
## Вариант 3.

На рисунке изображены график функции  $y = f(x)$  и касательная к нему в точке с абсциссой  $x_0$ .  
Найдите значение производной функции  $f'(x)$  в точке  $x_0$ . Ответ:  $-1,25$ .

Верный ответ – **53,52%**

Массовые неверные ответы:

- 1,25 – 16%** (предположительно, не учли, что на рисунке график убывающей функции);
- 0,8 – 13%** (предположительно, получили обратную величину).
- 9,81 %** - не дали ответа



## Ошибки при выполнении задачи В8:

- неверное вычисление углового коэффициента прямой;
- неумение связать свойства функции с производной;
- невнимательное чтение условия.

## Задача В9. Вариант 1.

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен  $10\sqrt{2}$ .  
Найдите образующую конуса. *Ответ: 20.*

Верный ответ – **83,22%**

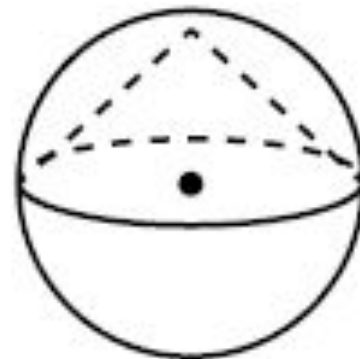
Массовые неверные ответы:

**10 – 19%** (путаница в терминах:

«радиус» и «диаметр»);

**5 – 13%** (попытка угадать ответ).

**7,60 %** - не дали ответа



**Вариант 3.** Высота конуса равна 21, а длина образующей равна 29. Найдите диаметр основания конуса. *Ответ: 40.*

Верный ответ – **76,86%**

Массовые неверные ответы:

**20 – 29%** (найден радиус основания конуса, а не диаметр);

**8 – 8%** (найдена разность образующей и высоты).

**4,74 %** - не дали ответа

## Ошибки при выполнении задачи В9

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- неумение применить теорему Пифагора к решению прямоугольного треугольника;
- вычислительные.



## Задача В10. Вариант 1.

Перед началом первого тура чемпионата по теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 76 теннисистов, среди которых 7 спортсменов из России, в том числе Анатолий Москвин. Найдите вероятность того, что в первом туре Анатолий Москвин будет играть с каким-либо теннисистом из России.

*Ответ: 0,08.*

Верный ответ – **72,24%**

Массовые неверные ответы:

**0,8 – 8%** (вычислительная ошибка);

**0,09 – 7%** (округление до сотых отношения 7 к 76).

**5,32%** - не дали ответа

$$1) 76-1 = 75$$

$$2) 7-1 = 6$$

$$3) 6:75 = 0,08$$

## **Ошибки при решении задания В10**

- неверное прочтение условия задачи;
- нахождение вероятности другого события;
- вычислительные.

## Задача В11. Вариант 1.

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $D, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$  правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ , площадь основания которой равна 12, а боковое ребро равно 2.

**Ответ: 8.**

12 – 8% (предположительно, ошибка в формуле объёма пирамиды).

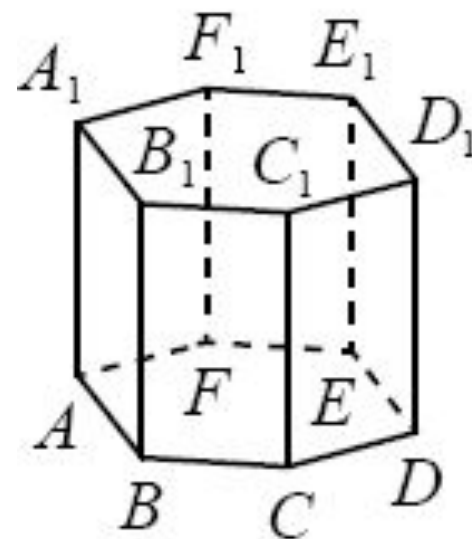
Верный ответ – **62,71%**

Массовые неверные ответы:

**24 – 60%** (найден объём призмы);

**8 – 12%** (ошибка в формуле объёма пирамиды).

**8,01%** - не дали ответа



## Ошибки при решении задания В11

- отсутствие видения геометрической конструкции;
- ошибочная формула объёма тела;
- вычислительные.

## Задача В12. Вариант 1.

Локатор батискафа, равномерно погружающегося вертикально вниз, испускает ультразвуковые импульсы частотой 217 МГц. Скорость погружения батискафа, выражаемая в м/с, определяется по формуле:  $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$ ,

где  $c = 1500$  м/с — скорость звука в воде,  $f_0$  — частота испускаемых импульсов (в МГц),  $f$  — частота отражённого от дна сигнала, регистрируемая приёмником (в МГц). Определите наибольшую возможную частоту отражённого сигнала  $f$ , если скорость погружения батискафа не должна превышать 12 м/с.

Ответ выразите в МГц.

**Ответ: 220,5.**

Верный ответ - 52,11%

Массовые неверные ответы:

220 – 24% (округлили ответ до целых);

22,5 – 13% (вычислительная ошибка).

13,15% - не дали ответа

$$2 = 1500 \cdot ((f-217)/(f+217)) \text{ сократим на } 12$$

$$1 = 125 \cdot ((f-217)/(f+217)) \quad | : 125$$

$$1/125 = (f-217)/(f+217) \text{ по свойству пропорции}$$

$$1(f+217) = 125(f-217) \qquad f+217 = 125f - 27125$$

$$-124f = -27342 \quad | : (-124) \qquad f = 220,5$$

***При выполнении заданий В12 допущены вычислительные ошибки***

## Задача В13. Вариант 2.

Изюм получается в процессе сушки винограда. Сколько килограммов винограда потребуется для получения 42 килограммов изюма, если виноград содержит 82% воды, а изюм содержит 19% воды?

Ответ: 189.

**Решение:** Можно считать и по воде, и по "сухой массе":

Сухая масса в изюме:  $42 \text{ кг} \cdot 0,81 = 34,02 \text{ кг}$

Эта же масса составляет 18% в "сыром" винограде.

**Масса винограда:  $34,02 \text{ кг} / 0,18 = 189 \text{ кг}$**

Верный ответ – **60,86%**

**4 – 68,46%** (найдено значение выражения  $42 + 42 \cdot \frac{82-19}{100}$  ) ;

**181 – 3,6%** (, округление до целого значения

выражения:  $\frac{42 \cdot 82}{19}$  ). **12,43 %** - не дали ответа

## Задача В13. Вариант 4

Десять одинаковых рубашек дешевле куртки на 6%. На сколько процентов пятнадцать таких же рубашек дороже куртки?                      Ответ: 41

100% - стоимость куртки.  $100 - 6 = 94\%$  - стоимость  
10 рубашек от стоимости куртки

$94/10=9.4\%$  стоимость одной рубашки от куртки.

$9.4 \cdot 15=141\%$  от стоимости куртки;       $141-100 = 41\%$

Верный ответ- **46,95%**

Массовые неверные ответы:

**9 – 26%** (вероятно, комбинация чисел  $\frac{6 \cdot 15}{10}$ );

**3 – 24%** (вероятно, комбинация чисел  $\frac{6 \cdot (15 - 10)}{10}$ );

11,12% - не дали ответа



## Ошибки в заданиях В13

- ошибки, связанные с неправильным прочтением условия задачи и составлением уравнения;
- попытки получить ответ, манипулируя данными в условии числами;
- вычислительные ошибки.

## Задача В14

### Вариант 1.

Найдите наименьшее значение функции:  $y = \frac{x^2 + 441}{x}$   
на отрезке [2; 32]

*Ответ: 42*

---

**Верный ответ - 63,10%**

**Массовые неверные ответы:**

**222,5 – 13 %** (видимо, найдено наибольшее значение);

**21 – 15%** (видимо, найдена абсцисса точки минимума).

**Не дали ответа - 12,56%.**

## Вариант 2.

Найдите точку максимума функции

$$y = -\frac{x^2 + 36}{x}$$

*Ответ: 6.*

---

Верный ответ - 63,34%

Массовые неверные ответы:

6 – 38% (указана точка минимума);

0 – 12% (ошибка в нахождении производной).

Не дали ответа - 12,75%.

### Ошибки в заданиях В14:

- вычислительные;
- незнание и непонимание темы «Применение производной к исследованию функции».

## **Сборник И.Р. Высоцкого "Диагностические работы ЕГЭ Э по математике"**

предназначен для учителей математики в качестве источника материалов для подготовки к экзамену по математике в 11 классе в формате ЕГЭ. Он содержит:

варианты диагностических работ по математике, формат и содержание которых соответствуют контрольно-измерительным материалам, разработанным Федеральным институтом педагогических измерений для проведения единого государственного экзамена, ответы к заданиям, система оценивания экзаменационной работы, критерии проверки и оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом.



**Авторы пособия являются разработчиками тренировочных и диагностических работ для системы СтатГрад (<http://statgrad.mioo.ru>).**

Материалы книги рекомендованы учителям и методистам для выявления уровня и качества подготовки учащихся по предмету, определения степени их готовности к единому государственному экзамену.

**Издание соответствует новому Федеральному государственному общеобразовательному стандарту (ФГОС)**

**Составители:**

**И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов, И.В. Ященко**

**Спасибо за внимание!!!**

