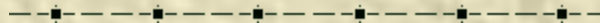




Яковлева Марина Рафаиловна
МОУ «Гимназия» г.Старая Русса
Учитель математики высшей
квалификационной категории, обладатель
президентского гранта
«Лучшие учителя России 2006»

***Из методической копилки
учителя***

Поиск множества значений функции



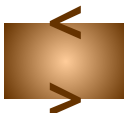
Примечания для пользователя

 вперед

 назад

 к содержанию работы

 к оглавлению раздела

 связь между одноименными
методом и блоком решения задач

 примечания для пользователя

Содержание

- Теоретические факты
- Справочные материалы
- Методы нахождения множества значений функции
- Блоки решения задач
- Семинар
- Проверь себя!
- Банк задач
- Примечания для пользователя

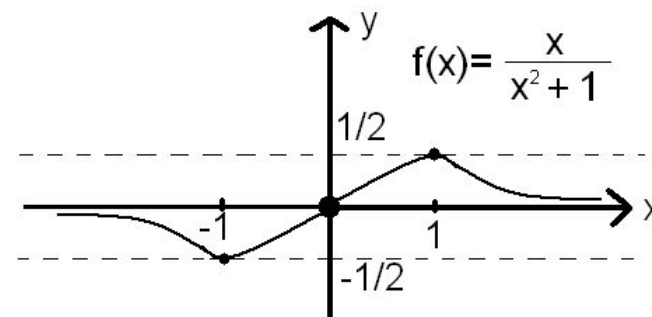


Теоретические факты

- Функцией называют такую зависимость переменной Y от переменной X , при которой каждому значению переменной X соответствует единственное значение Y
- Функция f , называется ограниченной на множестве X , если существует такое число $C > 0$, что для любого значения аргумента $x \in X$ выполняется условие $|f(x)| \leq C$.

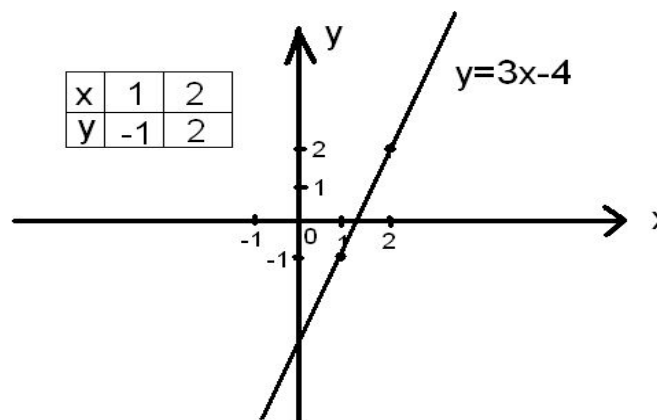
Например, функция $f(x) = x/(x^2+1)$, ограниченная, так как $|f(x)| \leq 1/2$.

Заметим, что при нахождении множества значений функции графически изображение точек перегиба не столь важно.



- Если функция не ограничена на множестве X , то она называется неограниченной на этом множестве.

Например, $y = 3x - 4$ - неограниченная функция, $y \in \mathbb{R}$.

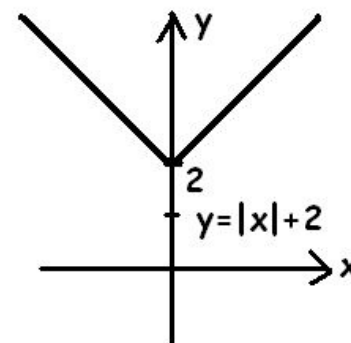


Теоретические факты

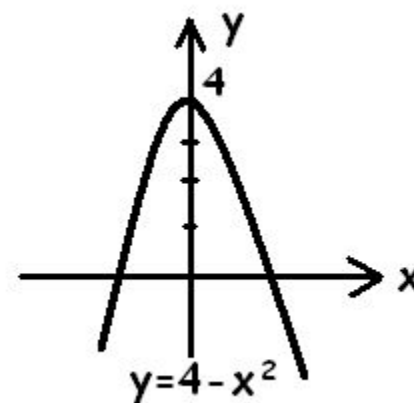
Можно рассматривать функции, ограниченные снизу или сверху.

Например:

Функция **$y=|x|+2$** ограничена снизу, но не ограничена сверху.



Функция **$y = -x^2 + 4$** ограничена только сверху и не ограничена снизу.



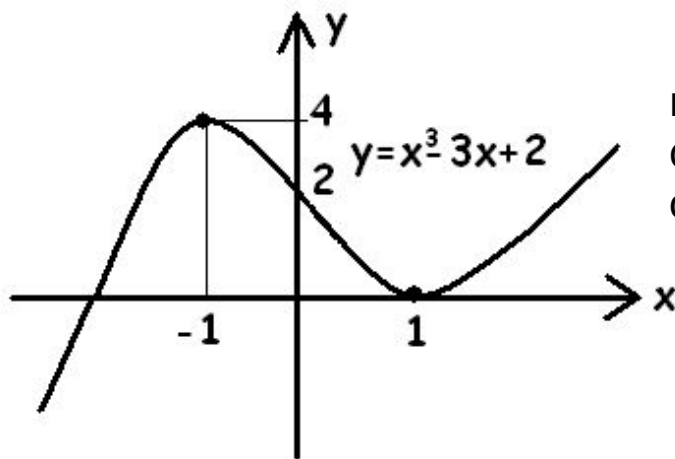
Теоретические факты

С понятием ограниченности находится рядом понятие «наибольшее и наименьшее значение функции».

- Если функция f на множестве X имеет наименьшее значение, то это означает, что на множестве X найдется такое $x=a$, что при всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(a) \leq f(x)$.
- Если функция f на множестве X имеет наибольшее значение, то это означает, что на множестве X найдется такое $x=a$, что при всех $x \in X$ выполняется неравенство $f(a) \geq f(x)$.

Данные понятия нельзя путать с понятиями локальных минимумов и максимумов

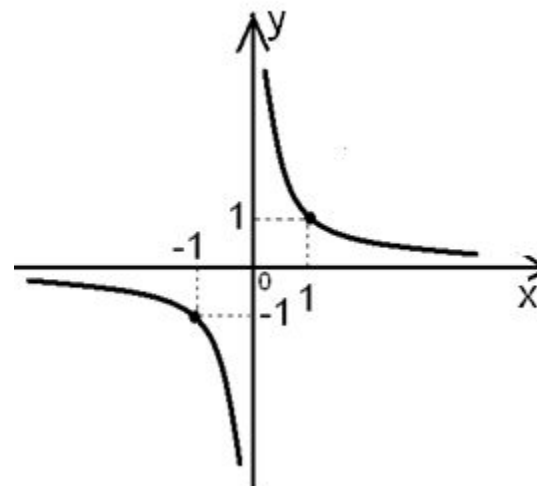
Теоретические факты



В точке - 1 будет находиться локальный максимум, а в точке 1 - локальный минимум функции **$y = x^3 - 3x + 2$** , но сама функция ограниченной являться не будет.

Очевидно, что если функция имеет наибольшее или наименьшее значение, то она ограничена.

Обратное утверждение не верно. Например, функция **$y = 1/x$** при $x > 0$ ограничена снизу. Но наименьшего значения она не имеет.



Множества значений основных элементарных функций

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq \arccos x \leq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$$

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi$$

$$a^x > 0$$

$$x^{2n} \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$|x| \geq 0$$

$$\sqrt[n]{x} \geq 0, n \in \mathbb{N}$$

$$ax^2 + bx + c \geq y_0, a > 0$$

$$ax^2 + bx + c \leq y_0, a < 0$$

Также удобны неравенства:

$$\text{Если } a > 0, \text{ то } a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$\text{Если } a < 0, \text{ то } a + \frac{1}{a} \leq -2$$



Методы нахождения множества значений функции

1. С помощью производной
2. Использование монотонности внешней функции
3. Метод оценки
4. Введение параметра
5. Использование свойств квадратичной функции
6. Замена $E(y)$ прямой функции на $D(x)$ обратной
7. Метод непосредственных вычислений
8. Графический метод
9. Использование графика сложной функции
10. Использование неравенства Коши



Метод нахождения множества значений функции с помощью производной

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на конечном промежутке $[a;b]$. Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции необходимо найти все максимумы (минимумы) функции на промежутке $(a;b)$, выбрать из них наибольший (наименьший) и сравнить его со значениями функции в точках a и b . Наибольшее (наименьшее) из этих чисел и будет наибольшим (наименьшим) значением функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$

Если окажется, что внутри промежутка нет критических точек, то функция будет достигать своих максимальных и минимальных значений на концах промежутка.

Пример: Найти множество значений функции $f(x)=x/8+2/x$ на промежутке $[1;6]$

Решение: Так как $f'(x)=1/8-2/x^2$, то единственной критической точкой, попадающей в заданный промежуток, будет точка $x=4$. Сравнивая значения функции в точке $x=4$ со значениями функции на концах промежутка:

$$f(4)=1, \quad f(1)=17/8, \quad f(6)=13/12$$

закключаем, что наименьшее значение $f(x)$ достигается в точке $x=4$, а наибольшее достигается на левом конце промежутка при $x=1$.

Ответ: Множество значений функции $E(f)=[1;17/8]$, при $x \in [1;6]$

Метод использования монотонности внешней функции

При отыскании наибольших (наименьших) значений сложных функций иногда удобно использовать следующее замечание:

Пусть задана сложная непрерывная функция $F(x)=f(g(x))$ на $[a;b]$, при чем $f(x)$ -монотонная функция, тогда:

- если $f(x)$ монотонно возрастающая функция, то ее точки $\max$ и $\min$ совпадут с точками $\max$ и $\min$ внутренней функции $g(x)$;
- если $f(x)$ монотонно убывающая функция, то точка $\min$ внутренней функции совпадет с точкой $\max$ внешней, а точка $\max$ внутренней функции будет являться точкой $\min$ внешней.

Пример: Найти множество значений функции $f(x)=\arcsin(4x^3-3x)$.

Решение: $D(f)=[-1;1]$. Обозначим через $t(x) = 4x^3-3x$ внутреннюю функцию. Функция $f(t)=\arcsin t$ монотонно возрастающая при $t \in [-1;1]$. Тогда точка $\min t(x) = 4x^3-3x$ есть точка $\min f(t)=\arcsin t$ и точка $\max t(x) = 4x^3-3x$ есть точка $\max f(t)=\arcsin t$

Таким образом $t'(x)=12x^2-3$, $t'(x)=0 \Rightarrow x=1/2$ и $x=-1/2$. Данные критические точки являются внутренними для $(-1;1)$. $t(-1)=t(1/2)=-1 - \min$, $t(1)=t(-1/2)=1 - \max$. $f(-1)=-\pi/2$, $f(1)=\pi/2$

Ответ: $E(y) = [-\pi/2; \pi/2]$



Метод оценки

Оцениваем множество значений функции с помощью различных истинных неравенств и их свойств.

При исследовании функции на максимум или минимум без производной могут пригодиться теоремы о средних, оценка для суммы двух взаимно обратных чисел, а также

умение выделять полный квадрат в квадратном трехчлене, тригонометрическая формула введения вспомогательного угла, умение выделять целую часть в дробном выражении.

Пример: Найти множество значений функции $y=2\cos x-3$

Решение:

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos x \leq 1 \\ -2 &\leq 2\cos x \leq 2 \\ -5 &\leq 2\cos x - 3 \leq -1 \\ -5 &\leq y \leq -1 \end{aligned}$$

Ответ: $E(y)=[-5;-1]$

Метод введения параметра

Данный метод удобнее использовать при нахождении множества значения дробно - рациональных функций, у которых степень переменной не превышает 2.

Напомним, что множеством значений $E(f)$ числовой функции называется множество всех $a \in \mathbb{R}$, для которых существует хотя бы одно $x \in D(f)$ такое, что $f(x)=a$.

Можно сказать по другому: $E(f)$ состоит из тех a , при которых утверждение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение. В простых случаях это уравнение можно исследовать и тем самым отыскать $E(f)$.

Пример: Найти множество значений функции $y=(x^2+x)/x-1$

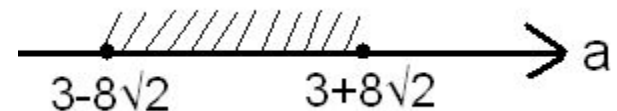
Решение: Приравняем функцию $y=(x^2+x)/x-1$ к параметру a : $(x^2+x)/x-1=a$
 $x^2+x=ax-a \Rightarrow x^2-ax+x+a=0$. Затребуем, чтобы уравнение имело корни: $D \geq 0$, тогда

$$1-2a+a^2-4a \geq 0$$

$$a^2-6a+1 \geq 0$$

$$\text{Корни: } a_1=3+8\sqrt{2}$$

$$a_2=3-8\sqrt{2}$$



Ответ: $E(y)=[3-8\sqrt{2}; 3+8\sqrt{2}]$

Метод использования свойств квадратичной функции

В ряде случаев нахождение множества значений данной функции сводится к исследованию квадратичной функции на том или ином промежутке.

Пример: Найти множество значений функции $f(x) = 2\cos x + \cos 2x$.

Решение: Данную функцию заменим на $f(x) = 2\cos^2 x + 2\cos x - 1$.

Пусть $\cos x = t$, $-1 \leq t \leq 1$. Тогда необходимо найти множество значений функции $f(t) = 2t^2 + 2t - 1$ при $t \in [-1; 1]$.

$$t_0 = -2/4 = -1/2.$$

Сравниваем значения функции в точке $t = -1/2$ со значениями функции на концах промежутка:

$$f(-1/2) = -3/2, \quad f(-1) = -1, \quad f(1) = 3$$

Таким образом $-3/2 \leq f(x) \leq 3$, значит $E(y) = [-3/2; 3]$

Ответ: $E(y) = [-3/2; 3]$

Метод замены $E(y)$ прямой функции на $D(x)$ обратной

Данный метод решения возможен, если из выражения задающего функцию можно выразить x как функцию от y .

Пример: Найти множество значений функции $y = 3^{\frac{1}{2^x - 1}}$

Решение: $x \neq 0$; выразим y через x : $2^x - 1 = \frac{1}{\log_3 y}$

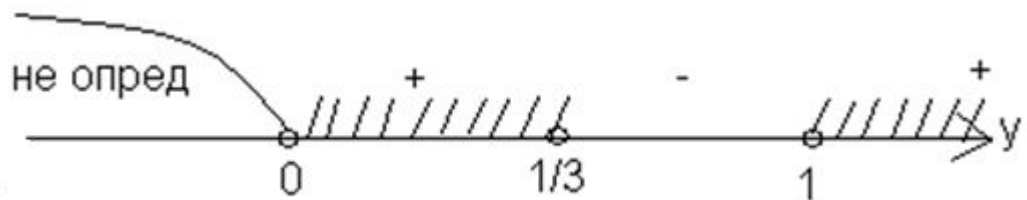
$$x = \log_2 \left(\frac{1}{\log_3 y} + 1 \right)$$

Найдем ООФ полученной функции: $\frac{1}{\log_3 y} + 1 > 0$

Корни: $y = \frac{1}{3}$

$$\frac{1 + \log_3 y}{\log_3 y} > 0$$

ОДЗ: $\begin{cases} y > 0 \\ y \neq 1 \end{cases}$



Ответ: $E(y) = (0; 1/3) \cup (1; +\infty)$

Метод непосредственных вычислений

Данный метод применяется в тех случаях, когда область определения содержит лишь несколько значений аргумента или может записана с помощью конечного числа формул.

Множество значений функции находится путем вычисления всех возможных значений функции.

Пример 1: Найти множество значений функции $y = 7 - \sqrt{6x - x^2 - 9}$

Решение: Преобразуем данную функцию: $y = 7 - \sqrt{-(x-3)^2}$. Так как по области определения $-(x-3)^2 \geq 0$, отсюда следует, что область определения будет состоять из одного значения $x=3 \Rightarrow$ и $E(y)$ будет состоять из одного числа $y=7$

Ответ: $E(y)=7$

Пример 2: Найти множество значений функции: $y = \frac{\sin^2 x}{2 - \sqrt{-\sin^2 3x}}$

Решение: $D(y): x = \pi n / 3, n \in \mathbb{Z}$, тогда имеем $y = \sin^2 x / 2$ и $x = \pi n / 3, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ тогда $y(\pi n / 3) \in \{0; 3/8\}$, значит $E(y) = \{0; 3/8\}$

Ответ: $E(y) = \{0; 3/8\}$

Графический метод

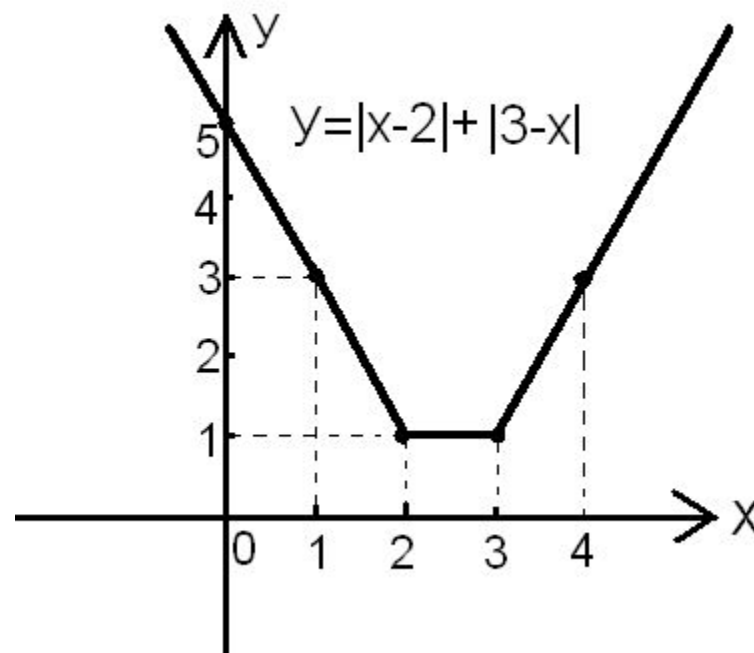
При использовании данного метода необходимо схематично изобразить график функции и по графику найти множество значений.

Пример: $y = |x-2| + |3-x|$

Решение: 1) Если $x < 2$, то $y = 5 - 2x$

2) Если $2 \leq x \leq 3$, то $y = -1$

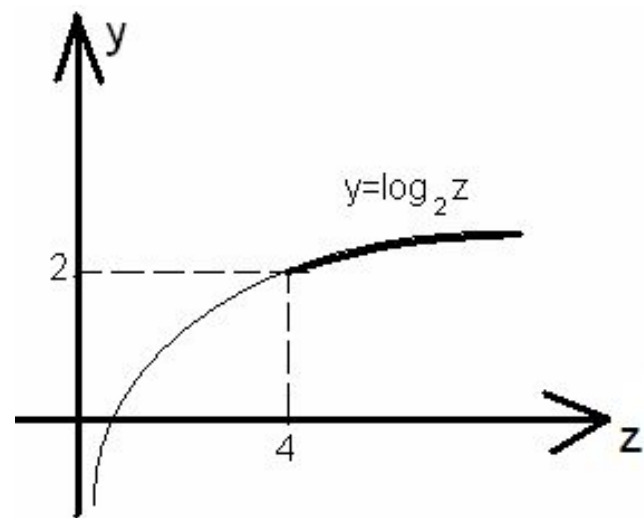
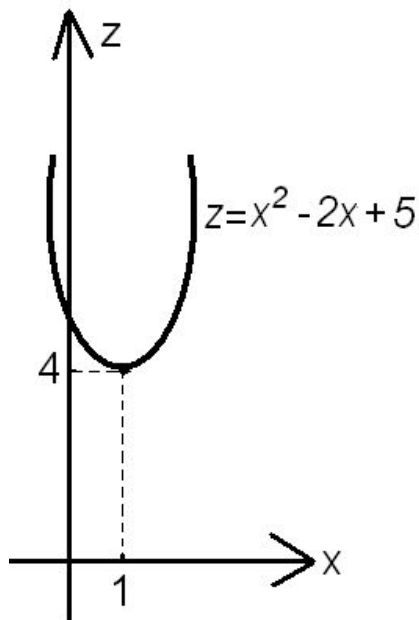
3) Если $x > 3$, то $y = 2x - 5$



Ответ: $E(y) = [1; +\infty)$.

Метод построения графика сложной функции

Какие значения может принимать выражение: $\log_2(x^2 - 2x + 5)$?
Пусть $y = \log_2 z$, где $z = x^2 - 2x + 5$



$$x \in (-\infty; +\infty) \Rightarrow z \in [4; +\infty) \Rightarrow y \in [2; +\infty)$$

Ответ: $E(y) = [2; +\infty)$

Неравенство Коши

- Сформулируем неравенство Коши: среднее арифметическое двух чисел a и b не меньше их среднего геометрического: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$
- Следствия из неравенства Коши:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab} \quad a^2 + b^2 \geq 2ab \quad ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \quad ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

- Заметим, что равенство достигается при $a = b$.

Задача 1. Найти наибольшее значение произведения двух положительных переменных, сумма которых постоянна.

Этот вопрос решает неравенство $ab \leq ((a+b)/2)^2$, утверждающее, что произведение двух положительных чисел не больше квадрата их среднего арифметического. Действительно, если a и b – две переменные, $a+b=M$, где M – некоторая постоянная, то при $a \neq b$ согласно $ab \leq ((a+b)/2)^2$, $ab \leq (M/2)^2$, а при $a=b$ произведение ab достигает наибольшего значения, равного $(M/2)^2$. Аналогично, если требуется найти наименьшее значение суммы двух переменных, произведение которых постоянно, то применяется неравенство:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}$$

Блоки решения задач

1. С помощью производной
2. Использование монотонности внешней функции
3. Метод оценки
4. Введение параметра
5. Использование свойств квадратичной функции
6. Замена $E(y)$ прямой функции на $D(x)$ обратной
7. Метод непосредственных вычислений
8. Графический метод
9. Использование графика сложной функции
10. Неравенство Коши в геометрии



Метод использования производной функции

Задание1: $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x; -1 \leq x \leq 1$

Решение: $3^x = t; \frac{1}{3} \leq t \leq 3, \text{т.к}$

$$y(t) = 2t^3 - 4t^2 + 2t; \frac{1}{3} \leq t \leq 3$$

$$y'(t) = 6t^2 - 8t + 2$$

$$y'(t) = 0 \Rightarrow 6t^2 - 8t + 2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{1}{3} \Rightarrow t = 1 \end{array} \right. \text{ - внутренняя точка} \\ \text{промежутка.}$$

$$\left. \begin{array}{l} y(1) = 0 \\ y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{8}{27} \\ y(3) = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 \leq y \leq 24$$

Ответ: $E(y) = [0; 24]$

Блоки
решения
задач



Метод использования производной функции

Задание 2: $y = 4\sin^2 x \cdot e^{4\cos^2 x - 2}$

1 способ.

Решение: Функция периодична, $T = \pi \Rightarrow 0 \leq x \leq \pi$

$$y' = 8\sin x \cdot \cos x \cdot e^{4\cos^2 x - 2} + e^{4\cos^2 x - 2} \cdot (-8\cos x \cdot \sin x) \cdot 4\sin^2 x = 4\sin 2x \cdot e^{4\cos^2 x - 2} \cdot (1 - 4\sin^2 x)$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 1 - 4\sin^2 x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0; \frac{\pi}{2}; \pi \\ x = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

$$y(0) = y(\pi) = 0$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 4\sin^2 \frac{\pi}{6} e^{4\cos^2 \frac{\pi}{6} - 2} = e$$

Ответ: $E(y) = [0; e]$

2 способ.

Решение: Пусть $4\cos^2 x = a$, $0 \leq a \leq 4$

$$\text{Тогда} \quad y(a) = (4 - a) \cdot e^{a-2} \Rightarrow y'(a) = e^{a-2} \cdot (3 - a) \quad y'(a) = 0 \Rightarrow a = 3$$

$$y(0) = \frac{4}{e^2}$$

$$y(4) = 0$$

$$y(3) = e$$

$$\left. \begin{matrix} y(0) = \frac{4}{e^2} \\ y(4) = 0 \\ y(3) = e \end{matrix} \right\} \Rightarrow E(y) = [0; e]$$

Ответ: $E(y) = [0; e]$

**Блоки
решения
задач**



Метод использования производной функции

Задание 3: Найти значение функции $f(x) = 5^{\log_5(x+4) - \log_5 \frac{x^3-9x}{x+4}}$ в точке максимума.

Решение: Найдем О.О.Ф., учитывая, что логарифмическая функция определена только для положительного аргумента. Для этого решим следующую систему неравенств.

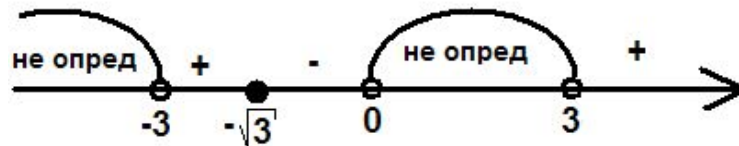
$$\begin{cases} x+4 > 0 \\ \frac{x^3-9x}{x+4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 > 0 \\ x^3-9x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ x(x+3)(x-3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -4 \\ -3 < x < 0 \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 0 \\ x > 3 \end{cases}$$

Упростим выражение, задающее функцию:

$$5^{\log_5(x+4) - \log_5 \frac{x^3-9x}{x+4}} = 5^{\log_5(x+4)} \cdot 5^{\log_5 \frac{x^3-9x}{x+4}} = (x+4) \cdot \frac{x^3-9x}{x+4} = x^3 - 9x.$$

На рассматриваемой области определения $f(x)$ имеет единственную критическую точку.

Таким образом, $x = -\sqrt{3}$ точка максимума функции, т.к.



Ответ: $6\sqrt{3}$.

$$f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9 \cdot (-\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}.$$

**Блоки
решения
задач**



Метод использования производной функции в геометрических задачах.

Блоки
решения
задач

Задание: Найти высоту конической воронки наибольшего объёма, если её образующая равна l .

Решение: Объём конуса, площадь основания которого равна S , а высота – H , вычисляется по формуле: $V = \frac{1}{3}SH$, где $S = \pi R^2$, R – радиус окружности, лежащей в

основании конуса. По теореме Пифагора R и H связаны равенством: $R^2 + H^2 = l^2$. Воспользовавшись этим равенством, выразим V как функцию только одной переменной H :

$$V = \frac{1}{3} \pi (l^2 - H^2) \cdot H$$

Решая уравнение $V'(H) = \frac{\pi}{3} (l^2 - 3H^2) = 0$, находим две критические точки

функции $V(H)$: $H_1 = + \frac{l}{\sqrt{3}}$, $H_2 = - \frac{l}{\sqrt{3}}$, из которых только точка H_1

принадлежит промежутку $(0; l)$. При переходе через точку H_1 производная функции

$V'(H) = \frac{\pi}{3} (l^2 - 3H^2)$ меняет знак с плюса на минус, и, следовательно, на

промежутке $(0; \frac{l}{\sqrt{3}})$ функция $V(H)$ возрастает, а на промежутке $(\frac{l}{\sqrt{3}}; l)$ убывает.

Таким образом, $H = \frac{l}{\sqrt{3}}$ – высота конуса максимального объёма при заданной длине образующей.



Метод использования монотонности внешней функции

Блоки
решения
задач

Вспомним характер монотонности основных элементарных функций

Монотонно возрастающие
функции на своей области
определения:

$$y = \arcsin x$$

$$y = \arctg x$$

$$y = x^3$$

$$y = a^n, a > 1$$

$$y = \sqrt[n]{x}$$

$$y = \log_a x, a > 1$$

Монотонно убывающие
функции на своей области
определения:

$$y = \arccos x$$

$$y = \operatorname{arccctg} x$$

$$y = a^n, 0 < a < 1$$

$$y = \log_a x, 0 < a < 1$$

$$y = 1/x, x > 0$$

$$y = 1/x, x < 0$$

Задача 1: Найти наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2+4x}$

Решение: Так как функция $y = (1/5)^n$ монотонно убывающая, то ее точка минимума совпадет с точкой максимума внутренней функции $g(x) = -x^2 + 4x$. Тогда: $x_{\text{в}} = 2$; $y(-2) = 1/625$

Ответ: Наименьшее значение функции $y(-2) = 1/625$.



Метод использования монотонности внешней функции

Задача 2: Найти наибольшее значение функции $y = \log_5(3+4x-2x^2)$

Решение: Так как $y = \log_5 t$ - монотонно возрастающая функция, то находим точку максимума $g(x) = 3+4x-2x^2$: $x_{\text{в}} = 1$, значит $y = 1$ - наибольшее значение функции.

Ответ: Наибольшее значение функции $y = 1$.

Задача 3: Найти наибольшее значение функции $y = 2/(x^2-2x+2)$

Решение: Так как функция $y = 2/t$ - монотонно убывающая при $t > 0$, то находим точку минимума функции $g(x) = x^2-2x+2$, $x_{\text{в}} = 1$, тогда $y = 2$ – наибольшее значение функции.

Ответ: Наибольшее значение функции $y = 2$.

Блоки
решения
задач



Метод оценки

Задание 1: $y = \log_2(3 + \sin 4x)$

Решение: $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 3 + \sin 4x \leq 4 \Rightarrow y = \log_2 t$ - функция монотонно возрастающая $\Rightarrow 1 \leq y \leq 2$

Ответ: $E(y) = [1; 2]$

Задание 2: $y = (4 \cos x - 3 \sin x + 15)/5$

Решение:

$$\begin{aligned} -(3 \sin x - 4 \cos x - 15)/5 &= -(5 \sin(x - \arctg 4/3) - 15)/5 = -(\sin(x - \arctg 4/3) - 3) = \\ &= 3 - \sin(x - \arctg 4/3) \\ -1 &\leq \sin(x - \arctg 4/3) \leq 1 \\ 2 &\leq 3 - \sin(x - \arctg 4/3) \leq 4 \\ 2 &\leq y \leq 4 \end{aligned}$$

Ответ: $E(y) = [2; 4]$.

Задание 3: $y = 2^{x+1} + 2^{-x+1}$

$$\begin{aligned} \text{Решение: } 2^{x+1} + 2^{-x+1} &= 2 \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right) \quad \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right) \geq 2; \quad 2^x > 0 \\ &2 \left(2^x + \frac{1}{2^x} \right) \geq 4 \end{aligned}$$

Ответ: $E(y) = [4; +\infty)$

Блоки
решения
задач

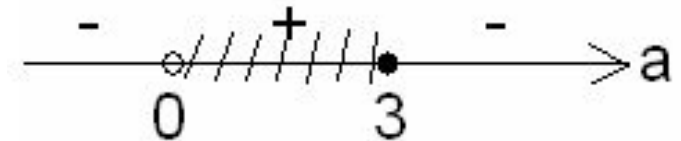


Метод введения параметра

Задание 1: $y=6/(x^2+4x+6)$

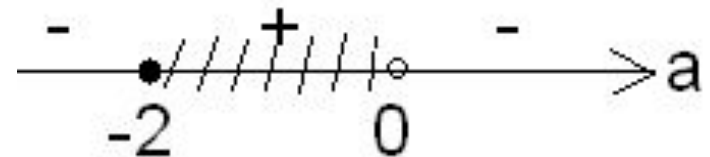
Решение: $6/(x^2+4x+6)=a, a \neq 0 \Rightarrow$
 $ax^2+4ax+6a=6 \Rightarrow$
 $ax^2+4ax+6a-6=0 \Rightarrow$
 $D \geq 0 \Rightarrow 16a^2-4a(6a-6) \geq 0 \Rightarrow$
 $16a^2-24a^2+24a \geq 0$
 $24a-8a^2 \geq 0 \Rightarrow$
 $3a-a^2 \geq 0 \Rightarrow$

Ответ: $E(y) = (0; 3]$



Задание 2: $y = -2/(x^2+1)$

Решение: $-2/(x^2+1)=a, a \neq 0 \Rightarrow$
 $ax^2+a = -2 \Rightarrow$
 $x^2 = (-a-2)/a \Rightarrow$
 $(-a-2)/a \geq 0 \Rightarrow$
Ответ: $E(y) = [-2; 0)$



Блоки
решения
задач

Метод введения параметра

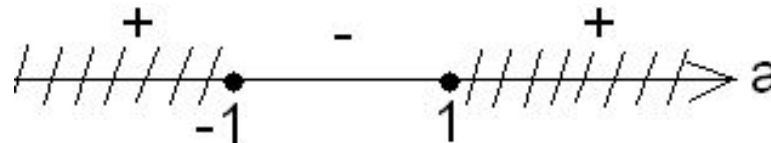
Задание 3: $y = (x^2 + 4x + 5) / (x^2 + 4x + 3)$

Решение: $(x^2 + 4x + 5) / (x^2 + 4x + 3) = a, x \neq -1, x \neq -3$

$$ax^2 + 4ax + 3a = x^2 + 4x + 5$$

$$(a-1)x^2 + (4a-4)x + 3a-5 = 0$$

$$D = (4a-4)^2 - 4(a-1)(3a-5) = 16(a-1)^2 - 4(a-1)(3a-5) = 4(a-1)(4a-4-3a+5) = 4(a-1)(a+1) \geq 0$$



Ответ: $E(y) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$

Блоки
решения
задач

С помощью исследования квадратичной функции

Блоки
решения
задач

Задача 1: Содержит ли область значений функции $y = -4x^2 + 4\sqrt{5}x - 5 + \sqrt{3}$ отрезок $[0; \sqrt{2}]$

Решение: Область значений функции $E(y) = (-\infty; y_0]$, где y_0 - ордината вершины параболы.

Абсцисса вершины: $x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{-4\sqrt{5}}{-8} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow y_0 = -4 \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + 4 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} - 5 + \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Так как $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, то отрезок $[0; \sqrt{2}]$ содержится во множестве $(-\infty; \sqrt{3}]$.

Ответ: $[0; \sqrt{2}] \subset (-\infty; \sqrt{3}]$.

Задача 2: Найдите область значения функции $f(x) = 3\sin^2 x - 2\cos x + \cos^2 x - 4$

Решение: Выразим $\sin^2 x$ из основного тригонометрического тождества и подставим в выражение $f(x)$: $3\sin^2 x - 2\cos x + \cos^2 x - 4 = -2\cos^2 x - 2\cos x - 1$. Сделаем замену $\cos x = t$, $|t| \leq 1$, при этом $f(x)$ перейдет в $y(t) = -2t^2 - 2t - 1$, при $t \in [-1; 1]$, $t_0 = -1/2$. Следовательно, $\max y$ достигается в вершине $\max y = -1/2$; $\min y$ достигается на том конце промежутка $[-1; 1]$, который отстоит дальше от вершины, то есть при $t = 1$, $y(1) = -5$

Следовательно, искомая область значений $E(f(x)) = E(y(t))$ и $E(f) = [-5; -1/2]$.

Ответ: $E(f(x)) = [-5; -1/2]$.



Метод замены $E(y)$ прямой функции на $D(x)$ обратной

Блоки
решения
задач

Задание 1: $y = 4 + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

Решение: О.О.Ф. $-2 < x < 2$

$$4 + \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = y \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4-x^2}} = y-4 \Rightarrow \sqrt{4-x^2} = \frac{2}{y-4} \Rightarrow 4-x^2 = \frac{4}{(y-4)^2} \Rightarrow x^2 = 4 - \frac{4}{(y-4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{4 - \frac{4}{(y-4)^2}}$$

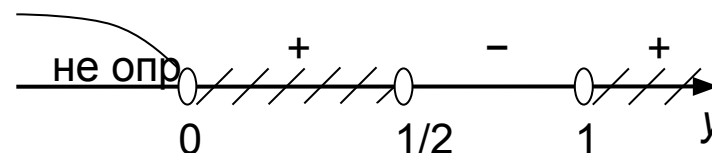
ООФ: $4 - \frac{4}{(y-4)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{(y-4)^2} \leq 1 \Rightarrow (y-4)^2 \geq 1 \Rightarrow (y-4) \geq 1, \text{ т.к. } y > 4 \Rightarrow y \geq 5$

Ответ: $E(y) = [5; +\infty)$

Задание 2: $y = 2^{\frac{1}{3^x-1}}$

Решение: $x \neq 0; \frac{1}{3^x-1} = \log_2 y \Rightarrow 3^x - 1 = \frac{1}{\log_2 y} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{\log_2 y} + 1 \Rightarrow x = \log_3 \left(\frac{1}{\log_2 y} + 1 \right)$

ООФ: $\frac{1 + \log_2 y}{\log_2 y} > 0$



Ответ: $E(y) = (0; 1/2) \cup (1; +\infty)$.

Метод непосредственного вычисления

Задача 1: $y = \sqrt{x^2 - 5x + 4} + \sqrt{-2x^2 + 10x - 8}$

Решение: О.О.Ф.
$$\begin{cases} x^2 - 5x + 4 \geq 0 \\ -2x^2 + 10x - 8 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Ответ: $E(y) = \emptyset$

Задача 2: $y = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} + 4\sqrt{x} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

Решение: О.О.Ф.
$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Упростим выражение, задающее функцию
$$\frac{(\sqrt{x} + 1)^2 - (\sqrt{x} - 1)^2 + 4\sqrt{x}(x - 1)}{x - 1} \cdot \frac{x - 1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{(x + 2\sqrt{x} + 1 - x + 2\sqrt{x} - 1 + 4x\sqrt{x} - 4\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \cdot \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 4x$$

$x > 0 \Rightarrow y > 0$
 $x \neq 1 \Rightarrow y \neq 4$

Ответ: $E(y) = (0; 4) \cup (4; +\infty)$

**Блоки
решения
задач**



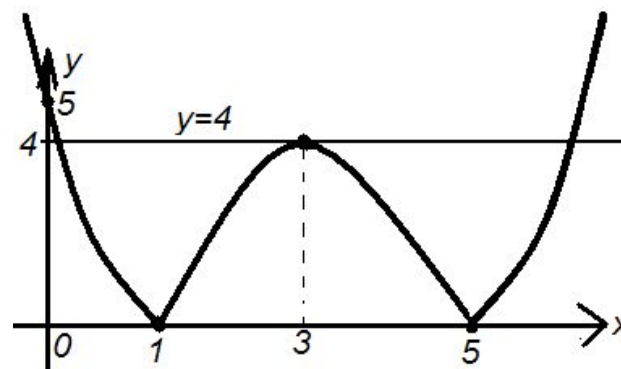
Графический метод

Блоки
решения
задач

Данный метод удобнее всего использовать при исследовании функции, связанной с модулем либо при исследовании уравнения с параметром вида $f(x)=a$.

Задание 1: При каких a уравнение имеет 3 корня: $|x^2 - 6x + 5| = a$

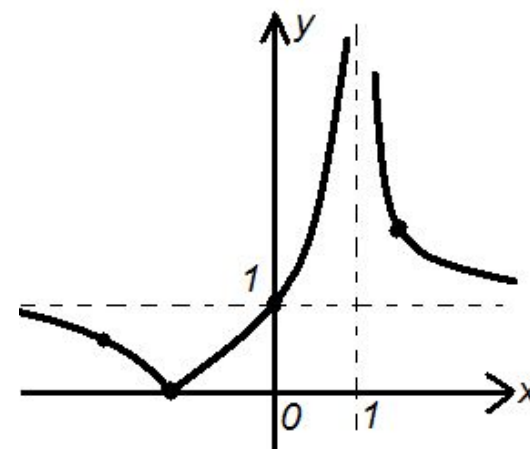
Ответ: $a=4$



Задание 2: Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = |x+1|/|1-x|$, $x \in [-2; 0]$.

Решение: Изображаем график функции $y = |x+1|/|1-x|$. Выделяем часть графика при $x \in [-2; 0]$.

Ответ: Наибольшее значение равно 1, а наименьшее - равно 0.

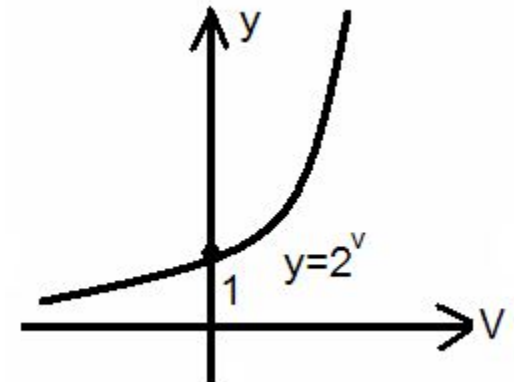
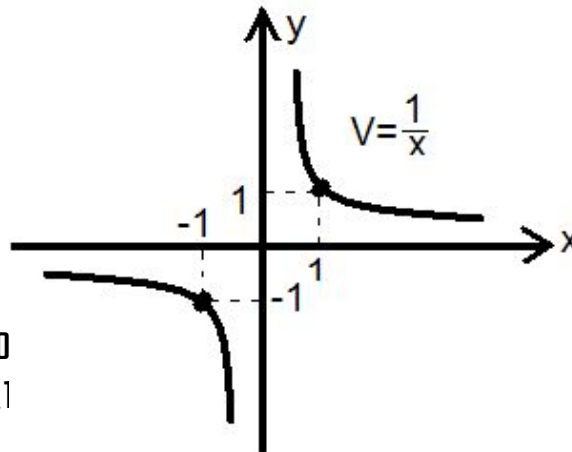


Использование графика сложной функции

Найти E(f) $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

Внутренняя функция

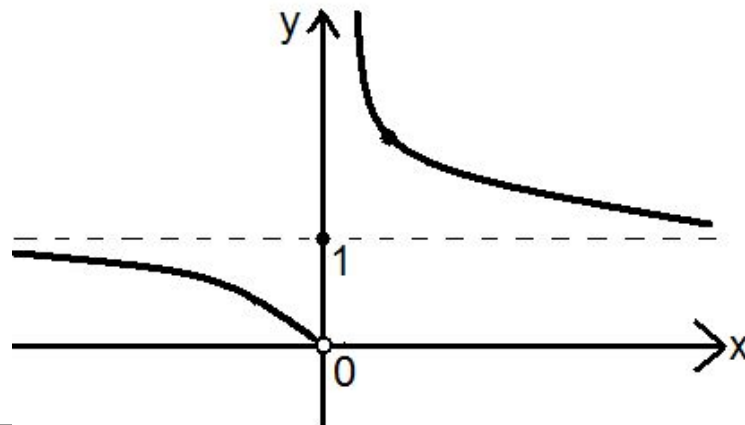
Внешняя функция



$X(-\infty \uparrow 0) \Rightarrow V(0 \downarrow -\infty) \Rightarrow y = (1 \downarrow 0)$

$X(0 \uparrow +\infty) \Rightarrow V(+\infty \downarrow 0) \Rightarrow y = (+\infty \downarrow 1)$

Теперь берём x и y

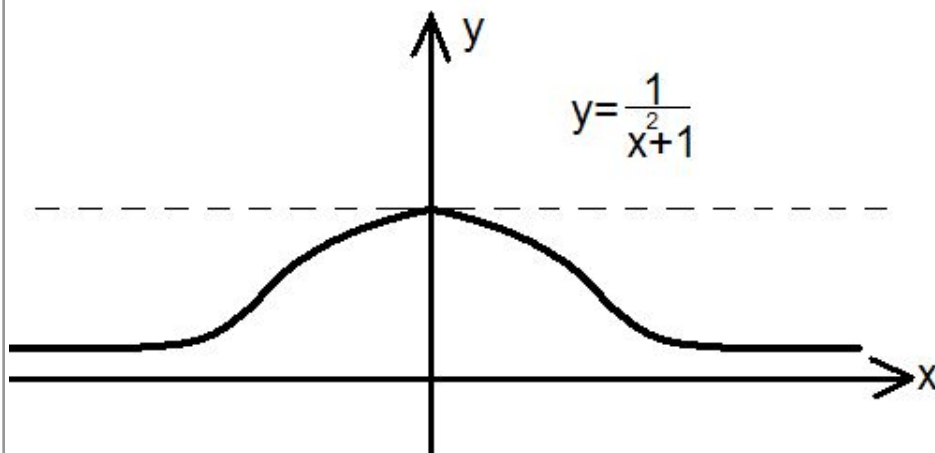
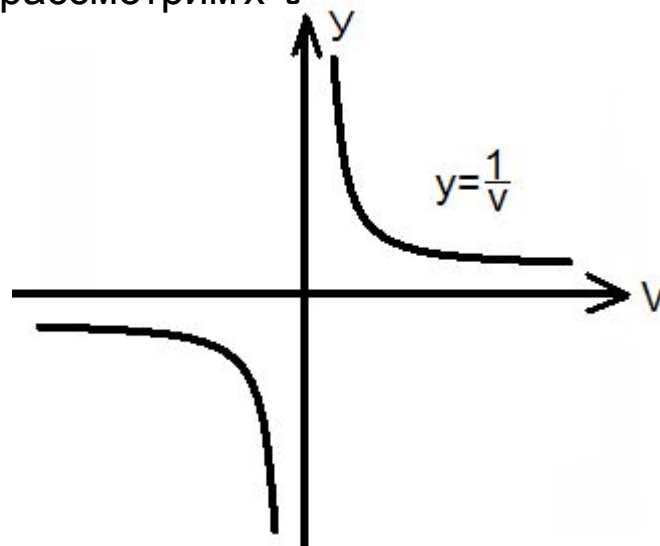
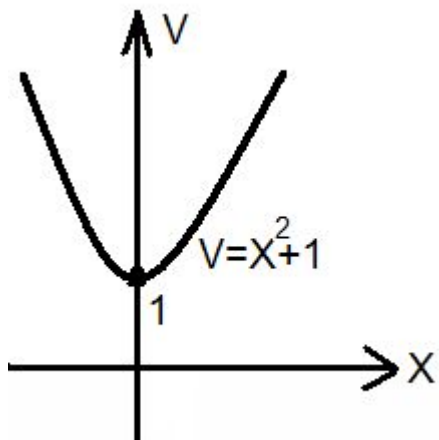


Блоки
решения
задач

Использование графика сложной функции

Найти: $E(y)$ $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

Решение: функция четная, поэтому рассмотрим $x \geq 0$



$$X[0 \uparrow + \infty) \Rightarrow V[1 \uparrow + \infty) \Rightarrow y[1 \downarrow 0)$$

$$E(y) = (0; 1]$$

Блоки
решения
задач

Неравенство Коши в геометрии

Блоки
решения
задач

Задача: Требуется разместить на земле участок площадью 1800 м², состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке, где FG=EF=10 м, BC=15 м и CD≥40 м.

Найти: наименьшее значение периметра такого участка и какие либо значения длин KL, LH и CD, при которых периметр является наименьшим.

Решение:

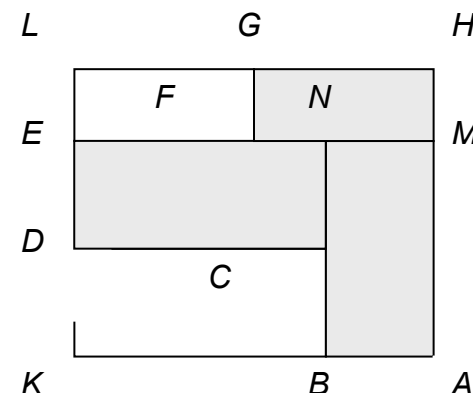
1). Площадь участка ABCDEFGH равна S=1800, а его периметр равен периметру P прямоугольника KЛHA. Обозначим KL=x, LH=y и CD=z, тогда $P=2(x+y)$, $z \geq 40$ и $xy = S + EF \cdot FG + BC \cdot z \geq 1800 + 10 \cdot 10 + 15 \cdot 40 = 2500$.
Поэтому $y \geq (2500/x)$ и $P \geq 2(x + (2500/x))$

2). Воспользуемся неравенством Коши:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{x + \frac{2500}{x}}{2} \geq \sqrt{x \cdot \frac{2500}{x}} \Rightarrow x + \frac{2500}{x} \geq 100 \Rightarrow x = 50, y = 50, z = 40 \Rightarrow P_{\text{наименьшее}} = 200$$

Ответ: P_{наим.}=200



Семинар-практикум

по теме: «Нахождение области значения функции»

1. Дать определение функции. Что такое область определения функции? Что такое множество значений функции? Слово «функция» употребимо только в математике? Возможна презентация.
2. Приведи пример функции, заданной аналитически, у которой:
 - а) область определения есть множество, состоящее из одного числа.
 - б) область определения есть множество, состоящее из всех чисел отрезка $[1;2]$.
 - в) область определения есть множество, состоящее из двух чисел.
 - г) область значения есть множество, состоящее из одного числа.
 - д) область значения есть множество, состоящее из двух чисел.
 - е) область значения есть множество, состоящее из всех натуральных чисел.
3. Какие способы для нахождения множества значений функции ты знаешь? Приведи примеры. Возможна презентация.

Семинар-практикум

по теме: «Нахождение области значения функции»

4. Найди множество значений следующих функций, выбери из него либо наибольшее целое, либо наименьшее целое.

$$1) y = \frac{x+1}{x^2+1};$$

$$2) y = \sin^2 x + 2 \sin x - 3;$$

$$3) y = \sin^4 x + \cos^4 x;$$

$$4) y = \log_2(\cos^2 2x + 5 \cos 2x + 6);$$

$$5) y = \arccos(4x^3 - 3x);$$

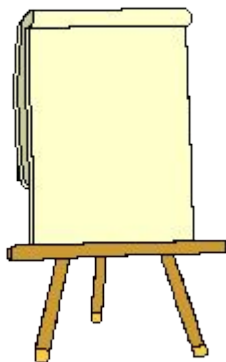
$$6) y = \frac{6}{x^2 + 4x + 6};$$

$$7) y = 18 \log_{\frac{1}{8}} \frac{\sqrt{3} \sin x - \cos x + 6}{\sqrt{2}};$$

$$8) y = 3^{2x^2 - 4x + 5};$$

Проверь себя!

в состав работы входит тест на 2 варианта для проверки знаний по теме «Нахождение множества значений функции»



[Открыть версию для печати](#)

[\(приложение1.doc\)](#)

Банк дополнительных задач



Тема: **«Нахождение множества значений функции»**.
Перечисленные задачи можно использовать при подготовке проверочных работ, при индивидуальных работах с учащимися и т.д.

Содержит версию для печати.

Вопросы к заданиям можно формулировать так:

- найти множество значений функции
- найти наибольшее (наименьшее) значений функции
- сколько целых (простых, натуральных) чисел содержится в множестве значений функции
- при каких a уравнение $f(x)=a$ имеет решение



Банк дополнительных задач

Версия для печати (Приложение2.doc)

$$1) y = 2^{x^3 - 3x + 6}, x \in [-2; 2]$$

$$5) y = \operatorname{arcTg} \frac{2x^2 + 4x + 9}{2x^2 + 4x + 5}$$

$$2) y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 6, x \in [0; 2]$$

$$6) y = \log_2 \frac{1}{\sin x - \frac{1}{2}}$$

$$3) y = \log_3 \frac{2x - 1}{x + 1}, x \in [-4; -2]$$

$$7) y = 3^{\frac{x-1}{|x-1|}}$$

$$4) y = \log_{\cos \frac{\pi}{3}} (-8x - x^2)$$

$$8) y = \frac{\pi}{2 \operatorname{arcCos}(3x - 5) - \pi}$$



Банк дополнительных задач

$$9) y = \log_{\pi} \left(\arcsin \left(\sin x + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$10) y = \operatorname{arccotg} \frac{x}{\sqrt{3}} + \arccos(x-2)$$

$$11) y = 2^{\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}, x < 0$$

$$12) y = \log_{\pi} (2 \arcsin 2^{-\sqrt{x}})$$

$$13) y = \log_{\pi} (4 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}})$$

$$14) y = \operatorname{arctg} \log_4 \sqrt{0,5^{x^2-2x-1}}, x \leq 1$$

$$15) y = \sin^2 x + \cos^2 - \frac{1}{2}$$

$$16) f(x) = 1 + 4 \sin - 2x, x \in [0; \pi]$$

$$17) f(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 40} + \cos x$$

$$18) f(x) = 4x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin x, x > 0$$

$$19) f(x) = \frac{3x+1}{(3x+1)^2 + 1}$$

$$20) y = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} x + 5$$



Банк дополнительных задач

$$21)y = \frac{8}{\pi} \operatorname{arctg}^2 x - 1$$

$$22)y = \left(\frac{3}{\pi} \operatorname{arctg} x\right)^2$$

$$23)y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{4-(3x+1)^2}$$

$$24)y = \operatorname{Tg} x + \operatorname{Ctg} x$$

$$25)y = 3 - |2x + 3|$$

$$26)y = 2^{\cos x}$$

$$27)y = 1 + |\log_2 x|$$

$$28)y = \frac{1}{1 + \sin 2x}$$

$$29)y = \frac{x^3 - 27}{x - 3}$$

$$30)f(x) = 4^{1-2^x}$$

$$31)y = \operatorname{arcsin}(2,5 - \sqrt{9 - x^2})$$

$$32)y = \operatorname{arccos} \frac{1 - 2\sqrt{4 - x^2}}{2}$$

$$33)y = \sqrt{\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x} + 2$$

$$34)y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$



Банк дополнительных задач

$$35) y = \frac{6}{3 + |2x - 1|}$$

$$36) y = \log_3(x^2 + 9)$$

$$37) y = 36 \log_{\frac{1}{4}} \frac{\sin x - \sqrt{3} \cos x + 6}{2\sqrt{2}}$$

$$38) f(x) = 7 \log_{\frac{1}{\sqrt{17}}} \frac{8 \cos^2 4x + 8 + \cos 4x}{\cos^2 2x - \sin^2 2x}$$

$$39) y = \frac{5^{x-2} * \left(250 + 25^{\frac{x+2}{2}} \right) + 6}{25^x + 2 * 5^{x+1} + 1}$$

$$40) y = \sqrt{4 - 4x + x^2} - 3^{\log_9(x-6)^2}$$

$$41) y = \log_4(16 - |x|) - \frac{3x}{|x|}, x \leq 48$$

$$42) y = x^3 - x * |x - 8|, x \in [0; 10]$$

$$43) y = \left(\frac{1}{2} \right)^{2 \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{Tg} x - 3}$$

$$44) y = \left| \frac{1+x}{1-x} \right|, x \in [-2; 0]$$

$$45) y = -x^4 + 16x^2 - 7$$

$$46) y = \sin^2 x + 3|\sin x|$$

$$47) y = \left(\frac{\sin x}{2 + \cos x} \right)^2, x \in [0; \pi]$$

$$48) y = \sqrt{1 - 2x + x^2} + \sqrt{1 + 2x + x^2}, \\ x \in [-2; 0]$$

$$49) y = \log_{(6+4x+x^2)} \left(\frac{|x+2| + |x-4|}{3} \right)$$



Банк дополнительных задач

- 50. В трапецию $ABCD$, боковая сторона AB которого (длина 8 см) перпендикулярна основанию, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна из его сторон лежала на большем основании трапеции. Основания трапеции равны 6 и 10 см соответственно. Вычислить площадь этого прямоугольника.
- 51. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R , найти тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.
- 52. Определить размеры цилиндра, имеющего наибольший объем, если площадь его полной поверхности равна 2π . 53. На странице текст должен занимать 384 см. Верхние и нижние поля должны быть по 3 см, а правые и левые – по 2 см. Если принять во внимание только, то каковы должны быть оптимальные размеры страницы.
- 54. Первая бригада рабочих одинаковой производительности мостила одинаковый участок дороги, а вторая, имевшая на 6 рабочих больше, – другой, втрое больший участок. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде, если свою работу она выполнила быстрее?
- 55. За время t первый рабочий сделал на 3 детали больше второго, который увеличил производительность труда на 0,2 детали в минуту и через некоторое целое число обогнал первого (общей сложности) на две детали. Найти наибольшее возможное значение t при данных условиях.
- 56. В контейнере упакованы изделия двух типов общим весом 321 кг. Стоимость и вес одного изделия первого типа составляют 40 тыс.руб. и 12 кг., а второго – 60 тыс.руб. и 15 кг. Какова наибольшая и наименьшая возможная стоимость находящихся в контейнере изделий?
- 57. Стоимость изготовления n банок пропорциональна величине $n^2 + 4n + 24$. При каком n стоимость изготовления одной банки минимальна?

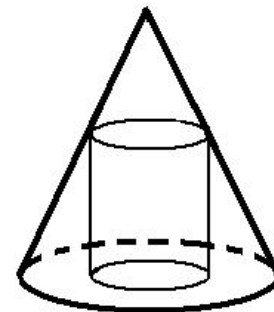


Банк дополнительных задач

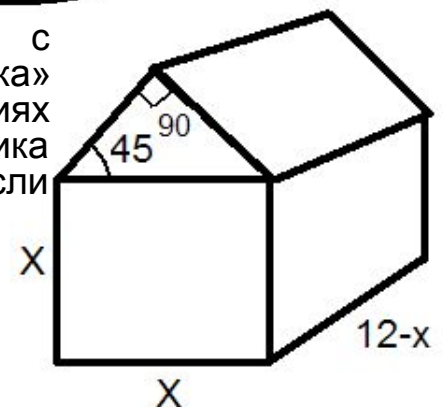
58. Третий и восьмой член арифметической прогрессии равны 13 и -7 соответственно. При каком количестве членов этой прогрессии их сумма максимальна, и чему она равна? 54. В квадратной пластине со стороной $9+x$ ($0 \leq x \leq 9$) сделан круглый вырез (вырезана четверть круга радиусом $2x$ с центром в вершине квадрата). Возрастает или убывает площадь пластины, когда x увеличивается от 0 до 2; от 5 до 6;?
59. В каких пределах может меняться площадь прямоугольника, вписанного в треугольник с данным основанием a и высотой h ? (Две вершины прямоугольника должны принадлежать основанию треугольника, две другие его боковым сторонам.)

60. В конус высотой 1 с углом при вершине осевого сечения α вписываются все возможные цилиндры (рис.). В каких пределах изменяются при этом:

- а) площадь полной поверхности цилиндра;
- б) площадь боковой поверхности цилиндра;
- в) объем цилиндра?



61. Многогранник («домик») составлен из двух прямых призм с квадратными и треугольными основаниями (рис.). Основанием «домика» служит боковая грань четырехугольника призмы. При каких значениях изменяющейся длины x стороны квадрата объема $V(x)$ многогранника является возрастающей функцией, при каких- убывающей, если периметр основания «домика» остается неизменным, равным 24?



*Спасибо
за внимание .*