Алгебра логики. Формулы исчисления высказываний.

Высказыванием называется утверждение, которому можно приписать значение истинности, т.е. оно может быть истинным или ложным.

В логике высказывания не могут толковаться двузначно.

Высказывания могут быть *простыми* (атомарными) или *составными*.

Простые высказывания не могут быть разделены на части. Например, «Земля плоская», «4 – чётное число», «идёт дождь», «я вижу лужи».

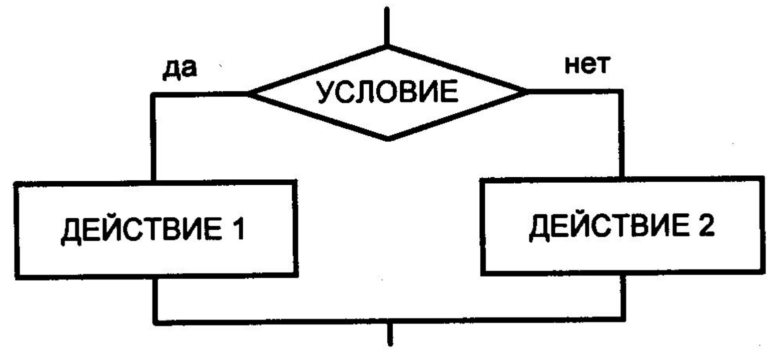
Составные высказывания строятся из простых с использованием логических операций. Например, «Земля плоская и можно дойти до края», «4 – чётное число и его можно разделить на 2 без остатка», «идёт дождь и я вижу лужи».

К базовым логическим операциям относятся **«и», «или», «не»**.

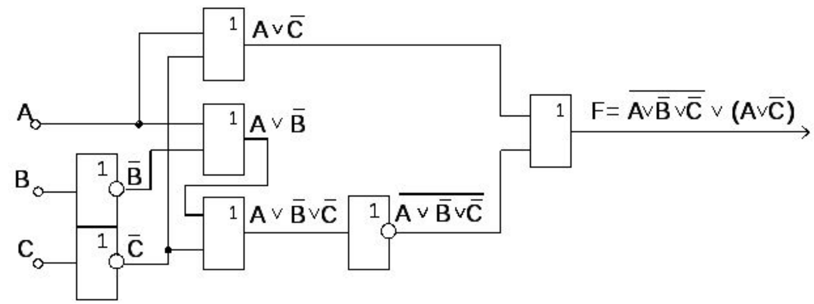
Для формальных записей логических операций простые выражения обозначаются буквами. Например, если обозначить «идёт дождь» - А, «я вижу лужи» - В, то составное выражение «идёт дождь и я вижу лужи» запишется как А^В.

Применение.

1 Создание нелинейно выполняющихся программ (условия, флаги, ветвления). Основные конструкции программ на многих языках.



2 Логический синтез компьютерных программ (ПЛИС) и аппаратных устройств (ASIC).



3 Верификация программ. Проверка соответствия программного обеспечения спецификации.

Исчисление высказываний – это аксиоматическая логическая система, интерпретацией которой является алгебра высказываний.

Алфавит исчисления высказываний состоит из символов трех категорий:

1. Символы первой категории: x, y, z, ..., x1, x2, ... - *переменные* высказываний.
2. Символы второй категории: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\neg$ – *логические связки* (дизъюнкция, конъюнкция, импликация, эквивалентность, отрицание).
3. Третья категория символов – скобки ( ).

Формулы исчисления высказываний представляют собой последовательности символов алфавита исчисления высказываний.

1. Всякая переменная x, y, z, ... является формулой.
2. Если A и B – формулы, то выражения $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \leftrightarrow B)$, $\bar{A}$ – также формулы.
3. Никакая другая запись символов не является формулой, например $(A \wedge B$, $A \wedge \vee B$ и т.д.

Эти три утверждения определяют любую формулу исчисления высказываний.

Пусть задана формула F(A, B), где A, B — атомы. Подстановка конкретных высказываний (или просто их значений из области двоичных наборов I = AB = {FF, FT, TF, TT} ~ {00, 01, 10, 11} и вычисление истинности составного высказывания называются *интерпретацией* в области наборов значений атомов.

Интерпретация связана с вычислением истинностного значения формулы.

Формулу $Q = F(X_1, X_2, ..., X_n)$ называют *логической функцией*, если логическая переменная Q принимает значения истинности {T, F} для всех возможных наборов значений истинности высказываний $(X_1, X_2, ..., X_n)$ из I аргументов функции $X_1, X_2, ..., X_n$ - логических двузначных переменных.

Формулы могут быть:

1. *Выполнимыми* - когда существует интерпретация формулы, при которой формула принимает значение «истина».

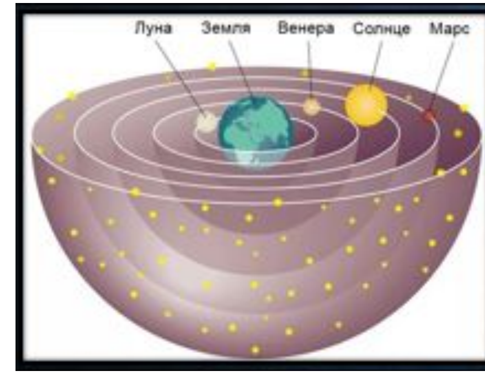
Если формула Ф(/) истинна в интерпретации /, то Ф(/) выполнима в *I.*

Задача проверки формулы на выполнимость известна как *SAT-проблема* (satisfability automation testing).

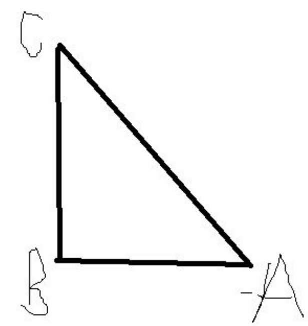
2. *Тавтологиями* - истинными на всех наборах значений атомов из *I*.

Тавтологии представляют собой схемы построения истинных высказываний, независимо от содержания и истинности составляющих высказываний.

Так, для подтверждения истинности утверждения "*Солнце вращается вокруг Земли*", необходимо провести опыт или опереться на кем-то полученные знания.



А для выяснения значения истинности высказываний "*Треугольник АВС прямоугольный, или треугольник АВС не прямоугольный*" уже не нужно проводить опыты или искать знания. Вывод об истинности последнего высказывания содержится в самой его структуре.



Структура последнего высказывания выражается формулой $X \vee \neg X$.

Проблема разрешимости — проверить, является ли формула тавтологией легко решается при построении таблиц истинности.

Основное значение тавтологий состоит в том, что некоторые из них предоставляют правильные способы построения умозаключений, т.е. такие способы, которые от истинных посылок всегда приводят к истинным выводам.

3. *Противоречиями* – если на всех наборах в *I* функция Ф(*I*) принимает значение «ложь». Говорят, что функция опровергается в *I*.

Противоречия используются при доказательстве тавтологии.

Формулы $F(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ и $H(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ алгебры высказываний называются *равносильными*, если при любых значениях входящих в них переменных логические значения получающихся высказываний совпадают. Для указания равносильности формул используют обозначение $F \cong H$.

Например, равносильны формулы

$$\neg X_1 \cong \neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_1)$$

X_1	X_2	$\neg X_1$	$X_2 \vee \neg X_1$	$\neg X_1 \wedge (X_2 \vee \neg X_1)$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	0

Равносильности используются для упрощения формул, которое называется *равносильным преобразованием*.

Основные равносильности, используемые при преобразованиях:

1) $\neg\neg P \cong P$;
2) $P \to Q \cong \neg Q \to \neg P$;
3) $P \leftrightarrow Q \cong \neg P \leftrightarrow \neg Q$;
4) $P \to (Q \to R) \cong (P \wedge Q) \to R$;
5) $(P \to R) \wedge (Q \to R) \cong (P \vee Q) \to R$;
6) $P \wedge P \cong P$;
7) $P \vee P \cong P$;
8) $P \wedge Q \cong Q \wedge P$;
9) $P \vee Q \cong Q \vee P$;
10) $P \wedge (Q \wedge R) \cong (P \wedge Q) \wedge R$;
11) $P \vee (Q \vee R) \cong (P \vee Q) \vee R$;
12) $P \wedge (Q \vee R) \cong (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$;
13) $P \vee (Q \wedge R) \cong (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$;
14) $P \wedge (P \vee Q) \cong P$;
15) $P \vee (P \wedge Q) \cong P$;
16) $\neg(P \wedge Q) \cong \neg P \vee \neg Q$;
17) $\neg(P \vee Q) \cong \neg P \wedge \neg Q$;
18) $P \leftrightarrow Q \cong Q \leftrightarrow P$;
19) $P \to Q \cong \neg P \vee Q$;
20) $P \to Q \cong \neg P \wedge \neg Q$;
21) $P \wedge Q \cong \neg(P \to \neg Q)$;
22) $P \vee Q \cong \neg P \to Q$;
23) $P \leftrightarrow Q \cong (P \to Q) \wedge (Q \to P)$;
24) $P \vee \neg P \cong 1,\ \ P \wedge \neg P \cong 0$;
25) $P \vee 1 \cong 1,\ \ P \wedge 1 \cong P$;
26) $P \vee 0 \cong P,\ \ P \wedge 0 \cong 0$.

Нормальные формы высказываний

Для каждой формулы алгебры высказываний можно указать равносильную ей формулу, содержащую только отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Для этого нужно выразить все имеющиеся в формуле импликации и эквивалентности через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию.

Например, для формулы $(\neg X \wedge (X \rightarrow Y))$ равносильной ей формулой, не содержащей импликации, будет, например, формула $\neg(\neg X \wedge (\neg X \vee Y)) \vee Y$.

Выразить формулу через отрицание, конъюнкцию и дизъюнкцию возможно многими способами:

1) $\neg\neg X \vee Y$

2) $X \vee Y$

3) $(X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Y)$

4) $(X \wedge \neg Y) \vee Y$

5) $(X \wedge \neg Y) \vee ((X \vee \neg X) \wedge Y)$

6) $(X \wedge \neg Y) \vee (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Y)$

Конъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется конъюнкция этих переменных или их отрицаний, т.е. может входить и переменная и её отрицание.

Например:

$$X_1 \wedge X_1,$$
$$X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3,$$
$$X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge \neg X_2 \wedge X_5,$$
$$X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_1 \wedge X_3 \wedge X_1.$$

Дизъюнктивным одночленом от переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называется дизъюнкция этих переменных или их отрицаний.

Например:

$$X_2 \vee X_2,$$
$$\neg X_1 \vee X_2 \vee X_3,$$
$$\neg X_2 \vee X_1 \vee \neg X_4 \vee X_1 \vee X_4,$$
$$X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3 \vee \neg X_1 \vee X_4 \vee X_2.$$

Дизъюнктивной нормальной формой называется дизъюнкция конъюнктивных одночленов, т.е. выражение вида $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_p$, где все K_i, $i=1,2,\ldots,p$, являются конъюнктивными одночленами (не обязательно различными).

ДНФ:

$$X_1 \vee X_2,$$
$$(X_1 \wedge X_2) \vee \neg X_1,$$
$$(X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_4 \wedge X_5 \wedge X_6) \vee (X_3 \wedge X_4) \vee X_2.$$

не ДНФ:

$$\neg(X_1 \vee X_2),$$
$$X_1 \vee (X_2 \wedge (X_3 \vee \neg X_3)).$$

Конъюнктивной нормальной формой называется конъюнкция дизъюнктивных одночленов $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_q$, где все D_j, $j=1,2,\ldots,q$, являются дизъюнктивными одночленами (не обязательно различными).

КНФ:

$$X_1 \wedge X_2,$$
$$\neg X_1 \wedge (X_2 \vee X_3),$$
$$(X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_3 \vee X_4 \vee X_5) \wedge \neg X_1.$$

не КНФ:

$$\neg(X_1 \wedge X_2),$$
$$(X_1 \wedge X_2) \vee X_3,$$
$$X_1 \wedge (X_2 \vee (X_3 \wedge X_4)).$$

Всякая формула обладает как дизъюнктивной, так и конъюнктивной нормальными формами. Переход к нормальной форме осуществляется через равносильные преобразования.

Алгоритм построения ДНФ

1) Избавиться от всех логических операций, кроме конъюнкций, дизъюнкций, отрицания. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$$X_1 \rightarrow X_2 \cong \neg X_1 \vee X_2 \,,$$

$$X_1 \leftrightarrow X_2 \cong (X_1 \wedge X_2) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2).$$

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании формул:

$$\neg (X_1 \vee X_2) \cong \neg X_1 \wedge \neg X_2 \,,$$

$$\neg (X_1 \wedge X_2) \cong \neg X_1 \vee \neg X_2.$$

3) Избавиться от знаков двойного отрицания $\neg \neg X_1 \cong X_1$.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения:

$$X_1 \vee (X_2 \wedge X_3) \cong (X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee X_3) \,,$$

$$X_1 \wedge (X_2 \vee X_3) \cong (X_1 \wedge X_2) \vee (X_1 \wedge X_3) \,,$$

$$X_1 \vee (X_1 \wedge X_2) \cong X_1,$$

$$X_1 \wedge (X_1 \vee X_2) \cong X_1.$$

Алгоритм построения КНФ

1) Избавиться от всех логических операций, кроме конъюнкций, дизъюнкций, отрицания. Это можно сделать, используя равносильные формулы:

$$X_1 \to X_2 \cong \neg X_1 \vee X_2 \ ,$$

$$X_1 \leftrightarrow X_2 \cong (\neg X_1 \vee X_2) \wedge (X_1 \vee \neg X_2).$$

2) Заменить знак отрицания, относящийся ко всему выражению, знаками отрицания, относящимися к отдельным переменным высказываниям на основании формул.

3) Избавиться от знаков двойного отрицания $\neg\neg X_1 \cong X_1$.

4) Применить, если нужно, к операциям конъюнкции и дизъюнкции свойства дистрибутивности и формулы поглощения.

Пример: $(X_1 \to X_2) \wedge ((\neg X_2 \to X_3) \to \neg X_1$

Избавимся от импликаций: $(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg(\neg X_2 \to X_3) \vee \neg X_1)$

$(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg(\neg\neg X_2 \vee X_3) \vee \neg X_1)$

Сократим количество отрицаний: $(\neg X_1 \vee X_2) \wedge ((\neg X_2 \vee \neg X_3) \vee \neg X_1)$

Применим закон дистрибутивности: $(\neg X_1 \vee X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_3)$

СДНФ

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) – это ДНФ, которая удовлетворяет трём условиям:

– в ней нет одинаковых элементарных конъюнкций;

– в каждой конъюнкции нет одинаковых переменных;

– каждая элементарная конъюнкция содержит каждую переменную или её отрицание, причём в одинаковом порядке.

$$F(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3).$$

Построение СДНФ возможно по таблице истинности.

1 В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 1.

2 Для каждого отмеченного набора записываем конъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 1, то в конъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

3 Все полученные конъюнкции связываем операциями дизъюнкции.

1

X_1	X_2	X_3	$F(X_1, X_2, X_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	0
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

2

X_1	X_2	X_3	$F(X_1, X_2, X_3)$	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	**1**	**1**	**1**	$(\neg X1 \wedge X2 \wedge X3)$
1	0	0	0	
1	**0**	**1**	**1**	$(X1 \wedge \neg X2 \wedge X3)$
1	**1**	**0**	**1**	$(X1 \wedge X2 \wedge \neg X3)$
1	**1**	**1**	**1**	$(X1 \wedge X2 \wedge X3)$

3

$$(\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3).$$

СКНФ

Совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) – это КНФ, которая удовлетворяет трём условиям:

– в ней нет одинаковых элементарных дизъюнкций;

– в каждой дизъюнкции нет одинаковых переменных;

– каждая элементарная дизъюнкция содержит каждую переменную или её отрицание, причём в одинаковом порядке.

$$F(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \lor \neg X_2 \lor X_3) \land (X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3).$$

Построение СКНФ возможно по таблице истинности.

1 В таблице истинности отмечаем те наборы переменных, на которых значение функции равно 0.

2 Для каждого отмеченного набора записываем дизъюнкцию всех переменных по следующему правилу: если значение некоторой переменной есть 0, то в дизъюнкцию включаем саму переменную, иначе ее отрицание.

3 Все полученные дизъюнкции связываем операциями конъюнкции.

1

X_1	X_2	X_3	F(X1, X2, X3)
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	1	1	1
1	**0**	**0**	**0**
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

2

X_1	X_2	X_3	F(X1, X2, X3)	
0	**0**	**0**	**0**	$(X_1 \lor X_2 \lor X_3)$
0	**0**	**1**	**0**	$(X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3)$
0	**1**	**0**	**0**	$(X_1 \lor \neg X_2 \lor X_3)$
0	1	1	1	
1	**0**	**0**	**0**	$(\neg X_1 \lor X_2 \lor X_3)$
1	0	1	1	
1	1	0	1	
1	1	1	1	

3

$$(X_1 \lor X_2 \lor X_3) \land (X_1 \lor X_2 \lor \neg X_3) \land (X_1 \lor \neg X_2 \lor X_3) \land (\neg X_1 \lor X_2 \lor X_3).$$