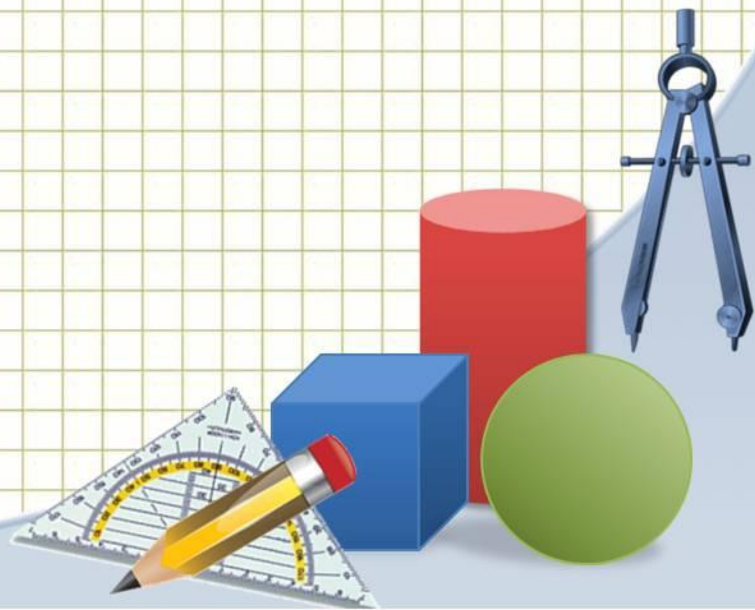
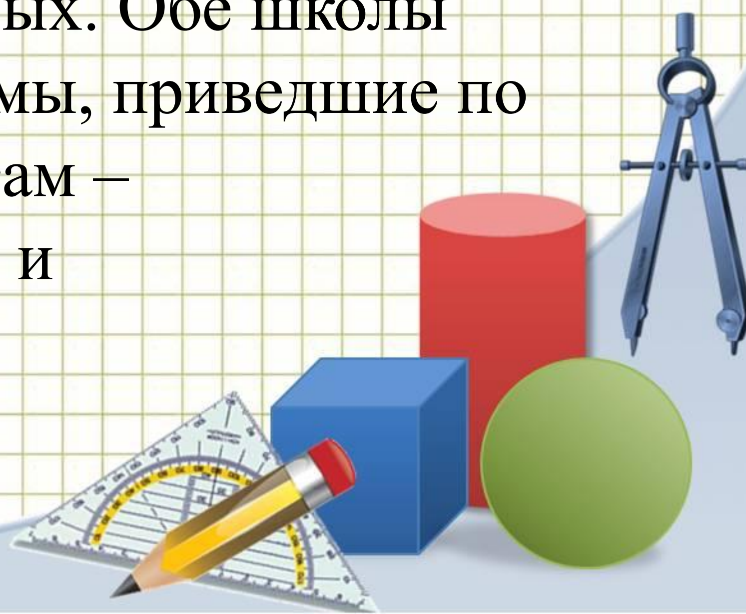
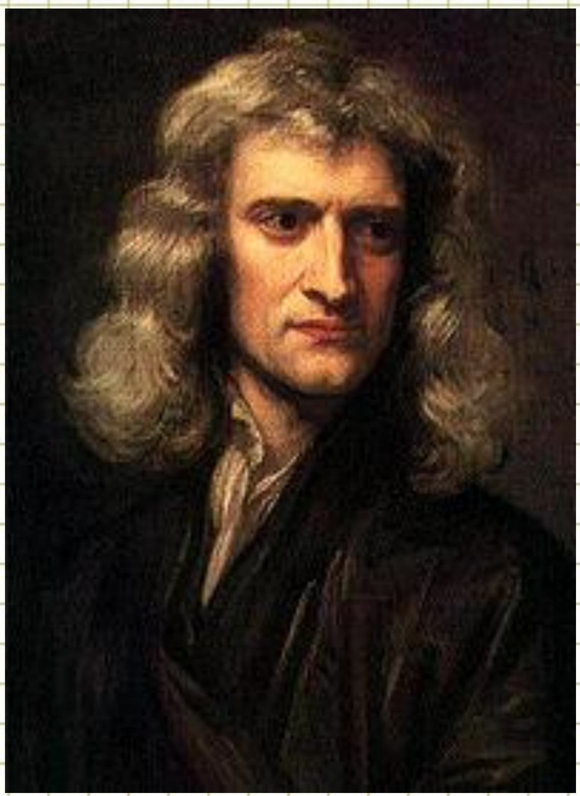
Производная



Происхождение производной.

В конце 17 века в Европе образовались две крупные математические школы. Главой одной из них был Готфрид Вильгельм фон **Лейбниц**. Его ученики и сотрудники – Лопиталь, братья Бернулли, Эйлер жили и творили на континенте. Вторая школа, возглавляемая Исааком **Ньютоном**, состояла из английских и шотландских ученых. Обе школы создали новые мощные алгоритмы, приведшие по сути к одним и тем же результатам –
к созданию дифференциального и интегрального исчисления.





Готфрид Вильгельм Лейбниц

(1646 – 1716)

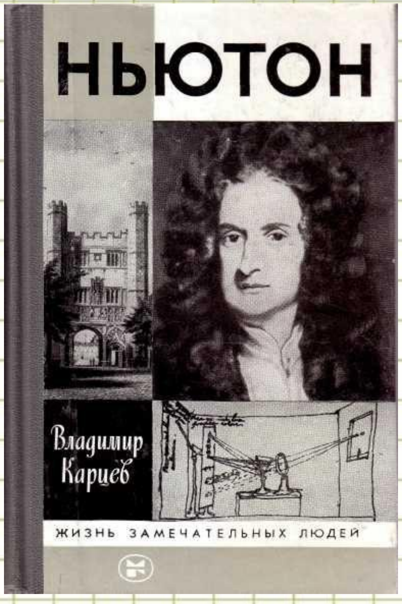
Исаак Ньютон (1643 – 1727)

Происхождение производной.

Ряд задач дифференциального исчисления был решен еще в древности. Такие задачи можно найти у Евклида и у Архимеда, однако основное понятие – понятие производной функции – возникло только в17 веке в связи с необходимостью решить ряд задач из физики, механики и математики, в первую очередь следующих двух: определение скорости прямолинейного неравномерного движения и построения касательной к произвольной плоской кривой.

Первую задачу: о связи скорости и пути прямолинейно и неравномерно движущейся точки впервые решил **Ньютон**. Он пришел к формуле :

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$



Памятник Ньютону в Кэмбридже.

Ньютон пришел к понятию производной, исходя из вопросов механики. Свои результаты в этой области он изложил в трактате «Метод флюксий и бесконечных рядов». Написана работа была в 60-е годы 17 века, однако опубликована после смерти Ньютона. Ньютон не заботился о том, чтобы своевременно знакомить математическую общественность со своими работами.

Флюксией называлась производная функции – флюэнты.

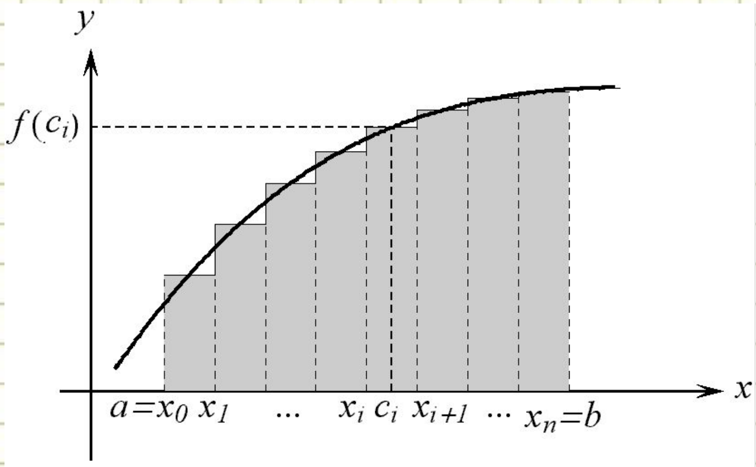
Флюэнтой таже в дальнейшем называлась первообразная функция.

В подходе **Лейбница** к математическому анализу были некоторые особенности. Лейбниц мыслил высший анализ не кинематически, как Ньютон, а алгебраически. Он шел к своему открытию от анализа бесконечно малых величин и теории бесконечных рядов.

В 1675 году **Лейбниц** завершает свой вариант математического анализа, тщательно продумывает его символику и терминологию, отражающую существо дела. Почти все его нововведения укоренились в науке и только термин «интеграл» ввёл Якоб Бернулли (1690), сам Лейбниц вначале называл его просто суммой.

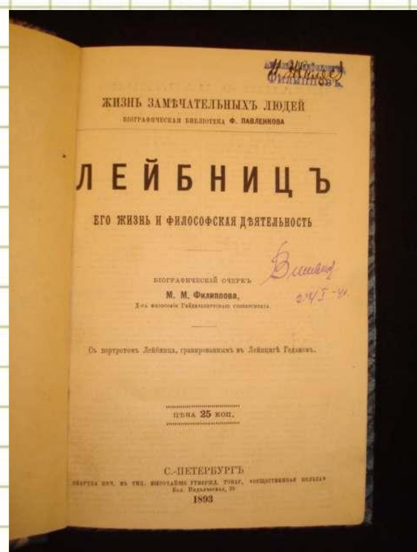
Памятник Лейбницу в Лейпциге.

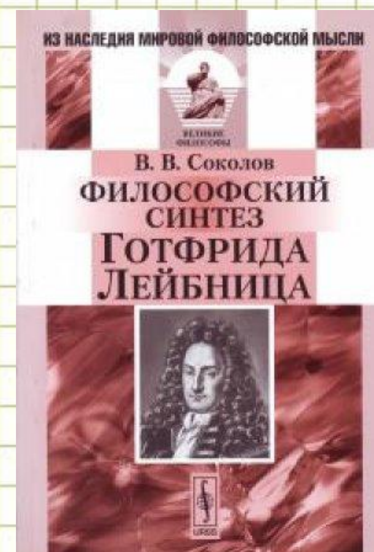
По мере развития анализа выяснилось, что символика **Лейбница**, в отличие от ньютоновской, отлично подходит для обозначения многократного дифференцирования, частных производных и т. д. На пользу школе Лейбница шла и его открытость, массовая популяризация новых идей, что Ньютон делал крайне неохотно.



Работы **Лейбница** по математике многочисленны и разнообразны.

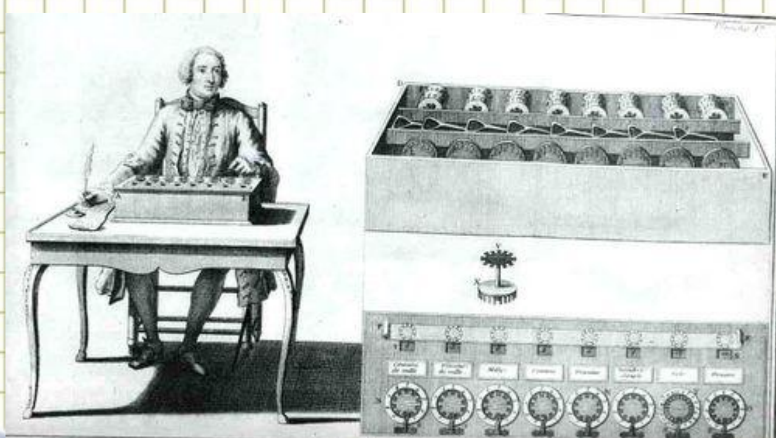
В 1666 году он написал первое сочинение: «О комбинаторном искусстве».





В1672 году **Лейбниц** изобретает собственную конструкцию арифмометра, гораздо лучше паскалевской — он умел выполнять умножение, деление и извлечение корней. Предложенные им ступенчатый валик и подвижная каретка легли в основу всех последующих арифмометров.

Лейбниц также описал двоичную систему счисления с цифрами 0 и 1, на которой основана современная компьютерная техника.



Производной функции $y = f(x)$, заданной на некотором интервале $(a;b)$, в некоторой точке **x** этого интервала называют **предел** отношения приращения функции в этой точке к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Нахождение производной называют *дифференцированием*

$$(kx+b)'=k$$

$$(C)'=0$$

$$(x^2)'=2x$$

$$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$(x^n)'=nx^{n-1}$$

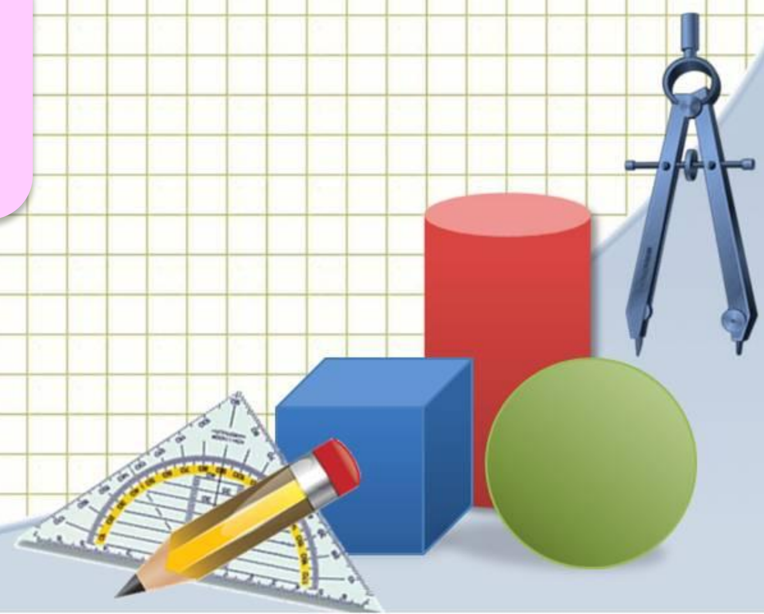


Таблица производных

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$
$kx + b$	k	e^x	e^x
x^2	$2x$	a^x	$a^x \ln a$
x^n	nx^{n-1}	$tg\, x$	$1/\cos^2 x$
$1/x$	$-1/x^2$	$ctg\, x$	$-1/\sin^2 x$
$\sin x$	$\cos x$	$\ln x$	$1/x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$

Правила нахождения производной

1. Если функции u(x) и v(x) имеют в точке x производные, то их сумма u(x) + v(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(u + v)' = u' + v'$$

2. Если функция u(x) имеет в точке x производную и C – данное число, то функция C·u(x) также имеет в этой точке производную, причем

$$(Cu)' = C\cdot u'$$

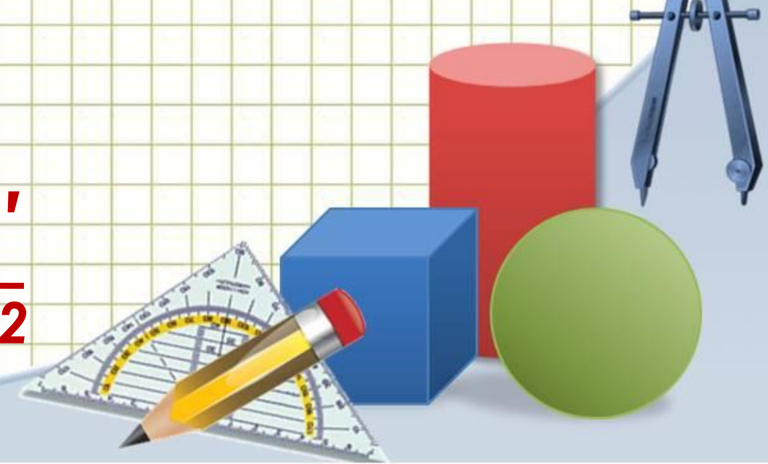
Правила нахождения производной

3. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные, то их произведение $u(x) \cdot v(x)$ также имеет в этой точке производную, причем

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

4. Если функция $v(x)$ имеет в точке x производную и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{1}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$



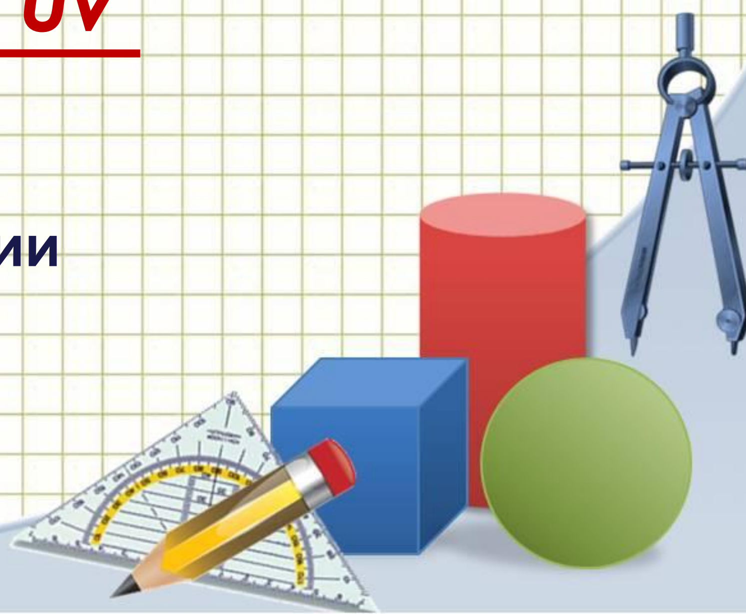
Правила нахождения производной

5. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют в точке x производные и $v(x) \neq 0$, то функция $\frac{u(x)}{v(x)}$ также имеет в этой точке производную, причем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

6.Производная сложной функции

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$



Примеры

$$1)\ g(x) = x^2 - 3x + 4$$

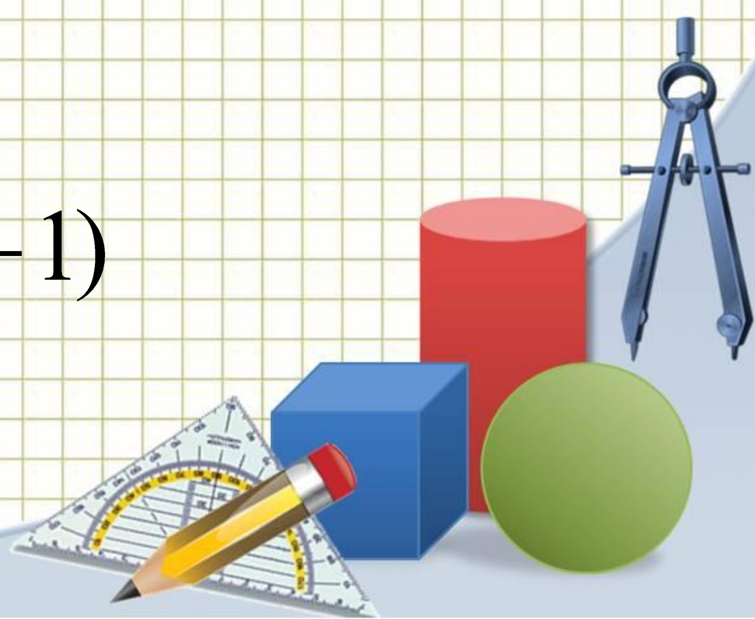
Ответ: $g'(x) = 2x - 3$

$$2)\ f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 2x^2 + \pi$$

Ответ: $f'(x) = 12x^3 - 21x^2 + 4x$

$$3)\ h(x) = (2x+1)^2$$

Ответ: $h'(x) = 4(2x+1)$



Примеры

$4)\ y = \sin 2x$

$Ответ:\quad y' = 2\cos 2x$

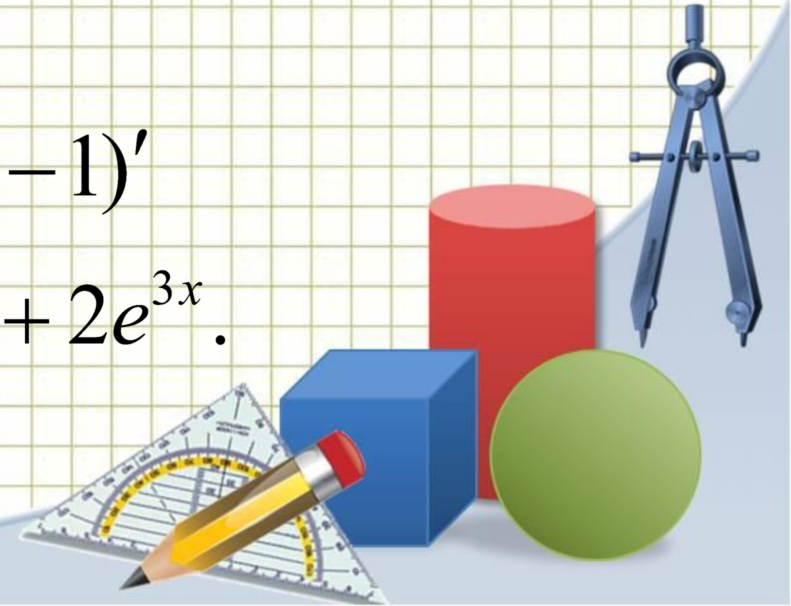
$5)\, y = 3x^2 + \cos x.$

$Ответ:\quad y' = 6x - \sin x$

$6)\, y = e^{3x}(2x-1).$

$$y' = (e^{3x})'(2x-1) + e^{3x}(2x-1)'$$

$Ответ:\quad y' = 3e^{3x}(2x-1) + 2e^{3x}.$



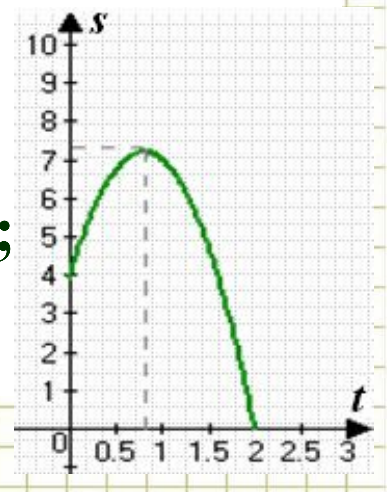
ЗАДАЧА №1

Тело, подброшенное вверх движется по закону

$s(t) = 4 + 8t - 5t^2$. Найдите:

1) Скорость тела в начальный момент времени;

2) Наибольшую высоту подъёма тела.



РЕШЕНИЕ.

1) $v(t) = s`(t) = 8 - 10t$ - скорость тела;

$$v(t) = S'(t)$$

2) $t = 0$, $v(0) = s`(0) = 8$ м/с – скорость тела в начальный момент времени

подсказка

3) $s(0{,}8) = 4 + 8 \cdot 0{,}8 - 5 \cdot 0{,}64 = 7{,}2$ м – максимальная высота броска тела.

Ответ: 8 м/с ; 7,2 м .

ЗАДАЧА №2

При каких значениях x значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ равно 0

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \qquad f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 2 \cdot 3x^{2-1} - 12$$

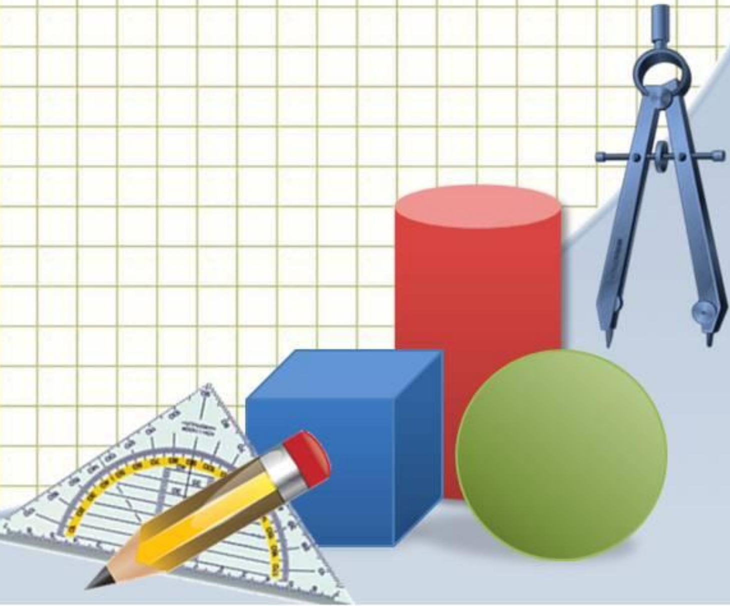
$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 \qquad f'(x) = 0$$

$$6x^2 - 6x - 12 = 0 (:6) \qquad x^2 - x - 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 1 + 8 = 9; \sqrt{D} = 3$$

$$x_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \qquad x_2 = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$Ответ: x_1 = 2, x_2 = -1$$



“При изучении наук примеры не менее поучительны, нежели правила”

И. Ньютон

“Примеры учат больше, чем теория”.

М. Ломоносов

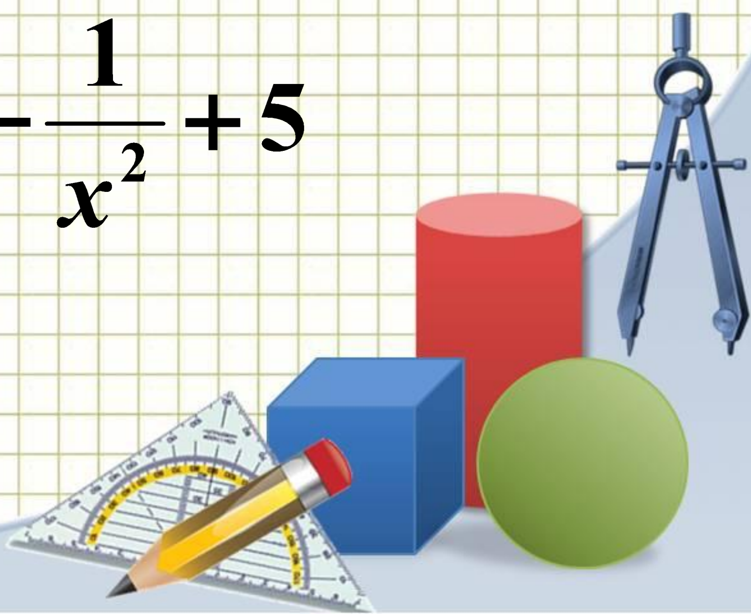
Примеры

$$a)\ f(x) = x^2 + x^3$$

$$f'(x) = (x^2)' + (x^3)' = 2x + 3x^2$$

$$б)\ f(x) = \frac{1}{x} + 5x - 2$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' + (5x)' - 2' = -\frac{1}{x^2} + 5$$



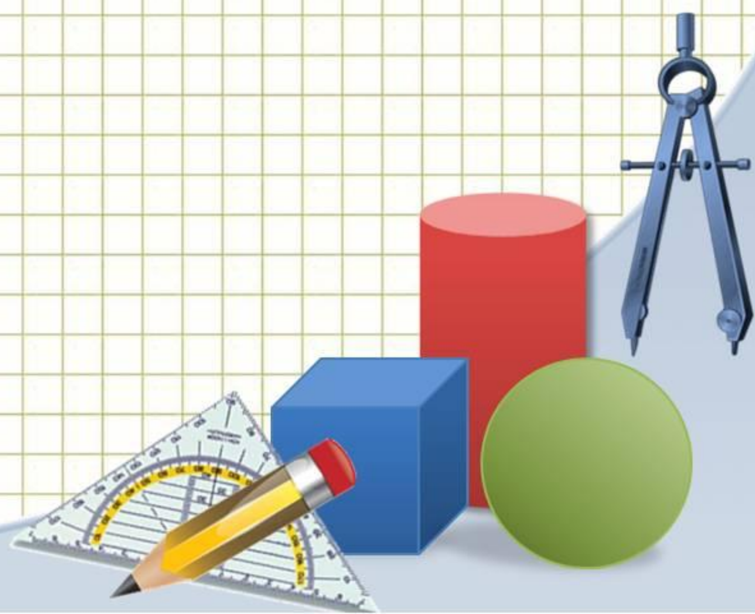
$$в)\ f(x) = x^2 + 3x - 1$$

$$f'(x) = 2x + 3$$

$$г)\ f(x) = x^3 + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Производная
и ее применение



Найдите производную функции(устно):

а) $y = 6x^5 - 7x^3 + 2x^2 - 5$,

Правильный ответ

б) $y = (4 - 5x)^7$,

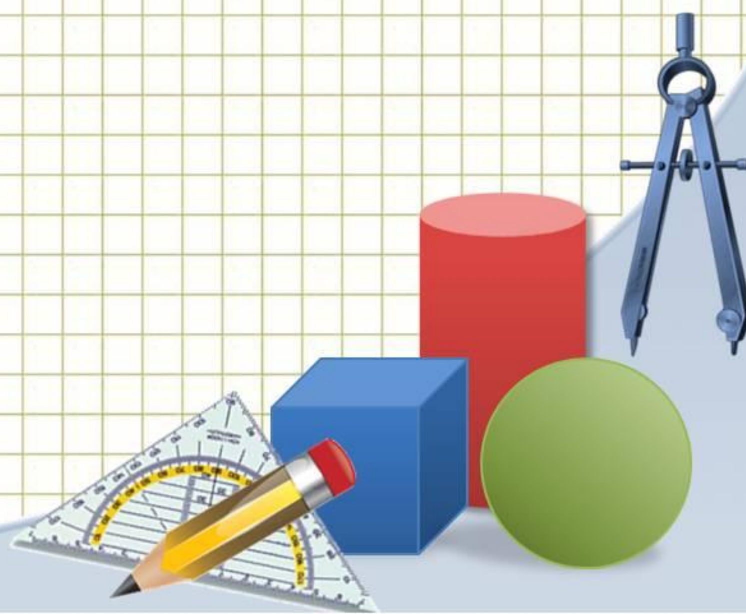
Правильный ответ

в) $y = 8 + 3\cos x$,

Правильный ответ

г) $y = 4\sin x - 6\ln x$,

Правильный ответ



Найдите производную функции(устно):

д) $y = 7x^3 - 5e^{4x+1}$,

Правильный ответ

е) $f(x)=2x^2+\sin x$,

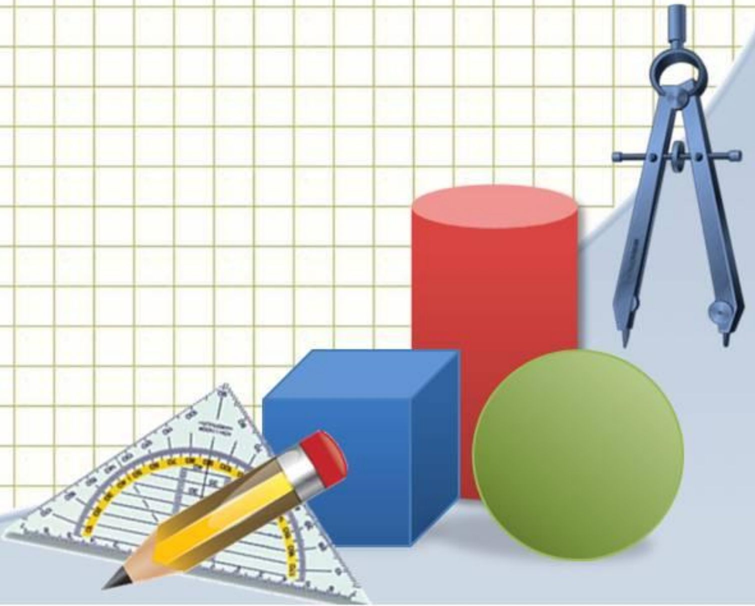
Правильный ответ

ж) $f(x)=2x^2 + \operatorname{tg} x$,

Правильный ответ

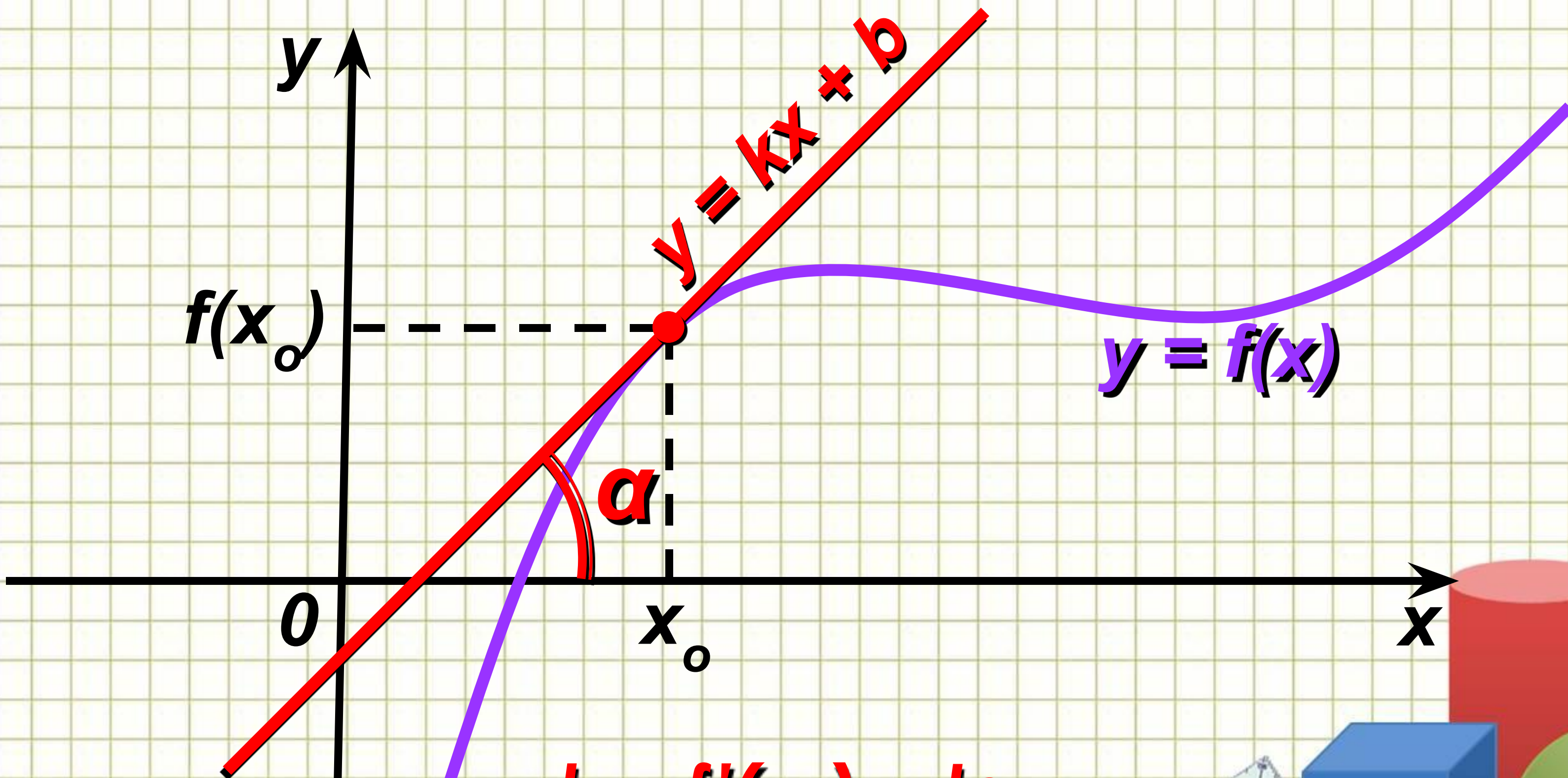
з) $f(x)=4x^5 - \cos 3x$,

Правильный ответ



Касательная

к графику дифференцируемой в точке x_0 функции f – это прямая, проходящая через точку $(x_o; f(x_o))$ и имеющая угловой коэффициент $f'(x_o)$.



$k = f'(x_o) = tg\ \alpha$ –

это угловой коэффициент касательной.

Общий вид уравнения касательн

$$y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$$

Алгоритм составления уравнения касатель

1° Находим значение функции в точке x_o: $f(x_o)$.

2° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

3° Находим значение производной в точке x_o: $f'(x_o)$.

4° Подставляем эти данные в общее уравнения касательной: $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$.

• ***Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков её возрастания и убывания.***

<u>Признак возрастания функции:</u>

Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на I.

<u>Признак убывания функции:</u>

Если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на I.

Алгоритм решения неравенств методом интервалов:

Выделить функцию $y=f(x)$.

1. **Найти область определения функции $D(f)$. Указать промежутки непрерывности.**
2. **Найти нули функции, решив уравнение $f(x)=0$.**
3. **Определить знак функции между**

   её нулями в области определения.

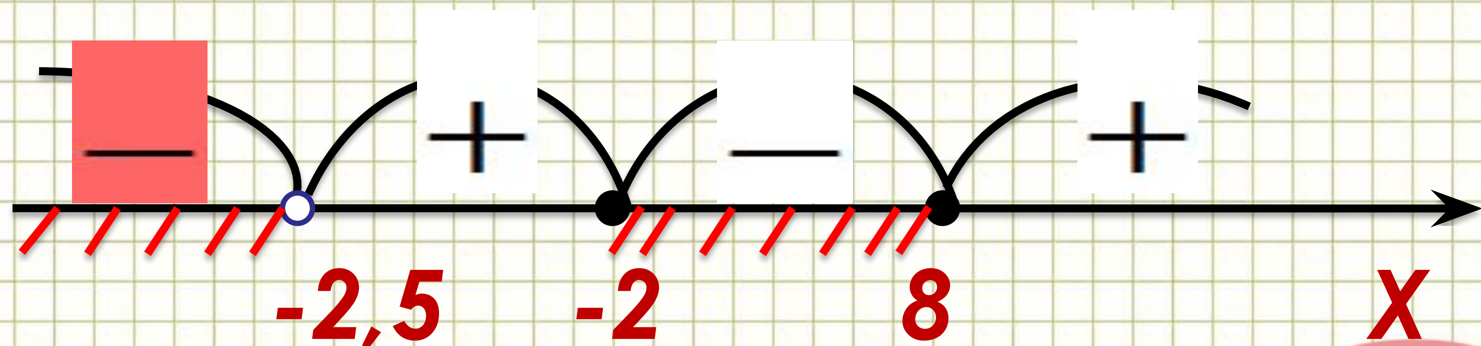
Решите неравенство: $$\frac{x^2-6x-16}{2x+5} \le 0$$

1. $f(x)=\frac{x^2-6x-16}{2x+5}=0$ $\qquad$ $2x+5\neq 0$, $x\neq -2{,}5$

2. $f(x)=0$, *если* $x^2-6x-16=0$

$x_1=8$, $x_2=-2$

3.

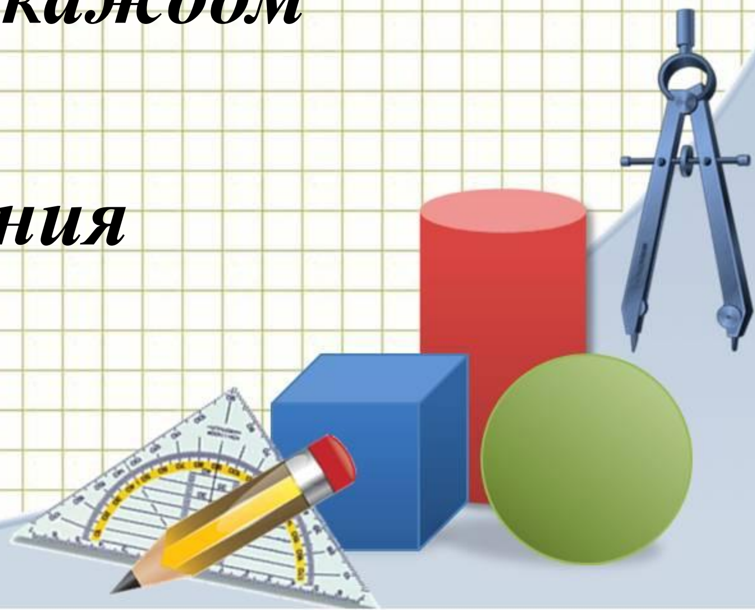


$$f(10)=\frac{(10)^2-6\cdot 10-16}{2\cdot 10+5}=\text{" + "}$$

Ответ: $x\in(-\infty;-2{,}5)\cup[-2;8]$

Алгоритм нахождения промежутков возрастания (убывания) функции y=f(x):

1. Найти производную функции f′(x).
2. Решить уравнение f′ (x) =0.
3. Найти знак производной на каждом интервале.
4. Согласно признаку возрастания (убывания) функции, найти промежутки возрастания и убывания.



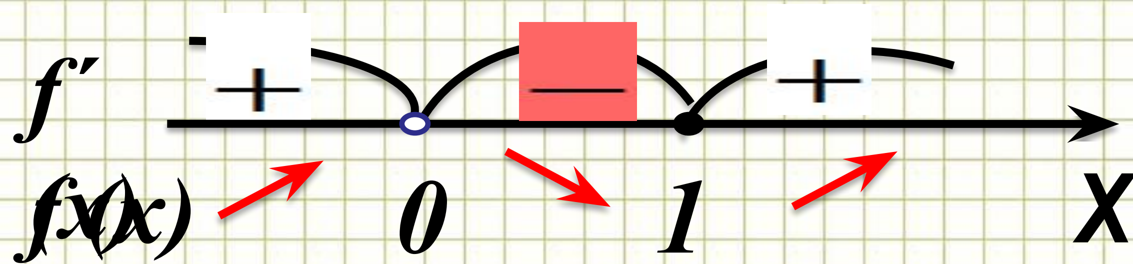
Найдите промежутки возрастания функции:

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$$

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$ $f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$

2. $f'(x)=0$, если $2 - \frac{2}{x^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$

3.



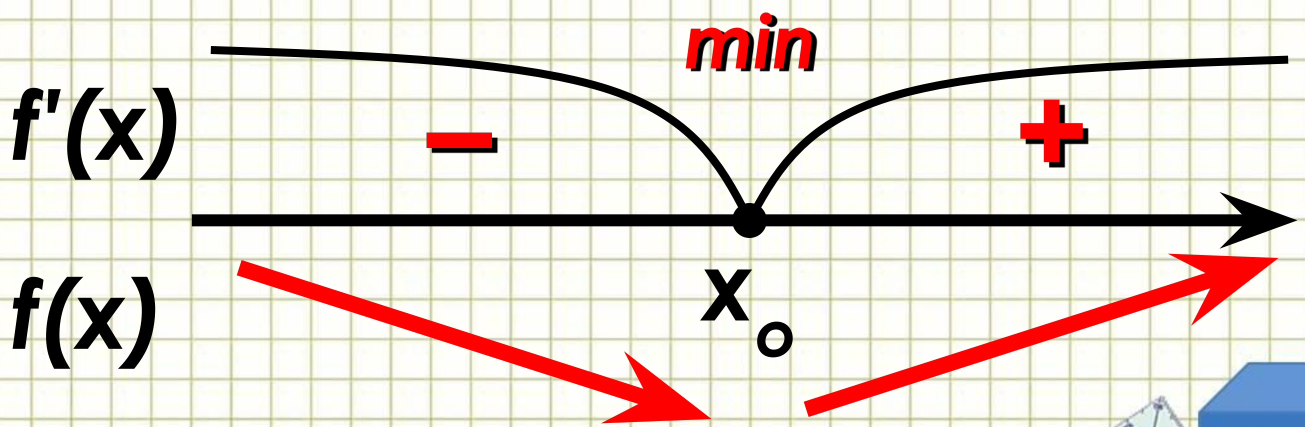
Ответ: $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 0)$ и $[1; +\infty)$

$f(x)$ убывает на $(0; 1]$

Минимум функции

Точка x_o называется **точкой минимума** функции f(x), если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_o)$.

Если в точке x_o производная функции f(x) меняет знак с «–» на «+», то x_o – **точка локального минимума** функции f(x).

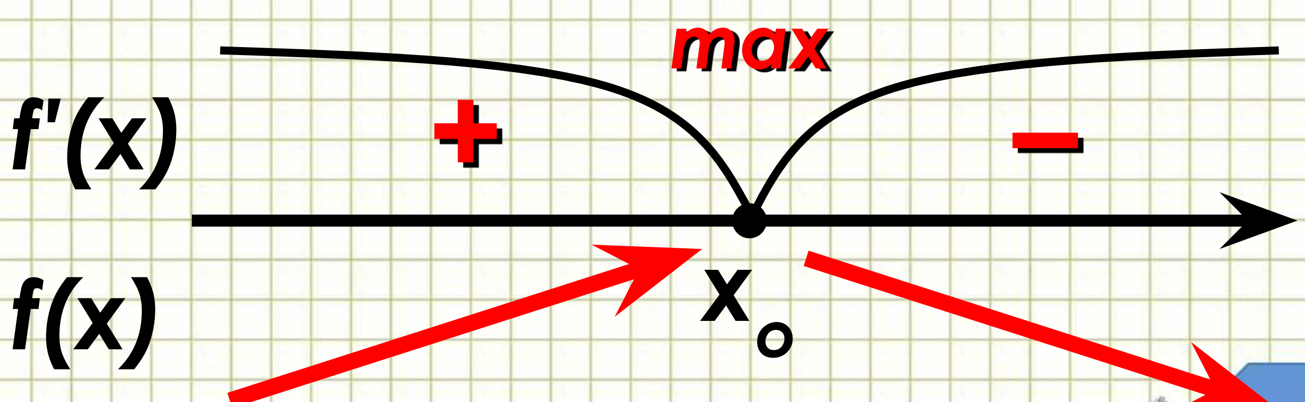


$f(x_o)$ – минимум функции

Максимум функции

Точка x_o называется **точкой максимума** функции f(x), если существует такая окрестность точки x_o, что для всех $x \neq x_o$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_o)$.

Если в точке x_o производная функции f(x) меняет знак с «+» на «–», то x_o – **точка локального максимума** функции f(x).



$f(x_o)$ – максимум функции

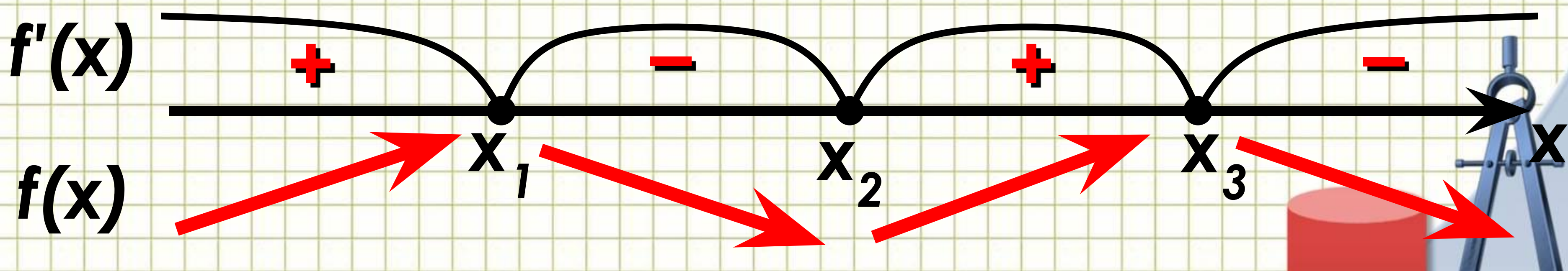
Алгоритм исследования функции на монотонность

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) Промежутки возрастания: $(-\infty;\ x_1]$; $[x_2;\ x_3]$.

б) Промежутки убывания: $[x_1;\ x_2]$; $[x_3;\ +\infty)$.

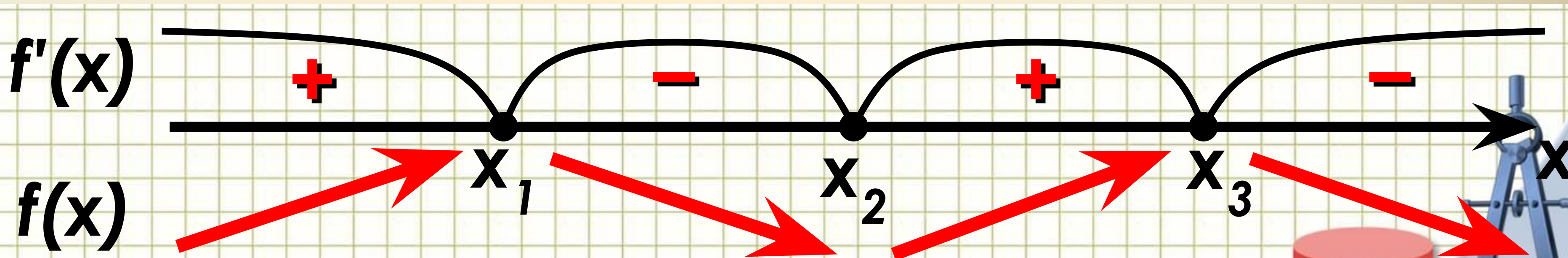
Алгоритм исследования функции на экстремум

1° Дифференцируем функцию: $f'(x)$.

2° Находим критические точки из уравнения: $f'(x) = 0$.

3° Решаем неравенства: $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$.

4° Полученные данные изображаем на схеме:



5° а) x_1; x_3 – точки максимума; x_2 – точка минимума.

б) $f(x_1)$; $f(x_3)$ – максимумы функции;

$f(x_2)$ – минимум функции.

Примеры

Пример 1. Найти точку максимума функции $y = x^3 + 3x^2 - 24x + 5$

Решение: Требуется найти критическую точку, в которой знак производной меняется с плюса на минус.

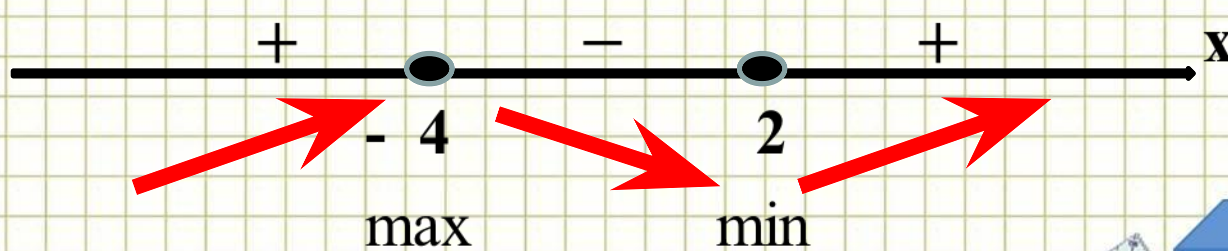
Область определения функции: [illegible]

Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 6x - 24 = 0$

$x^2 + 2x - 8 = 0$, $D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36$,

$x_1 = (-2 + 6) / 2 = 2$, $x_2 = (-2 - 6) / 2 = -4$, -Критические точки.

Исследуем знак производной на интервалах, разделенных критическими точками:



Ответ: $x = -4$.

Пример 2. Найдите точки экстремума функции и определите их характер.

$y = x^4 - 8x^2$.

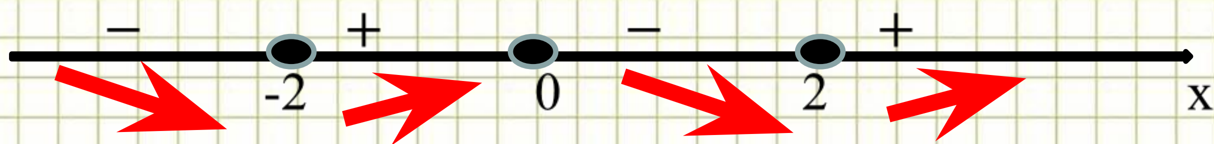
Решение: $y = x^4 - 8x^2$, $D(y) = R$, $y' = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x$, $y' = 0$,

$4x^3 - 16x = 0$, $4x \cdot (x^2 - 4) = 0$, $4x \cdot (x - 2) \cdot (x + 2) = 0$,

$x_1 = 0$ или $x - 2 = 0$ или $x + 2 = 0$

$x_2 = 2$ $\quad$ $x_3 = -2$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$ – это стационарные точки.



Функция убывает на $(-\infty; -2]$, на $[0; 2]$.

Функция возрастает на $[-2; 0]$, на $[2; +\infty)$.

$x_3 = -2$, $x_2 = 2$ – это точки минимума. $x_1 = 0$ – это точка максимума.

Ответ: $x_3 = -2$, $x_2 = 2$– это точки минимума,

$x_1 = 0$ – это точка максимума.

Пример 3. Найдите точки экстремума функции и определите их характер.

$y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$.

Решение: $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$, $D(y) = R$,

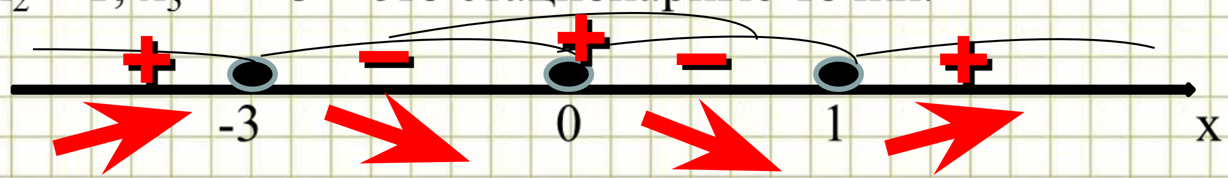
$y' = (2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3)' = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 10x^2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 3)$, $y' = 0$,

$10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0$, $10x^2 \cdot (x^2 + 2x - 3) = 0$,

$x^2 = 0$ или $x^2 + 2x - 3 = 0$,

$x_1 = 0$ $x_2 = 1$, $x_3 = -3$.

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -3$ – это стационарные точки.



Функция возрастает на $(-\infty; -3]$, на $[1; +\infty)$.

Функция убывает на $[-3; 1]$.

$x_3 = -3$ – это точка максимума. $x_2 = 1$ – это точка минимума.

Ответ: $x_3 = -3$ – это точка максимума,

$x_2 = 1$ – это точка минимума.

Спасибо за внимание!