ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

$$F(x, y, y', y'') = 0 \qquad y'' = f(x, y, y')$$

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, x_0, y_0, y'_0 - const$$

$$y = \varphi(x) \qquad y = \varphi(x, C_1, C_2):$$

$$C_1^0 \quad C_2^0 \qquad y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$$

ПОНИЖЕНИЕ ПОРЯДКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. $y'' = f(x)$

$$y' = \int f(x)dx = F(x) + C_1$$

$$y = \int (F(x) + C_1)dx + C_2$$

2. $F(x, y', y'') = 0$

$$y' = p \quad y'' = p'$$

$$\begin{cases} y' = p \\ F(y, p, p') = 0 \end{cases}$$

3. $F(y, y', y'') = 0$

$$y' = p = p(y)$$

$$y'' = (p(y))' = p'(y) \cdot y'(x) = p' \cdot p$$

$$\begin{cases} y' = p \\ F(y, p, p \cdot p') = 0 \end{cases}$$

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^k \cdot F(x, y, y', y'')$$

Примеры: Решить уравнения:

1) $$y'' = \frac{1}{1+x^2} + x - \sin x$$

$$y' = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + x - \sin x \right) dx$$

$$y' = arctgx + \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1$$

$$y = \int \left(arctgx + \frac{x^2}{2} + \cos x + C_1 \right) dx$$

$$y = x\,arctg\,x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{x^3}{6} + \sin x + C_1 x + C_2$$

$$2)\; y'' = (e^{2x} + \sin 3x)x, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = 1.$$

$$y' = \int (e^{2x} + \sin 3x)x\,dx$$

$$\begin{bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = (e^{2x} + \sin 3x)dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x \end{bmatrix}$$

$$y' = x\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{9}\sin 3x + C_1$$

$$y = \int\left(x\left(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{3}\cos 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{9}\sin 3x + C_1\right)dx$$

$$y = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + C_1 x + C_2$$

$$\begin{cases} 1 = -\dfrac{1}{4} + C_1 \\ 1 = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{2}{27} + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{5}{4} \\ C_2 = \dfrac{143}{108} \end{cases}$$

$$y_ч = x\left(\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{9}\sin 3x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{2}{27}\cos 3x + \frac{5}{4}x + \frac{143}{108}$$

3) $\quad y'' - y'ctgx = 2x\sin x,$

$$y = 1,\ y' = 0\ npu\ x = \frac{\pi}{4}.$$

$$y' = p,\ y'' = p'$$

$$p' - pctgx = 2x\sin x,$$

$$p = u \cdot v,\ p' = u'v + v'u$$

$$u'v + v'u - uv\,ctgx = 2x\sin x$$

$$u'v + u(v' - v\,ctgx) = 2x\sin x$$

$$v' - v\,ctgx = 0$$

$$\int \frac{dv}{v} - \int ctgxdx = 0$$

$$\ln|v| = \ln|\sin x| \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$u'\sin x + = 2x\sin x$$

$$u' = 2x \quad \Rightarrow u = x^2 + C_1$$

$$p = u \cdot v = (x^2 + C_1)\sin x$$

$$y' = (x^2 + C_1)\sin x$$

$$y = \int (x^2 + C_1)\sin x dx$$

$$y = -(x^2 + C_1)\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C_2$$

$$C_1 = -\frac{\pi^2}{16}, \qquad C_2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$$

4) $\quad y''tgy = 2(y')^2,\ y(1) = \dfrac{\pi}{4},\ y'(1) = -2$

$$y' = p = p(y) \qquad y'' = p' \cdot p$$

$$p' \cdot p\, tgy = 2p^2 \qquad p'\, tgy = 2p$$

$$\int \frac{dp}{p} = 2\int \frac{\cos y}{\sin y} dy$$

$$p = C_1 \sin^2 y \quad \Rightarrow y' = C_1 \sin^2 y$$

$$\int \frac{dy}{\sin^2 y} = \int C_1 dx$$

$$-ctg\, y = C_1 x + C_2 \qquad y' = C_1 \sin^2 y$$

$$-2 = C_1 \sin^2 \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad C_1 = -4$$

$$-ctg \frac{\pi}{4} = -4 + C_2 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 3$$

$$y_o = arctg(-C_1 x - C_2)$$

$$y_ч = arctg(4x - 3)$$

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$p(x), q(x) - const \quad y'' + py' + qy = f(x)$$

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (1)$$

$$y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

$$k^2 + pk + q = 0$$

(в уравнении (1) заменить $y^{//}$, $y^{/}$ и y на k^2, k и k^0)

Теорема:

Пусть k_1 и k_2 – корни характеристического уравнения. Тогда общее решение уравнения (1) находится по формуле:

1. $к_1 \neq к_2$, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$$

2. $к_1 = к_2$, общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$y_{oo} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$$

3. $к_1$ и $к_2$ – комплексно– сопряженные корни, $к_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. В этом случае общее решение уравнения (3) имеет вид:

$$y_{oo} = e^{\alpha x}(C_1 \cdot Cos\beta x + C_2 \cdot Sin\beta x)$$

Примеры: Найти общее решение уравнения:

1) $2y'' - 3y' + y = 0$

$$2k^2 - 3k + 1 = 0$$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{1}{2}x}$$

2) $4y'' + 4y' + y = 0$

$$4k^2 + 4k + 1 = 0$$

$$k_1 = k_2 = -\frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \quad y_{oo} = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

3) $2y'' + y' + 3y = 0$

$$2k^2 + k + 3 = 0$$

$$D = -23$$

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{23}i}{4} = -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{23}}{4} i$$

$$\alpha = -\frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

$$y_{oo} = e^{-\frac{1}{4}x}\left(C_1 \cdot Cos\frac{\sqrt{23}}{4}x + C_2 \cdot Sin\frac{\sqrt{23}}{4}x \right)$$

ЛИНЕЙНЫЕ НЕОДНОРОДНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ (ЛНДУ) ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

$$y'' + py' + qy = f(x) \quad (2)$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{ч}$$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad k^2 + pk + q = 0 \quad (3)$$

<u>1 случай.</u> $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

$P_n(x)$ – многочлен степени n

а) α - не корень уравнения (3), то

$$y_{ч} = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

$Q_n(x)$ – многочлен степени n *с неизвестными коэффициентами*

б) α - корень уравнения (3) кратности k, то

$$y_ч = x^k e^{\alpha x} Q_n(x)$$

$$Если\ \ f(x) = P_n(x), \quad то\ \alpha = 0, y_ч = Q_n(x)$$

(α - не корень уравнения (3))

$$y_ч = x^k Q_n(x)$$

(α - корень уравнения (3) кратности k)

2 случай.

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$$

$P_n(x)$, $Q_m(x)$ – многочлены степени *n и m*

$$N = \max(n, m)$$

а) $\alpha \pm \beta i$ - не корни уравнения (3), то

$$y_ч = e^{\alpha x}(P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\sin\beta x)$$

б) $\alpha \pm \beta i$ - корни уравнения (3) кратности k, то

$$y_ч = x^k e^{\alpha x}(P_N(x)\cos\beta x + Q_N(x)\sin\beta x)$$

$$Если\ \ f(x) = a\cos\beta x + b\sin\beta x,$$

$$т.е.\ \alpha = m = n = 0,$$

$$y_ч = A\cos\beta x + B\sin\beta x$$

(±βi - не корни уравнения (3))

$$y_ч = x(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$$

(±β*i* - корни уравнения (3))

Теорема. Если $y_{ч1}$ и $y_{ч2}$ – частные решений $y'' + py' + qy = f_1(x)$

$$и \quad y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то функция $y_ч = y_{ч1} + y_{ч2}$ – частное решение уравнения

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$$

Примеры: Найти общее решение уравнения:

1) $$y'' - 7y' = 5xe^{x}$$

$$k^2 - 7k = 0$$

$$k_1 = 0 \quad k_2 = 7 \quad \Rightarrow \quad y_{oo} = C_1 + C_2 e^{7x}$$

$$f(x) = e^{\alpha x} P_n(x) = 5xe^{x}$$

$$P_1(x) = 5x, \quad \alpha = 1$$

$$y_ч = e^{x} Q_1(x) = e^{x}(Ax + B)$$

$$y_ч^{/} = e^{x}(Ax + B) + Ae^{x} = e^{x}(Ax + B + A)$$

$$y_{ч}^{//} = e^x(Ax + B + A) + Ae^x =$$
$$= e^x(Ax + B + 2A)$$

$$e^x(Ax + 2A + B) - 7e^x(Ax + A + B) = 5xe^x$$

$$-6Ax - 5A - 6B = 5x$$

$$\begin{cases} -6A = 5 \\ -5A - 6B = 0 \end{cases}$$

$$A = -\frac{5}{6}, \quad B = \frac{25}{36} \Rightarrow y_{ч} = e^x\left(-\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right)$$

$$y_{он} = C_1 + C_2 e^{7x} + e^{x}\left(-\frac{5}{6}x + \frac{25}{36}\right)$$

2) $$y'' + 6y' + 9y = (x-2)e^{-3x}$$

$$k^2 + 6k + 9 = 0$$

$$k_{1,2} = -3$$

$$y_{oo} = (C_1 + C_2 x)e^{-3x}$$

$$f(x) = (x-2)e^{-3x} = e^{\alpha x} P_n(x)$$

$$P_1(x) = x - 2, \quad \alpha = -3$$

$$y_ч = x^2 e^{-3x} Q_1(x) = x^2 e^{-3x}(Ax + B)$$

$$y_ч^{/} = e^{-3x}(3Ax^2 + 2Bx - 3Ax^3 - 3Bx^2)$$

$$y_ч^{//} = e^{-3x}(9Ax^3 - 18Ax^2 + 9Bx^2 + 6Ax -$$

$$- 12Bx + 2B)$$

$$\begin{cases} 6A = 1 \\ 2B = -2 \end{cases} \Rightarrow \quad A = \frac{1}{6}, \quad B = -1$$

$$y_ч = x^2 e^{-3x}\left(\frac{1}{6}x - 2\right)$$

$$y_{он} = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + e^{-3x}x^2\left(\frac{1}{6}x - 2\right)$$

3) $y'' + 3y' + 2y = (2x+3)\sin x + \cos x$

$$k^2 + 3k + 2 = 0$$

$$k_1 = -1 \quad k_2 = -2$$

$$y_{oo} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$$f(x) = (2x+3)\sin x + \cos x$$

$$\alpha = 0,\ \beta = 1 \qquad Q_0(x) = 1 \quad P_1(x) = 2x+3$$

$$y_ч = P_N(x)\cos x + Q_N(x)\sin x$$

$$N = \max(1,0) = 1$$

$$y_ч = (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x$$

$$y_ч = (Ax + B)\sin x + (Cx + D)\cos x,$$
$$y'_ч = A\sin x + (Ax + B)\cos x + C\cos x - (Cx + D)\sin x,$$
$$y''_ч = 2A\cos x - (Ax + B)\sin x - 2C\sin x - (Cx + D)\cos x.$$

$$\begin{aligned}
x\sin x: &\quad 2A - 3C - A = 2,\\
\sin x: &\quad 2B + 3A - 3D - B - 2C = 3\\
x\cos x: &\quad 2C + 3A - C = 0,\\
\cos x: &\quad 2D + 3B + 3C + 2A - D = 1
\end{aligned}$$

$$A = \frac{1}{5}, \quad B = \frac{21}{25}, \quad C = -\frac{3}{5}, \quad D = -\frac{3}{25}$$

$$y_ч = \left(\frac{1}{5}x + \frac{21}{25}\right)\sin x - \left(\frac{3}{5}x + \frac{3}{25}\right)\cos x$$

$$y_{он} = \left(\frac{1}{5}x + \frac{21}{25}\right)\sin x - \left(\frac{3}{5}x + \frac{3}{25}\right)\cos x +$$

$$+ C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}.$$

4) $$y'' + 19y = 3x\sin 4x + \cos 4x$$

$$k^2 + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \pm 4i$$

$$y_{оо} = C_1 \cdot Cos4x + C_2 \cdot Sin4x$$

$$\alpha = 0, \beta = 4 \quad Q_0(x) = 1 \quad P_1(x) = 3x$$

$$N = \max(1,0) = 1$$

$$y_ч = x((Ax + B)\cos 4x + (Cx + D)\sin 4x)$$

$$\begin{cases} C = 0, \\ 2A + 8D = 1, \\ -16A = 3, \\ -8B + 2C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{3}{16}, \quad B = C = 0, \quad D = \frac{11}{64}.$$

$$y_ч = x\left(-\frac{3}{16}x\cos 4x + \frac{11}{64}\sin 4x\right)$$

$$y_{он} = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x - \frac{3}{16}x^2\cos 4x +$$

$$+\frac{11}{64}x\sin 4x$$

$$5)\quad y'' - 2y + 5y = xe^{x}\cos 2x + x^{2} - x + 2$$

$$k^{2} - 2k + 5 = 0$$

$$k_{1,2} = 1 \pm 2i \qquad \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 2$$

$$y_{oo} = e^{x}(C_{1}\cdot Cos2x + C_{2}\cdot Sin2x)$$

$$\left[\begin{array}{l} y'' - 2y + 5y = xe^{x}\cos 2x \\ y'' - 2y + 5y = x^{2} - x + 2 \end{array}\right.$$

$$y_{ч1} = e^{x}x((Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x)$$

$$y_{ч1} = e^{x}x\left(\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x\right)$$

$$y_{ч2} = Ax^2 + Bx + C$$

$$y_{ч2} = \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{38}{125}$$

$$y_{он} = y_{оо} + y_{ч1} + y_{ч2}$$

$$y_{он} = e^x(C_1 \cdot Cos2x + C_2 \cdot Sin2x) + \\ + e^x x\left(\frac{1}{16}\cos 2x + \frac{1}{8}x\sin 2x\right) + \\ + \frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{25}x + \frac{38}{125}.$$