ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ В ТОЧКЕ

Число а называется пределом функции f(x) в точке $x = x_0$, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $| x – x_0 | < δ$, выполняется неравенство $| f(x) – a | < ε$.

$$\boxed{\begin{array}{l} a = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0,\ \text{что} \\ \forall\, x \neq x_0\ \text{и}\ |x - x_0| < \delta, \quad |f(x) - a| < \varepsilon. \end{array}}$$

Для всех значений х близких к x_0 значения функции сколь угодно мало отличаются от числа а.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Число а называется пределом функции f(x) на бесконечности, если для любого положительного числа ε существует такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих неравенству | x | > δ, выполняется неравенство | f(x) – a | < ε.

$$a = \lim_{x\to\infty} f\left(x\right) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0,\, \text{что}$$
$$\forall\, x,\, \text{таких} \;\; \text{что}\, \left|x\right| > \delta, \quad \left|f(x) - a\right| < \varepsilon.$$

Для достаточно больших по абсолютной величине значениях x значения функции сколь угодно мало отличаются от числа а.

ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Если при стремлении ***x*** к $\boldsymbol{x_0}$, *x* принимает значения меньше чем $\mathbf{x_0}$, то рассматривают предел слева.

$$a = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0,\ \textit{что}$$

$$\forall\ x \neq x_0\ \textit{и}\ x \in (x_0 - \delta; x_0), \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Если при стремлении ***x*** к $\boldsymbol{x_0}$, *x* принимает значения больше чем x_0 , то рассматривают предел справа.

$$a = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \Leftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0,\ \textit{что}$$

$$\forall\ x \neq x_0\ \textit{и}\ x \in (x_0; x_0 + \delta), \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ:

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в окрестности точки x_0 и имеют пределы при $x \to x_0$, тогда

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\pm f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm \lim_{x\to x_0} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot \lim_{x\to x_0} f_2(x),$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x)\neq 0.$$

ПРИМЕРЫ.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-3x+1\right)=\left[2^2-3\cdot 2+1\right]=-1.$$

$$\lim_{x\to 0}\left(5+\cos 2x\right)=\left[5+\cos 0\right]=6.$$

$$\lim_{x\to \infty}\left(x^2+\sqrt{x+1}-5\right)=\left[\infty^2+\sqrt{\infty+1}-5\right]=\infty.$$

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ

Функция f(x) называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.$$

Сумма, произведение, разность бесконечно малых функций при $x \to x_0$, а также произведение константы или ограниченной функции на бесконечно малую функцию при $x \to x_0$ есть функция бесконечно малая при $x \to x_0$.

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Функция f(x) называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Сумма, произведение конечного числа бесконечно больших функций при $x \to x_0$, а также произведение константы или ограниченной функции на бесконечно большую функцию при $x \to x_0$ есть функция бесконечно большая при $x \to x_0$.

СВЯЗЬ МЕЖДУ БЕСКОНЕЧНО МАЛОЙ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШОЙ ФУНКЦИЯМИ

Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция, то
$1/\alpha(x)$ – бесконечно большая функция.
Если $F(x)$ – бесконечно большая функция, то
$1/F(x)$ – бесконечно малая функция.

ПРИМЕРЫ.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3+3\sqrt{x}}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-1}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sin(4-2x)}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-3}-7x\right)=[\infty+\infty]=\infty.$$

Свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций удобно запоминать в следующем виде

(С- константа, ? – неопределенность):

$$[0+0]=0 \qquad [C\cdot 0]=0$$

$$[0\cdot 0]=0 \qquad [C\cdot\infty]=\infty$$

$$[\infty+\infty]=\infty$$

$$[\infty\cdot\infty]=\infty \qquad \left[\frac{0}{0}\right]=?$$

$$\left[\frac{C}{0}\right]=\infty \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right]=?$$

$$\left[\frac{C}{\infty}\right]=0 \qquad [\infty-\infty]=?$$

$$[0\cdot\infty]=?$$

РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

1) Отношение бесконечно больших величин есть неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ в рациональной дроби следует числитель и знаменатель разделить на наивысшую степень переменной, приводящей к неопределенности.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x-3}{5x^3-x^2+100}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^3}{x^3}+\dfrac{2x}{x^3}-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}-\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{100}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x^3}}{5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{100}{x^3}}=\left[\frac{1}{5}\right]=0{,}2$$

2) Отношение бесконечно малых величин есть неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для раскрытия неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ в рациональной дроби следует числитель и знаменатель сократить на выражение приводящее к неопределенности

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{2x^2-6x+4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{2x^2-6x+4}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{2x-2}=2.$$

$$\begin{array}{rl|l}
- & 2x^2-6x+4 & x-2 \\ \cline{3-3}
 & 2x^2-4x & 2x-2 \\ \cline{2-2}
 & -2x+4 & \\
- & -2x+4 & \\ \cline{2-2}
 & 0 &
\end{array}$$

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ в иррациональной дроби следует числитель и знаменатель умножить на сопряженное выражению, приводящему к неопределенности, и сократить на множитель, приводящий к неопределенности.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)-4}{\left(x^2-4\right)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x+2)\cdot\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\left[\frac{1}{(2+2)\cdot\left(\sqrt{2+2}+2\right)}\right]=\frac{1}{16}.$$

Для раскрытия неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ в дробях с тригонометрическими функциями целесообразно использовать первый замечательный предел и его следствия.

ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

Функции sinx и x являются эквивалентными при $x\to 0$.

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Очевидно $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=\left|\begin{array}{l} t=ax \\ x\to 0\Rightarrow t\to 0 \end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}=1}$$

СЛЕДСТВИЯ ПЕРВОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(ax)}{ax}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{(ax)\cdot\cos(ax)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(ax)}{ax}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(ax)}=1\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{tg(ax)}{ax}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{arctg(ax)}{ax}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(ax)}{ax}=1}$$

ПРИМЕРЫ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(5x)}{3x}=\frac{5}{3}.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x)}{7x}=\frac{\sin 2}{7}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2(3x)}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{x^2}=9.$$

3) Неопределенности вида $\left[0\cdot\infty\right]$ и $\left[\infty-\infty\right]$ сводят к неопределенностям $\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right]$.

ПРИМЕРЫ.

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot ctg\left(5x\right)\right)=\left[0\cdot\infty\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos\left(5x\right)}{\sin\left(5x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos\left(5x\right)}{\left(5x\right)}=\frac{1}{5}.$$

ПРИМЕРЫ.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$

СЛЕДСТВИЯ ВТОРОГО ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=\left|\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{x} \\ x\to 0\Rightarrow t\to\infty \end{array}\right|=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}=e\Rightarrow$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left((1+x)^{1/x}\right)=\ln e=1\Rightarrow\ \boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\left|\begin{array}{l} t=e^{x}-1 \\ x=\ln(t+1) \\ x\to 0\Rightarrow t\to 0 \end{array}\right|=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=1\Rightarrow\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{ax}\right)^{ax}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/(ax)}=e}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax+1)}{ax}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-1}{ax}=1}$$

ПРИМЕРЫ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{7x}{x}=7.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x+1)}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{7x}=\frac{2}{7}.$$

$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{5x}}=\left[(1+0)^{\infty}\right]=\lim_{x\to 0}\left((1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right)^{3x\cdot\frac{1}{5x}}=e^{\frac{3}{5}}.$$