

Метод рационализации при решении неравенств

урок повторения по алгебре
в 11 профильном классе

Подготовила
Овчинникова Наталья Александровна,
учитель математики высшей категории
МБУ лицея №6 г. о. Тольятти

Метод рационализации неравенств

известен около 50 лет, встречался

под названиями:

- метод декомпозиции;
- метод замены множителей;
- обобщение метода интервалов

**Данный метод позволяет
с помощью условий равносильности
сводить решение целых классов
сложных неравенств
к решению
простых рациональных неравенств
классическим методом интервалов.**

**Идея метода рационализации
состоит в использовании свойств
монотонной функции.**

Доказательства равносильных переходов
приведены в пособии:

МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2014.

**РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ
ПЕРЕМЕННОЙ** (типовые задания С3)

Прокофьев А.А., Корянов А.Г.



МАТЕМАТИКА ЕГЭ 2014



РЕШЕНИЕ НЕРАВЕНСТВ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (типовые задания С3)



Прокофьев А.А.



Корянов А.Г.

<http://alexlarin.net/ege/2014/C3-2014.pdf>

Суть метода рационализации
заключается в замене
сложного выражения $F(x)$
на более простое выражение $G(x)$
(в конечном счете, рациональное),
при которой неравенство $G(x) \vee 0$
равносильно неравенству $F(x) \vee 0$
в области определения выражения
 $F(x)$.

где \vee - один из знаков $<$, $>$, \leq , \geq

Метод рационализации используют и при решении неравенств вида:

$$F(x) = \frac{f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_k(x)}{g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot \dots \cdot g_l(x)} \geq 0$$

Любой из множителей можно заменять на совпадающий с ним по знаку

Таблица замены множителей

№	Выражение F	Выражение G
1.	$\log_h f \vee \log_h g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
2.	$\log_h f \cdot \log_p g \vee 0$	$(h-1)(f-1)(p-1)(g-1) \vee 0$
3.	$h^f \vee h^g$	$(h-1)(f-g) \vee 0$
4.	$\sqrt{f} \vee \sqrt{g}$	$f \vee g$
5.	$ f \vee g $	$(f-g)(f+g) \vee 0$

\vee - один из знаков $<$, $>$, \leq , \geq

Пример 1

$$\log_{5-x} \frac{x+2}{(x-5)^4} \geq -4$$

$$\begin{cases} 5-x > 0 \\ 5-x \neq 1 \\ x+2 > 0 \\ (5-x-1)(x+2-1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\log_{5-x} (x+2) - 4 \geq -4$$

$$\log_{5-x} (x+2) \geq 0$$

$$\text{Ответ : } [-1; 4)$$

Пример 2

$$\log_x(3-x) \cdot \log_x(4-x) - \log_x(x^2 - 7x + 12) + 1 \geq 0$$

Решение :

$$\log_x(3-x) \cdot \log_x(4-x) - \log_x(3-x) - \log_x(4-x) + 1 \geq 0$$

$$(\log_x(3-x) - 1) \cdot (\log_x(4-x) - 1) \geq 0$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 3 - x > 0 \\ (x-1)^2(3-x-1)(4-x-1) \geq 0 \end{cases}$$

Ответ : $(0;1) \cup (1;1,5] \cup [2;3)$

Пример 3

$$\log_{2x^2-x}(3x-1) \cdot \log_{2x-x^2}(3-2x) \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - x > 0 \\ 2x^2 - x \neq 1 \\ 3x - 1 > 0 \\ 2x - x^2 > 0 \\ 2x - x^2 \neq 1 \\ 3 - 2x > 0 \\ (2x^2 - x - 1)(3x - 1 - 1)(2x - x^2 - 1)(3 - 2x - 1) \geq 0 \end{array} \right.$$

$$\text{Ответ: } \left[\frac{2}{3}; 1 \right) \cap (1; 1,5)$$

Пример 4

$$\log_{|x+2|}(4 + 7x - 2x^2) \leq 2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x + 2| > 0 \\ |x + 2| \neq 1 \\ 4 + 7x - 2x^2 > 0 \\ (|x + 2| - 1)(4 + 7x - 2x^2 - (x + 2)^2) \leq 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x \neq -2, x \neq -1, x \neq -3 \\ -0,5 < x < 4 \\ (x + 2 - 1)(x + 2 + 1)(3x - 3x^2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,5 < x < 4 \\ -3x(x + 1)(x + 3)(x - 1) \leq 0 \end{cases}$$

Ответ : $(-0,5; 0] \boxtimes [1; 4)$

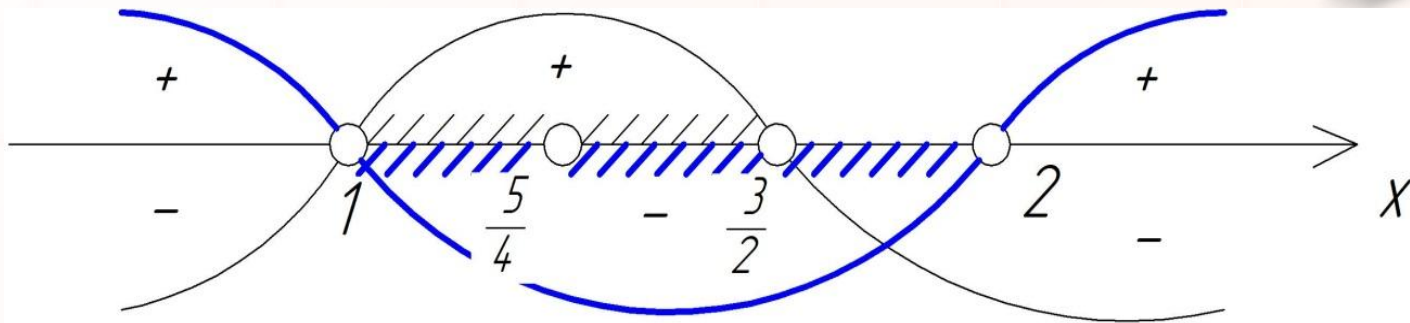
Пример 5

$$\log_{-4x^2+12x-8} |4x-5| > 0$$

Заменяем данное неравенство равносильной системой, используя метод рационализации:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-4x^2 + 12x - 8 - 1)(|4x - 5| - 1) > 0 \\ -4x^2 + 12x - 8 > 0 \\ -4x^2 + 12x - 8 \neq 1 \\ 4x - 5 \neq 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -(2x - 3)^2 ((4x - 5)^2 - 1) > 0 \\ (x - 1)(x - 2) < 0 \\ x \neq \frac{5}{4}, x \neq \frac{3}{2} \end{array} \right.$$



Окончательно получаем, что решением являются все x такие, что

$$x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \boxtimes \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$$

Ответ: $x \in \left(1; \frac{5}{4}\right) \boxtimes \left(\frac{5}{4}; \frac{3}{2}\right)$

Пример 6

$$(x^2 + 2x - 2)^{2x^2 - x - 1} < (x^2 + 2x - 2)^{9 - x^2}$$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 > 0 \\ (x^2 + 2x - 2 - 1)(2x^2 - x - 1 - 9 + x^2) < 0 \end{cases}$$

Ответ : $(-3; -1 - \sqrt{3}) \boxtimes (1; 2)$

Пример 7

Для каждого значения параметра a
найти решения неравенства

$$x^{\sin x} \log_a x + x^a \log_a \frac{a}{x} < x^{\sin x},$$

удовлетворяющие условию $x < \frac{\pi}{2}$

Решение:

$$x^{\sin x} \log_a x + x^a \log_a \frac{a}{x} < x^{\sin x}$$

$$\begin{cases} 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ a > 0, a \neq 1 \end{cases}$$

$$x^{\sin x} \log_a x + x^a \cdot (\log_a a - \log_a x) - x^{\sin x} < 0$$

$$x^{\sin x} \log_a x + x^a - x^a \log_a x - x^{\sin x} < 0$$

$$(\log_a x - 1)(x^{\sin x} - x^a) < 0$$

$$(a - 1)(x - a)(x - 1)(\sin x - a) < 0$$

Список используемых источников:

1. Прокофьев А.А., Корянов А.Г.

Материала курса «Готовим к ЕГЭ хорошистов и отличников»: лекции 1 – 4 . М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2012

<https://edu.1september.ru/distance/>

Список используемых источников:

2. Коропец З.Л. , Коропец А.А. , Алексеева Т.А.
*Математика. Нестандартные методы решения
неравенств и их систем.*

Орел, 2012

3. Прокофьев А.А. Корянов А.Г.
Математика ЕГЭ 2014.

*Решение неравенств с одной
переменной (типовые задания С3)*

<http://alexlarin.net/ege/2014/C3-2014.pdf>