



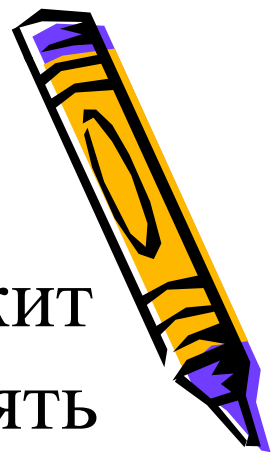
*Правила преобразования
логических выражений*

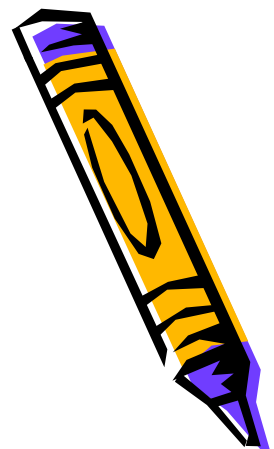


Иванова Юлия

Если логическое выражение содержит большое число операций, то составлять для него таблицу истинности достаточно сложно, так как приходится перебирать большое количество вариантов.

В таких случаях формулы удобно привести к нормальной форме.





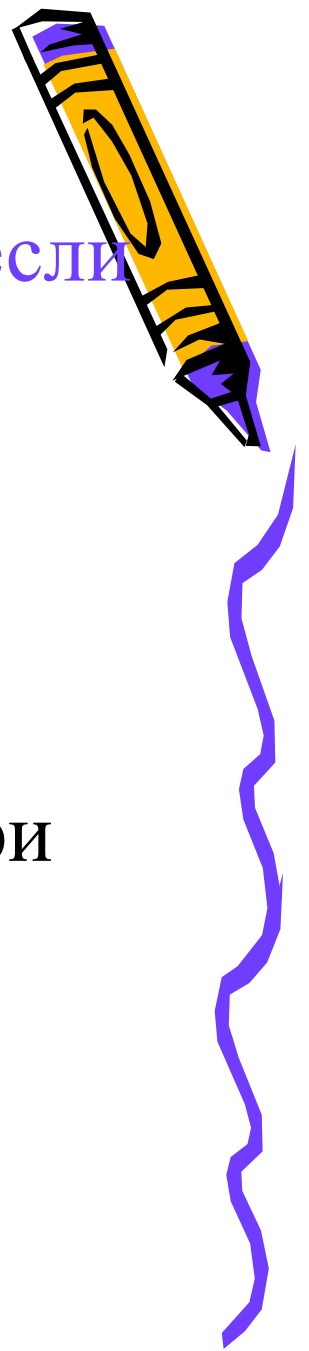
Введем определение *логической формулы* :

Всякая логическая переменная и символы
"истина" ("1") и "ложь" ("0") — формулы.

Если A и B — формулы, то $\neg A$, $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$
— формулы.

Никаких других формул в алгебре логики нет.





Формула имеет нормальную форму, если в ней отсутствуют:

- знаки эквивалентности;
- знаки импликации;
- двойного отрицания;
- знаки отрицания находятся только при логических переменных.



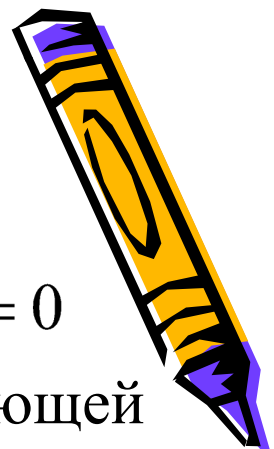
Примеры упрощения логических формул:

$$1. \overline{X \vee Y} \cdot (X \cdot \bar{Y}) = \bar{X} \cdot \bar{Y} \cdot (X \cdot \bar{Y}) = \bar{X} \cdot X \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Y} = 0 \cdot \bar{Y} \cdot \bar{Y} = 0$$

Законы алгебры логики применяются в следующей последовательности: правило де Моргана, сочетательный закон, правило операций переменной с её инверсией и правило операций с константами;

$$2. \bar{X} \cdot Y \vee \overline{X \vee Y} \vee X = \bar{X} \cdot Y \vee \bar{X} \cdot \bar{Y} \vee X = \bar{X} \cdot (Y \vee \bar{Y}) \vee X = \bar{X} \vee X = 1$$

Применяется правило де Моргана, выносятся за скобки общий множитель, используется правило операций переменной с её инверсией;



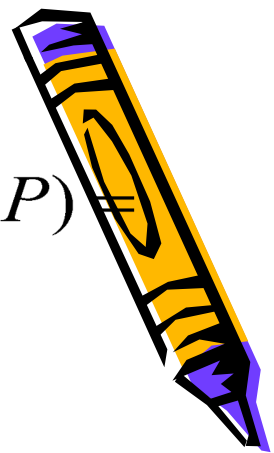
$$\begin{aligned}
 3. \quad & X \cdot \bar{Y} \vee \bar{X} \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot Z = X \cdot \bar{Y} \vee \bar{X} \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot Z \cdot (Y \vee \bar{Y}) = \\
 & = X \cdot \bar{Y} \vee \bar{X} \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot \bar{Y} \cdot Z = \\
 & = (X \cdot \bar{Y} \vee X \cdot \bar{Y} \cdot Z) \vee (\bar{X} \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot Y \cdot Z) = X \cdot \bar{Y} \vee Y \cdot Z
 \end{aligned}$$

Вводится вспомогательный логический сомножитель $(Y \vee \bar{Y})$; затем комбинируются два крайних и два средних логических слагаемых, и используется закон поглощения;

$$4. \quad \overline{X \cdot Y \vee \bar{Z}} = \overline{X \cdot Y} \cdot \bar{\bar{Z}} = (\bar{X} \vee \bar{Y}) \cdot Z$$

Сначала добиваемся, чтобы знак отрицания стоял только перед отдельными переменными, а не перед их комбинациями, для этого дважды применяем правило де Моргана; затем используем закон двойного отрицания;





$$X \cdot Y \vee X \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot Z \cdot P = X \cdot (Y \cdot (1 \vee Z) \vee Z \cdot P) =$$

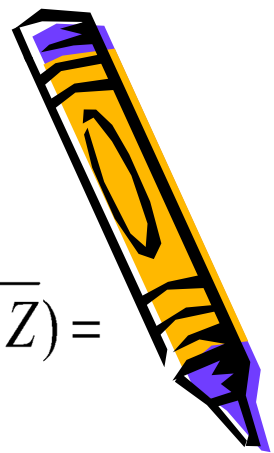
5. $= X \cdot (Y \vee Z \cdot P)$

Выносятся за скобки общие множители; применяется правило операций с константами;

$$6. X \vee \overline{Y \cdot Z} \vee \overline{\overline{X} \vee Y \vee \overline{Z}} = X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z} \vee \overline{\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}} = X \vee \overline{Y} \vee \overline{Z} \vee X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} =$$
$$= X \vee \overline{Z} \vee (\overline{Y} \vee X \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}) = X \vee \overline{Z} \vee \overline{Y}$$

К отрицаниям неэлементарных формул применяется правило де Моргана; используются законы двойного отрицания и склеивания;





$$X \vee \bar{Y} \vee X \cdot Y \cdot Z \vee X \cdot \bar{Y} \cdot Z \vee X \cdot \overline{Y \cdot Z} = X \cdot (\bar{Y} \vee Y \cdot Z \vee \bar{Y} \cdot Z \vee \overline{Y \cdot Z}) =$$

7. $= X \cdot ((\bar{Y} \vee \bar{Y} \cdot Z) \vee (Y \cdot Z \vee \overline{Y \cdot Z})) = X \cdot (\bar{Y} \vee \bar{Y} \cdot Z \vee 1) = X \cdot 1 = X$

Общий множитель X выносится за скобки, комбинируются слагаемые в скобках — первое с третьим и второе с четвертым, к дизъюнкции $Y \cdot Z \vee \overline{Y \cdot Z}$ применяется правило операции переменной с её инверсией.

