Равносильность уравнений

11 класс

Определение 1. **Два уравнения с одной переменной**

f(x) = *g(x)* и *p(x)* = *h(x)* называют равносильными, если множества их корней совпадают.

Иными словами, два уравнения называют ***равносильными***, если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Например, уравнения $x^2 - 4 = 0$ и $(x + 2)(2^x - 4) = 0$ равносильны, оба они имеют по два корня:

2 и -2. Равносильны и уравнения $x^2+1=0$ и $\sqrt{x}=-3$, поскольку оба они не имеют корней.

Определение 2. **Если каждый корень уравнения**

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

является в то же время корнем уравнения

$$p(x) = h(x), \quad (2)$$

то уравнение (2) называют следствием уравнения (1).

Например, уравнение $x - 2 = 3$ имеет корень $x = 5$, а уравнение $(x - 2)^2 = 9$ имеет два корня: $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Корень уравнения $x - 2 = 3$ является одним из корней уравнения $(x - 2)^2 = 9$. Значит, уравнение $(x - 2)^2 = 9$ — следствие уравнения $x - 2 = 3$.

Достаточно очевидным является следующее утверждение.

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

В итоге можно сказать, что решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа.

Первый этап — *технический*. На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1) → (2) → (3)→ (4) → ... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Если анализ, проведенный на втором этапе, показывает, что некоторые преобразования могли привести к уравнению-следствию, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Реализация этого плана связана с поисками ответов на четыре вопроса.

- **Как узнать, является ли переход от одного уравнения к другому равносильным преобразованием?**
- **Какие преобразования могут перевести данное уравнение в уравнение-следствие?**
- **Если мы в конечном итоге решили уравнение-следствие, то как сделать проверку в случае, когда она сопряжена со значительными вычислительными трудностями?**
- **В каких случаях при переходе от одного уравнения к другому может произойти потеря корней и как этого не допустить?**

Теоремы о равносильности уравнений

- ***«Спокойные теоремы*»** гарантируют равносильность преобразований без каких-либо дополнительных условий, их использование не причиняет решающему никаких неприятностей.
- ***«Беспокойные теоремы»*** работают лишь при определенных условиях, а значит, могут доставить некоторые неприятности при решении уравнений.

«Спокойные теоремы»

Теорема 1. *Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 2. *Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.*

Теорема 3. *Показательное уравнение* $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) *равносильно уравнению* $f(x) = g(x)$.

ОДЗ

Прежде чем формулировать теоремы 4—6, напомним еще об одном понятии, связанном с уравнениями.

Определение 3. Областью определения уравнения $f(x) = g(x)$ или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной ***x***, при которых одновременно имеют смысл выражения

$f(x)$ и $g(x)$.

«Беспокойные теоремы»

Теорема 4. *Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ умножить на одно и то же выражение $h(x)$, которое:*

а) *имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения $f(x) = g(x)$*

б) *нигде в этой области не обращается в 0*

то получится уравнение $f(x)h(x) = g(x)h(x)$, равносильное данному в его ОДЗ.

Следствием теоремы 4 является еще одно «спокойное» утверждение: ***если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.***

Теорема 5. *Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны в ОДЗ уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же четную степень n получится уравнение $(f(x))^n=(g(x))^n$ равносильное данному в его ОДЗ.*

Теорема 6. *Пусть $a>0$ и $a\neq1$, X — решение системы неравенств*

$f(x) > 0$,

$g(x) > 0$ *Тогда уравнение* $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ *равносильно на множестве X уравнению $f(x) = g(x)$*

Краткая запись теорем 4 - 6.

4. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow h(x)f(x) = h(x)g(x)$, где $h(x) \neq 0$ и $h(x)$ имеет смысл в ОДЗ данного уравнения.

5. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow (f(x))^n=(g(x))^n$, где $f(x)\geq 0$, $g(x)\geq 0$ и $n=2k$ (чётное число).

6. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x)$, где $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

и $a>0$ и $a\neq 1$

Преобразование данного уравнения в уравнение - следствие. Проверка корней.

Если в процессе решения уравнения применяем теоремы 4-6, не проверив выполнения ограничительных условий, то получим уравнение-следствие.

Например. ***а)*** *$x - 1 = 3$; $x = 4$*

Умножим обе части на $(x - 2)$:

$(x - 2)(x - 1) = 3(x - 2)$; $x = 4$ и $x = 2$ – посторонний корень$\Rightarrow$ ***проверка!***

б) *$\ln(2x-4) = \ln(3x-5)$*

Потенцируем $2x - 4 = 3x - 5$; $x = 1$, но при этом значении уравнение не имеет смысла $\Rightarrow$ ***искать ОДЗ или проверка.***

Пример 1

Решить уравнение

$$\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$$

Решение. Первый этап — *технический*. На этом этапе, как мы отмечали выше, осуществляют преобразования заданн… схеме (1) -> (2) (3) -> (4) -> … и находят корни последнего (самого простого) урав… цепочки.

Последовательно получаем:

$$\left(\sqrt{5x-6}\right)^2=\left(5-\sqrt{2x+5}\right)^2$$

$$10\sqrt{2x+5}=36-3x$$

$$(2x+5)=1296-216x+9x^2$$

$$9x^2-416x+796=0$$

$$x_1=2;\ x_2=398/9$$

Второй этап — *анализ решения*. На этом этапе, анализируя проведенные преобразования, отвечают на вопрос, все ли они были равносильными.

Третий этап — *проверка*. Подставим поочередно каждое из найденных значений переменной в исходное уравнение.

$x_2 = 398/9$ - посторонний корень.

Ответ: $x = 2$

Пример 2

Решить уравнение

$$\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x).$$

Решение. Первый этап. Воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\ln(x+4)+\ln(2x+3)$ выражением $\ln(x+4)(2x+3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать в виде:

$$\ln(x+4)(2x+3)=\ln(1-2x).$$

Потенцируя, получаем:

$(x+4)(2x+3)=(1-2x)$; $2x^2+8x+3x+12=1-2x$; $2x^2+13x+11=0$; $x_1=-1$, $x_2=-5{,}5$.

Второй этап. В процессе решения произошло расширение ОДЗ уравнения, значит, обязательна проверка.

Третий этап. Поскольку, кроме расширения ОДЗ уравнения, никаких других неравносильных преобразований в процессе решения уравнения не было, проверку можно выполнить по ОДЗ исходного уравнения. Она задается системой неравенств

$$\begin{cases} x+4>0, \\ 2x+3>0, \\ 1-2x>0. \end{cases}$$

Значение $x=-1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x=-5{,}5$ не удовлетворяет уже первому неравенству, это посторонний корень.

***Ответ:* -1.**

О потере корней

Укажем две *причины потери корней при решении уравнений:*

1. Деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение $h(x)$ (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие $h(x) \neq 0$);

2. Сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

С первой причиной бороться нетрудно: приучайте себя переходить от уравнения $f(x)h(x) = g\{x)h\{x)$ к уравнению $h(x)(f(x) - g(x))=0$ (а не к уравнению $f(x)=g(x)$). Может быть, даже есть смысл вообще запретить себе деление обеих частей уравнения на одно и то же выражение, содержащее переменную.

Со второй причиной бороться сложнее. Рассмотрим, например, уравнение $\lg x^2 = 4$ и решим его двумя способами.

Первый способ. Воспользовавшись определением логарифма, находим:

$$x^2 = 10^4;\ x_1 = 100,\ x_2 = -100.$$

Второй способ. Имеем: $2\lg x = 4$; $\lg x = 2$; $x = 100$.

Обратите внимание: при втором способе произошла потеря корня — «потерялся» корень $x = -100$. Причина в том, что вместо правильной формулы $\lg x^2 = 2\lg|x|$ мы воспользовались неправильной формулой

$\lg x^2 = 2\lg x$, сужающей область определения выражения, из нее «выпал» открытый луч $(-\infty; 0)$, где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Вывод: применяя при решении уравнения какую-либо формулу (особенно тригонометрическую), следите за тем, чтобы области допустимых значений переменной для правой и левой частей формулы были одинаковыми.