

Векторы

Напомним, что **вектором** называется направленный отрезок, т.е. отрезок, в котором указаны его начало и конец.

Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается \overrightarrow{AB} изображается стрелкой с началом в точке A и концом в точке B .

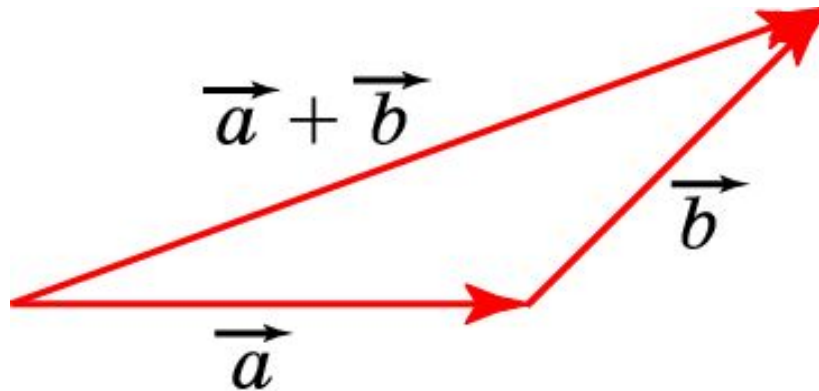
Длиной, или **модулем**, вектора называется длина соответствующего отрезка. Длина векторов \overrightarrow{a} , \overrightarrow{AB} обозначается соответственно $|\overrightarrow{a}|$, $|\overrightarrow{AB}|$.

Два вектора называются **равными**, если они имеют одинаковую длину и направление.

Рассматривают также нулевые векторы, у которых начало совпадает с концом. Все нулевые векторы считаются равными между собой. Они обозначаются $\vec{0}$, и их длина считается равной нулю.

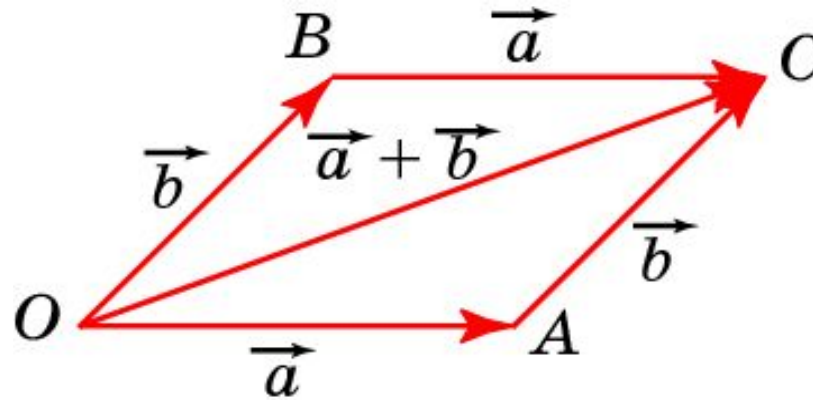
Сложение векторов

Для векторов определена операция сложения. Для того чтобы сложить два вектора \vec{a} и \vec{b} , вектор \vec{b} откладывают так, чтобы его начало совпало с концом вектора \vec{a} . Вектор, у которого начало совпадает с началом вектора \vec{a} , а конец - с концом вектора \vec{b} , называется **суммой** векторов \vec{a} и \vec{b} , обозначается $\vec{a} + \vec{b}$.

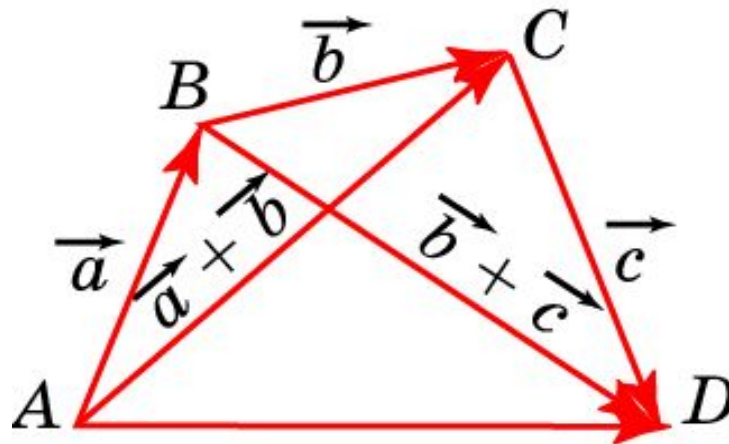


Свойства сложения векторов

Свойство 1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (переместительный закон).



Свойство 2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (сочетательный закон).



Пример

Сколько различных векторов задают пары вершин параллелограмма $ABCD$?

Ответ: Восемь векторов.

Упражнение 1

Сколько различных векторов задают стороны трапеции $ABCD$?

Ответ: Восемь векторов.

Упражнение 2

В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 3$ см, $BC = 4$ см.

Найдите длины векторов: а) \overrightarrow{AB} ; б) \overrightarrow{BC} ; в) \overrightarrow{DC} ;
г) \overrightarrow{AC} ; д) \overrightarrow{DB} .

Ответ: а) 3 см;
 б) 4 см;
 в) 3 см;
 г) 5 см;
 д) 5 см.

Упражнение 3

Основание AD трапеции $ABCD$ с прямым углом A равно 12 см, $AB = 5$ см, $\angle D = 45^\circ$. Найдите длины векторов: а) \overrightarrow{BD} ; б) \overrightarrow{CD} ; в) \overrightarrow{AC} .

Ответ: а) 13 см;
б) $5\sqrt{2}$ см;
в) $\sqrt{74}$ см.

Упражнение 4

В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O . Равны ли векторы: а)

\overrightarrow{AB}

\overrightarrow{DC})

\overrightarrow{BC}

\overrightarrow{DA})

\overrightarrow{AO}

\overrightarrow{OC})

\overrightarrow{AC}

\overrightarrow{BD}

Ответ: а) Да;
б) нет;
в) да;
г) нет.

Упражнение 5

Точки S и T являются серединами боковых сторон соответственно MN и LK равнобедренной трапеции $MNLK$. Равны ли векторы: а) \overrightarrow{MS} и \overrightarrow{SN} ; б) \overrightarrow{MN} и \overrightarrow{KL} ; в) \overrightarrow{TS} и \overrightarrow{LM} ; г) \overrightarrow{TL} и \overrightarrow{KT} ?

Ответ: а) Да;
б) нет;
в) нет.
г) да.

Упражнение 6

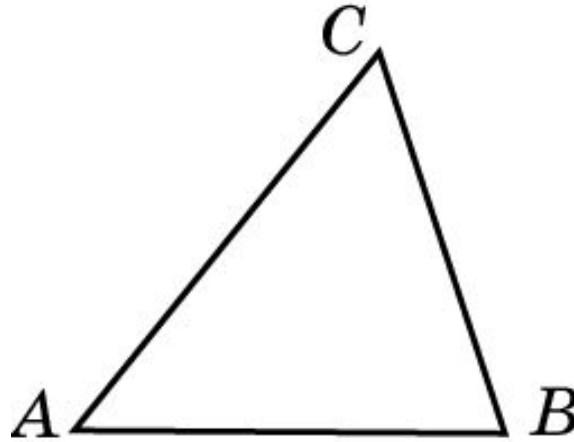
В треугольнике ABC укажите векторы:

а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$;

б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$;

в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$;

г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.



Ответ: а) \overrightarrow{AC} ;

б) \overrightarrow{CA} ;

в) \overrightarrow{CB} ;

г) \overrightarrow{CA} .

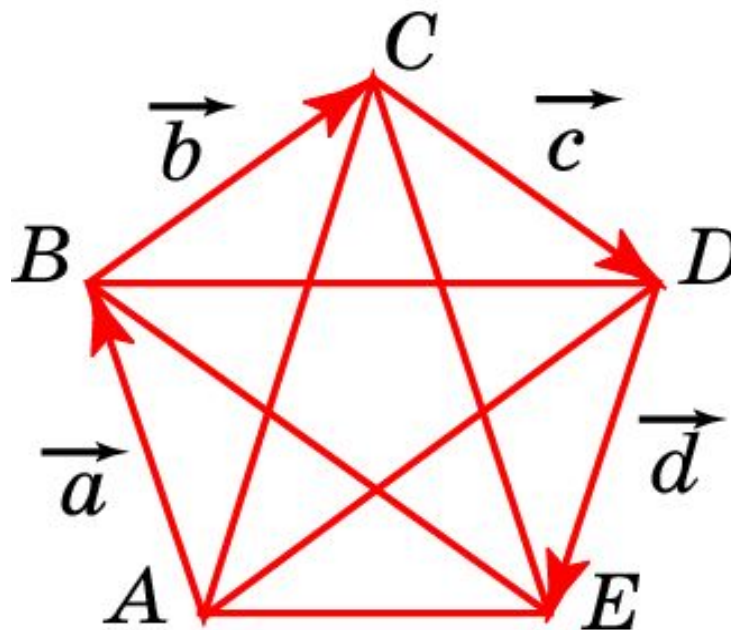
Упражнение 7

На рисунке укажите векторы:

а) $\vec{a} + \vec{b}$;

б) $\vec{c} + \vec{d}$;

в) $\vec{b} + \vec{c}$.



Ответ: а) \vec{AC} ;

б) \vec{CE} ;

в) \vec{BD} .

Упражнение 8

A, B, C, D - произвольные точки плоскости.

Выразите через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CD}$
векторы: а) \overrightarrow{AD} ; б) \overrightarrow{BD} ; в) \overrightarrow{AC} .

Ответ: а) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

б) $\vec{b} + \vec{c}$;

в) $\vec{a} + \vec{b}$.

Упражнение 9

Сторона равностороннего треугольника ABC равна a . Найдите: а) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$;
в) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB}|$.

Ответ: а) a ;

б) $a\sqrt{3}$;

в) $a\sqrt{3}$.

Упражнение 10

В треугольнике ABC $AB = 6$, $BC = 8$, $B = 90^\circ$.

Найдите: а) $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}|$; б) $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}|$; в) $|\overrightarrow{BA}| + |\overrightarrow{BC}|$;

г) $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$.

Ответ: а) 14;

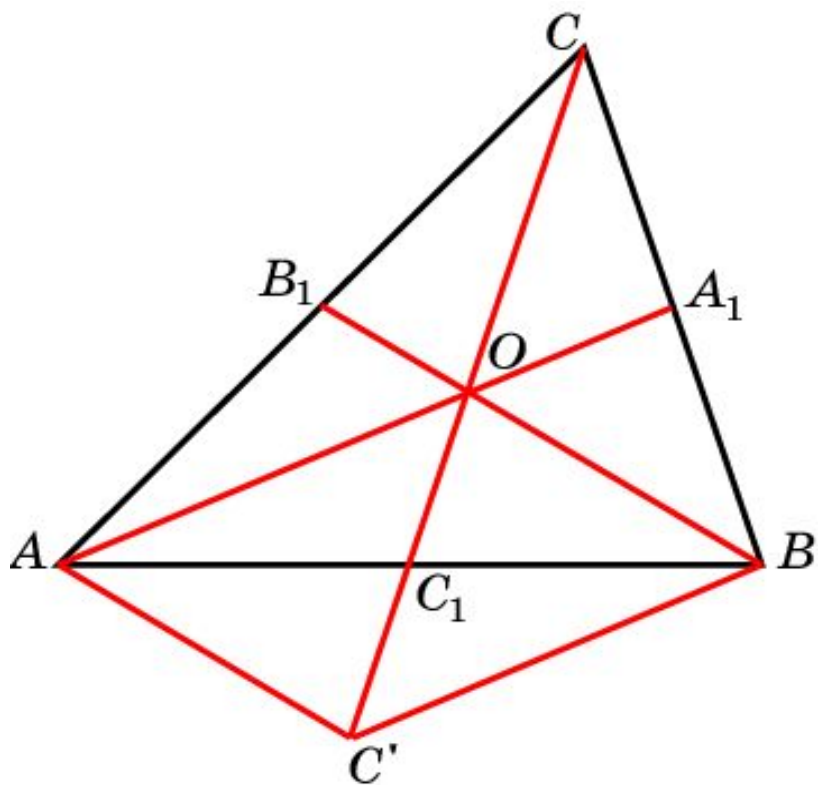
б) 10;

в) 14;

г) 10.

Упражнение 11

Стороны треугольника ABC равны a, b, c . O – точка пересечения медиан. Найдите сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.



Решение: Продолжим медиану CC_1 и отложим отрезок $C_1C' = OC_1$. $AOBC'$ – параллелограмм, $OC' = 2OC_1 = OC$.

Следовательно,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC'} = -\overrightarrow{OC} \text{ и, значит,}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}.$$