Урок-презентация по теме «Тригонометрические уравнения».

Кривошеева Светлана Александровна учитель математики МБОУСОШ №40 г. Тулы

Цель урока.

- Обобщить, систематизировать и расширить знания учащихся по данной теме.
- Провести контроль знаний.
- Повысить интерес учащихся к предмету.

План урока.

- Презентация учащихся по теме « Тригонометрические уравнения».
- Теоретические основы решения тригонометрических уравнений
- Устный счет «найди ошибку в решении уравнений».
- Различные способы решения тригонометрических уравнений .
- Проведение контроля знаний: а)компьютерное тестирование; б)самостоятельная работа с выбором готовых ответов; в)решение задания С1.
- Фрагмент презентации учащихся по теме «Из истории тригонометрии».
- Подведение итогов, выставление оценок за урок.

Простейшие тригонометрические уравнения.

Уравнение вида

$$\cos x = \alpha \qquad\qquad \sin x = \alpha$$

$\alpha \in [-1;1]$:

$0 < \arccos\alpha < \pi;$

$-\frac{\pi}{2} < \arcsin\alpha < \frac{\pi}{2};$

$\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos\alpha;$

$\arcsin(-a) = -\arcsin a$

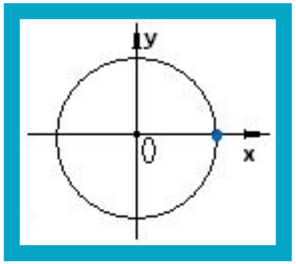
$\cos(\arccos\alpha) = \alpha.$

$\arccos\alpha + \arcsin\alpha = \frac{\pi}{2}.$

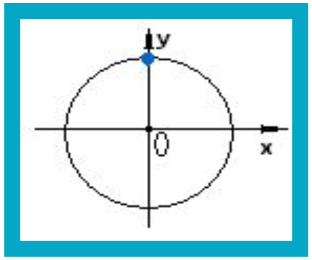
$$x = \pm arccosa + 2\pi n, n\epsilon Z \qquad x = (-1)^n arcsina + \pi n, n\epsilon Z$$

Частные случаи:

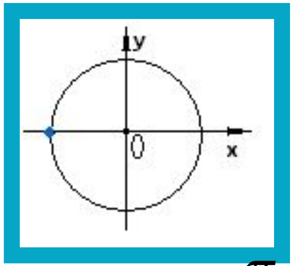
$\cos x = 1; x = 2\pi n, n \in Z;$



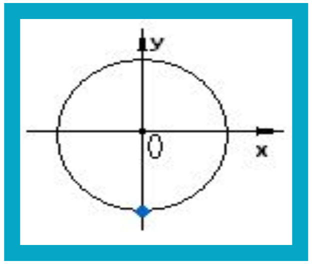
$\sin x = 1; x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$



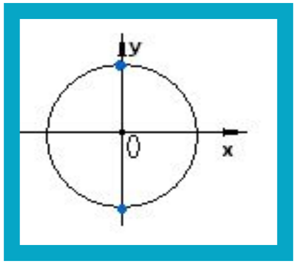
$\cos x = -1; x = \pi + 2\pi n, n \in Z;$



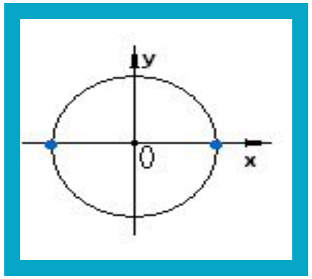
$\sin x = -1; x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$



$\cos x = 0; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$



$\sin x = 0; x = \pi n, n \in Z.$



$$tgx = a, ctgx = a.$$

$$ctgx = a$$

$$x = arcctg\alpha + \pi n, n \in Z.$$

$$tgx = a$$

$$x = arctg\alpha + \pi n, n \in Z.$$

$$a \in R:$$

$$0 < arcctg\alpha < \pi;$$

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\alpha < \frac{\pi}{2};$$

$$ctg(arcctg\alpha) = \alpha;$$

$$tg(arctg\alpha) = \alpha;$$

$$arcctg(-\alpha) = \pi - arcctg\alpha;$$

$$arctg(-\alpha) = -arctg\alpha.$$

$$arctg\alpha + arcctg\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Устный счёт.

Найдите ошибки в решении тригонометрических уравнений.

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Правильное решение

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Правильное решение

$$\sin x = \frac{1}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$$

Найдите ошибки в решении тригонометрических уравнений.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n, n \epsilon Z.$$

$$\cos x = -\frac{1}{2} \qquad x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Найдите ошибки в решении тригонометрических уравнений.

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \epsilon Z.$$

$$cos\ \ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Правильное решение

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \epsilon Z.$$

$$cos\ \ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

Найдите ошибки в решении тригонометрических уравнений.

$\sin x = 1 \qquad x\,x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 1 \qquad x\,x = 2\pi n, n \in Z \in Z$

Правильное решение

$\sin x = 1$ $\qquad$ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 1$ $\qquad$ $x = 2\pi n, n \in Z$

Найдите ошибки в решении тригонометрических уравнений.

$\sin x = 0$ $\quad x\ x = \pi n, n \in Z$: Z

$\cos x = 0$ $\quad x\ \ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Правильное решение

$$\sin x = -1 \qquad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = -1 \qquad x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

Найдите ошибки в решении тригонометрических уравнений.

$\sin x = -1$ $\qquad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = -1$ $\qquad$ $x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

Правильное решение

$$\sin x = 0 \qquad x = \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 0 \qquad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Проверка домашнего задания

$$\sin\frac{x}{2}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{x}{2}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n;$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1;$$

$$x+\frac{\pi}{3}=2\pi n;$$

$$x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$$

$$3\cos^2\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}-2=0;$$

Пусть $\cos\frac{x}{2}=t,(|t|\le 1)$

$$3t^2-t-2=0$$

$$t_1=1;t_t=-\frac{2}{3};$$

$$\cos\frac{x}{2}=1 \text{ или } \cos\frac{x}{2}=-\frac{2}{3};$$

$$x=4\pi n,n\in Z;x=\pm 2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+4\pi k,k\in Z.$$

$$2\sin^2 2x+5\sin 2x-3=0;$$

Пусть $\sin 2x=t,(|t|\le 1)$

$$2t^2+5t-3=0;$$

$$t_1=\frac{1}{2};t_2=-3$$

$|-3|>1$ - постороннее решение

$$\sin 2x=\frac{1}{2};$$

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2},n\in Z.$$

$$3tgx + 5ctgx = 8$$

$$tgx = t, t \neq 0, \qquad ctgx = \frac{1}{t}.$$

$$3t^2 - 8t = 5 = 0$$

$$t_1 = 1, t_2 = \frac{5}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \qquad x = arctg\frac{5}{3} + \pi k, k \in Z.$$

$$2\sin^2\frac{x}{3} + 5\cos\frac{x}{3} + 1 = 0$$

Пусть $\cos\frac{x}{3} = t,$ тогда $\sin^2\frac{x}{3} = 1 - t^2,$ $|t| \leq 1;$

$$2(1 - t^2) + 5t + 1 = 0;\ 2t^2 - 5t - 3 = 0;$$

$t_1 = -\frac{1}{2}; t_2 = 3$ - постороннее решение, так как $|3| > 1.$

$$x = \pm 2\pi + 6\pi k, k \in Z.$$

Ответ: $x = \pm 2\pi + 6\pi k, k \in Z.$

$$2\cos^2 x - 3\cos x\sin x = 0,$$

$$\cos x(2\cos x - 3\sin x) = 0,$$

$$\cos x = 0, \qquad 2\cos x - 3\sin x = 0,$$

разделим обе части уравнения на cos x, не рискуя потерять корни:

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \qquad tgx = \frac{2}{3},$$

$$x = arctg\frac{2}{3} + \pi k, k \in Z.$$

$$2\sin^2\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos^2\frac{x}{2} = 0, \qquad \Big|: \cos^2\frac{x}{2}$$

$$2tg^2\frac{x}{2} - 3tg\frac{x}{2} - 2 = 0,$$

$$tg\frac{x}{2} = 2, \qquad tg\frac{x}{2} = -\frac{1}{2},$$

$$x = 2arctg2 + 2\pi n, n \in Z; \qquad x = -2arctg\frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

Вопрос: на каком отрезке $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{73\pi}{4}\right]; \left[-\frac{73\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right]$ **больше корней данного уравнения?**

Ответ: одинаково (в силу нечетности тангенса).

$$3\cos x + 4\sin x = 5 + (1 - 3x)^2.$$

Так как левая часть уравнения меньше или равна 5, а правая часть больше или равна 5, то равенство может быть достигнуто только в случае, когда обе части уравнения равны 5. Правая часть равна 5 при $x = \frac{1}{3}$.

Подставим это значение, $x = \frac{1}{3}$ не является корнем уравнения.

Ответ: решений нет.

Решите уравнения.

Решите тригонометрические уравнения и найдите свои ответы в правом столбике. Каждому ответу соответствует буква. Расположите буквы так, как расположены уравнения в левом столбике и ответьте на вопрос: как называли куб в Греции.

Домашнее задание

Уравнения.

$$\sqrt{3}\sin x\cos x+(\cos x)^2=0$$

$$2\sin x-1=0$$

$$tg(-4x)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(\sin x)^2+\sin x\cos x-2(\cos x)^2=0$$

$$tg\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\left(\cos x+\frac{5}{2}\right)=0$$

$$ctgx+1=0$$

$$5{,}3(\sin x)^2+\sqrt{2}\sin x+5{,}3(\cos x)^2=4{,}3$$

Ответы.

$$(-1)^n arcsin\frac{1}{3}+\pi n, n\epsilon Z.\text{Э}$$

$$\frac{\pi}{4}+\pi k; -arctg2+\pi n; n\in Z, k\in Z.\text{С}$$

$$(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\epsilon Z.E$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\epsilon Z, -\frac{\pi}{6}+\pi k, k\epsilon Z.\Gamma$$

$$(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z.P$$

$$\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{4}, n\epsilon Z.\quad A$$

$$-\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}, n\epsilon Z.K$$

$$\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\epsilon Z.\text{Д}$$

Ответ

Гексаэдр (греч. hexáedron, от héx — шесть и hédra — основание, грань), шестигранник, чаще всего правильный шестигранник, т. е. куб.

Задание бригады №1.

Решите тригонометрические уравнения и найдите свои ответы в правом столбике. Каждому ответу соответствует буква. Расположите буквы так, как расположены уравнения в левом столбике и ответьте на вопрос: как в греческой мифологии звали вестника богов.

Задание бригады №1

Уравнения	Ответы
$2(\sin x)^2 + 3\sin x + 1 = 0$	$\frac{\pi}{6} + \pi n, n\epsilon Z.$ Р
$(\cos 2x)^2 = \cos 2x$	$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n; n \in Z, k \in Z.$ Г
$\sqrt{3}\sin x = \cos x$	$(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n\epsilon Z.$ С
$2\cos x + \sqrt{2} = 0$	$\pi k; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, k\epsilon Z, n\epsilon Z.$ Е
$2(\sin x)^2 + 3\cos x = 0$	$\pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z.$ М
$2\sin(3x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$	$\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z.$ Е

Ответ

Гермес, греч. - сын Зевса и Майи, внук Атланта, прадед Одиссея, вестник богов, покровитель путников и путешественников, проводник душ умерших. Гермес может переноситься с Олимпа в любой конец земли с помощью крылатых сандалий. Он покровительствует также торговле и посылает людям богатство. Он изобрел меры, числа и азбуку. Он бог красноречия, но также изворотливости, обмана и воровства.

Задание бригады №2

Решите тригонометрические уравнения и найдите свои ответы в правом столбике. Каждому ответу соответствует буква. Расположите буквы так, как расположены уравнения в левом столбике и назовите фамилию известного ученого, который ввел само понятие функции.

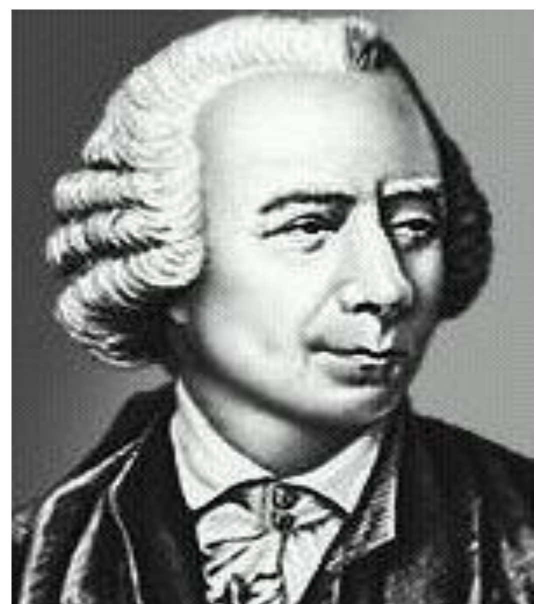
Уравнения	Ответы	
$2\sin x = \sqrt{3}$	$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z$	Й
$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$	$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n\epsilon Z$	Л
$2(\sin x)^2 + 3\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z\,; x = -arctg\frac{1}{3}\pi k, k\epsilon Z$	Р
$4(\sin x)^2 - 2\sin 2x + (\cos x)^2 = 0$	$x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon Z.$	
$3tgx - ctgx = 2$	$x = arctg\frac{1}{2} + \pi n, n\epsilon Z$	Э Е

Ответ: Эйлер

Леонард Эйлер

Леонард Эйлер ввел и само понятие функции и принятую в наши дни символику.

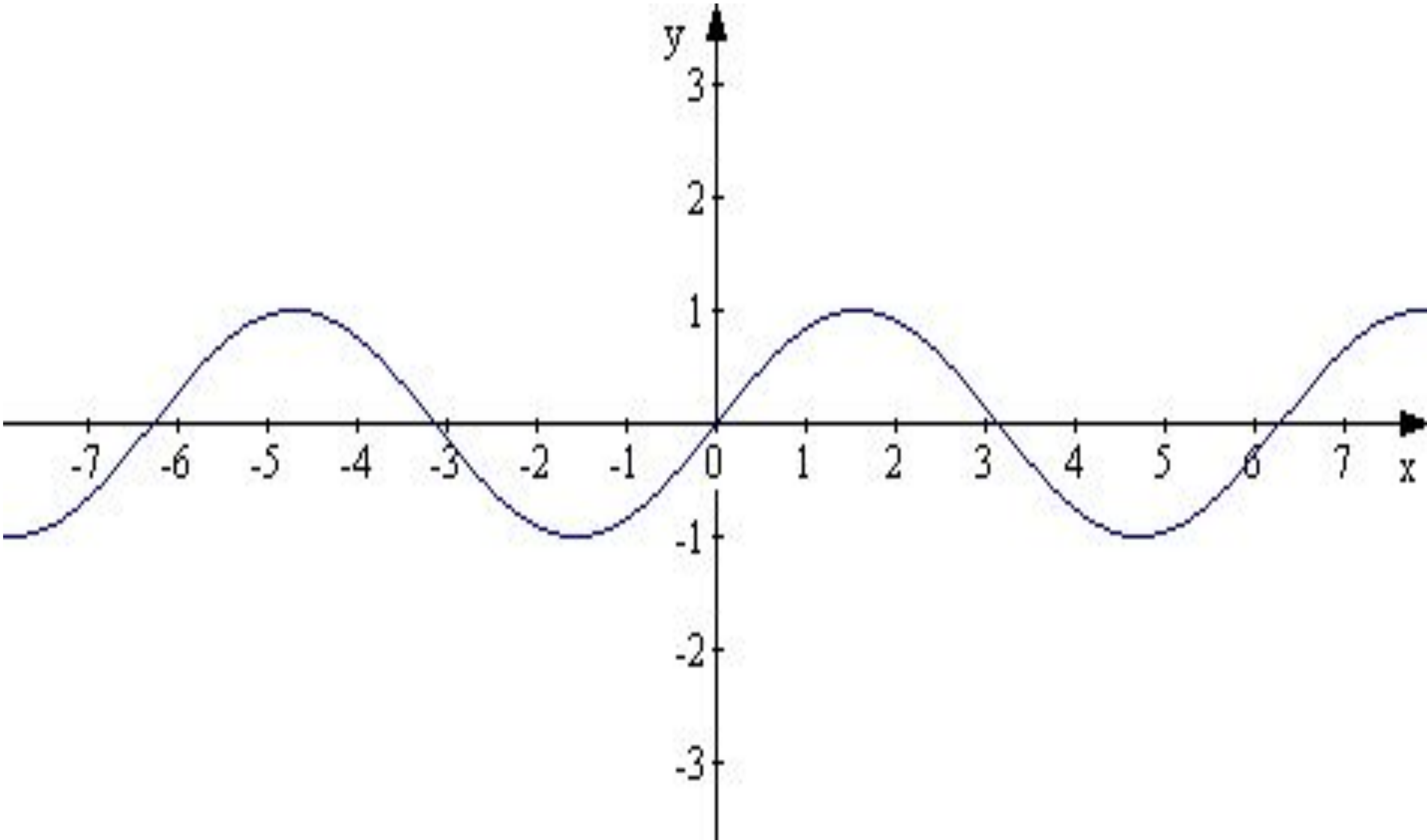
Он придал всей тригонометрии ее современный вид.



Задание бригады №3. Решите тригонометрические уравнения и найдите свои ответы в правом столбике. Каждому ответу соответствует буква. Расположите буквы так, как расположены уравнения в левом столбике и отгадайте название функции.

Уравнения	Ответы	
$\sqrt{2}\cos x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z$	*Н*
$\sin x + \cos x = 0$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z$	*И*
$2(\cos \mathrm{x})^2 - \sin x = -1$	$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n\epsilon Z$	*С*
$-3(\sin x)^2 + \sin 2x + (\cos x)^2 = 0$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z\ ; x = -arctg2 + \pi k, k\epsilon Z$	*С*
$tgx - 2ctgx = -1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z\ ; x = -arctg\frac{1}{3} + \pi k, k\epsilon Z$	*У*

Ответ: функция синус.



Как и многие разделы математики, тригонометрия возникла в древние времена из потребностей людей .Ещё древнегреческие   ученые создали «тригонометрию хорд», выражавшую зависимости между центральными углами круга и хордами, на которые они опираются. Этой тригонометрией пользовался во II в. до н.э. в своих расчетах древнегреческий астроном Гиппарх и греческий ученый Птоломей синуса суммы и разности двух углов.

Первые способы решения треугольников с помощью сторонам и углов треугольника:

Гиппарх

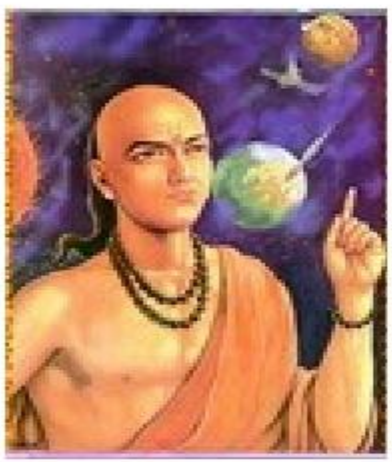
(2 в. до н. э.)

Клавдий Птолемей

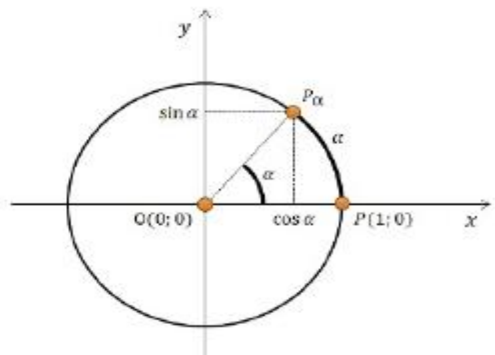
(2 в. н. э.)

Слово «синус» произошло от латинского sinus («перегиб»), которое, в свою очередь, происходит от арабского слова «лжива» («тетива лука»). Слово «косинус» – сокращение словосочетания complementi sinus («синус дополнения»), объясняющего тот факт, что cosa равен синусу угла, дополняющего угол a до П/2, т.е. cosa = sin(П/2-a).

Возникновение синуса и косинуса



sinus – изгиб, кривизна



Cosinus – от «completely sinus» т. е. “дополнительный синус” (или иначе “синус дополнительной дуги”)

Латинское слово tangens переводится как «касательная» («касательная к окружности»)

Первые способы решения треугольников с помощью сторонам и углов треугольника:

Гиппарх

(2 в. до н. э.)

Клавдий Птолемей

(2 в. н. э.)

Латинское слово tangens переводится как «касательная» («касательная к окружности»)

Решите систему уравнений уровня С1

$$\begin{cases} \dfrac{2(\sin x)^2 + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0 \\ y = -\cos x \end{cases}$$

Решим уравнение

$2(\sin x)^2 + 3\sin x + 1 = 0$

$\sin x = t, -1 \le t \le 1.$

$2t^2+3t+1=0$, t=-0,5, t=-1

Выполним обратную за $\sin x = -1$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$y = -\cos(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n) = 0$

не подходит по ОДЗ.

ОДЗ:

$-y > 0, y < 0, -\cos x < 0, \cos x > 0.$

$2.\ \sin x = -\dfrac{1}{2}$

$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z;$

$y = -\cos(-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} < 0$

или

$x = \pi - (-\dfrac{\pi}{6})+2\pi n, n\epsilon Z,$

$x = \dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z$

$y = -\cos(\dfrac{7\pi}{6} + 2\pi n) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} > 0$

не подходит по ОДЗ.

Ответ:

$x = -\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n, n\epsilon Z;\quad y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Литература

- Учебник. Алгебра и начала анализа. 10-11 класс. Колмогоров А.Н.Издательство Просвещение 2014 г.
- 2. Евгений Юрченко, Петр Алтынов, Елена Юрченко, Леонид Звавич, Леонид Шляпочник, Анатолий Медяник. 2600 тестов и проверочных заданий по математике для школьников и поступающих в ВУЗы. Издательство Дрофа.
- Презентация http://www.slideshare.net/artec457/ss-12924247