Решение тригонометрических уравнений с параметрами

МБОУ СОШ №28

Выполнил: учитель математики Алышова Н.С.

Московская область,
г. Мытищи

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
Не приступали (в %)	34,7	64,9	56,6	84,4	87,9	87,7
Приступили, но получили 0 баллов (в %)	23,5	21,2	23,9	11,16	6,08	7,94
1 балл (в %)	22,2	5,1	12,8	1,81	3,1	2,5
2 балла (в %)	19,6	8,8	3	1,84	1,4	1,2
3 балла (в %)	–	–	3,7	0,79	0,65	0,38
4 балла (в %)	–	–	–	–	0,87	0,28
Положительный результат (в %)	41,8	13,9	19,5	4,44	6,02	4,36

	C1	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**
Не приступали (в %)	34,7	64,9	56,6	84,4	**87,9**	87,7
Приступили, но получили 0 баллов (в %)	23,5	21,2	23,9	11,16	**6,08**	7,94
1 балл (в %)	22,2	5,1	12,8	1,81	**3,1**	2,5
2 балла (в %)	19,6	8,8	3	1,84	**1,4**	1,2
3 балла (в %)	–	–	3,7	0,79	**0,65**	0,38
4 балла (в %)	–	–	–	–	**0,87**	0,28
Положительный результат (в %)	41,8	13,9	19,5	4,44	**6,02**	4,36

- **Если в уравнении некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами, то они называются параметрами, а уравнение параметрическим.**

- ***Решить уравнение (или систему), содержащее параметры, это значит, для каждой допустимой системы значений параметров найти множество всех решений данного уравнения (системы).***

1. Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка
2. Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра
3. Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений
4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям

1. Введение дополнительных переменных
2. Применение классических формул
3. Разделение области возможных значений переменных и параметров
4. Использование вспомогательных преобразований
5. Графический метод

Пример 1. (Введение дополнительных переменных, $\boldsymbol{t = \cos^2 x}$*)*

Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$\cos^4 x - (a+2)\cos^2 x - (a+3) = 0$ имеет решение.

Решение.

Введем новую переменную: $t = \cos^2 x$, $t \in [0;1]$. Тогда данное уравнение принимает вид: $t^2 - (a+2)t - (a+3) = 0$.

Чтобы решить получившееся квадратное уравнение с переменной t, найдем его дискриминант: $D = a^2 + 4a + 4 + 4a + 12 = a^2 + 8a + 16 = (a + 4)^2$. Так как $D \geq 0$, квадратное уравнение имеет решение

$$t_{1,2} = \frac{a+2 \pm \sqrt{(a+4)^2}}{2} = \frac{a+2 \pm |a+4|}{2} = \frac{a+2 \pm (a+4)}{2};$$

$$t_1 = \frac{a+2+a+4}{2} = \frac{2a+6}{2} = \frac{2(a+3)}{2} = a + 3;$$

$$t_2 = \frac{a+2-a-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Число -1 не принадлежит промежутку $[0; 1]$, таким образом, заданное нам тригонометрическое уравнение с параметром имеет решение при условии

$0 \leq a + 3 \leq 1$, $-3 \leq a \leq -2$.

Ответ. Уравнение $cos^4 x - (a + 2)cos^2 x - (a + 3) = 0$ имеет решение при $a \in [-3; -2]$.

Пример **2** *Применение классических формул*

Решить уравнение $\cos(a+x)+\cos(a-x)=2sinxa$

Решение:

Уравнение легко преобразуется к виду:

$2\ cosa\ cosx = 2\ sina.$

Если $\cos a = 0$, то $a = \frac{\pi}{2} + \pi l, l \in Z, \sin a \neq 0$, и уравнение корней не имеет.

Если $\cos a \neq 0$; $\cos x = tg\ a$**.** Последнее уравнение имеет корни, если

$-1 \le tg\ a \le 1$, тогда

$-\frac{\pi}{4}+\pi n \leq a \leq \frac{\pi}{4}+\pi n, n \in Z$ и $x=\pm\arccos(tg\ a)+2\pi k, k \in Z$.

Ответ: при $a \in \left[-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right], n \in Z$ $x=\pm\arccos(tg\ a)+2\pi k, k \in Z$;

при $a \in \left(\frac{\pi}{4}+\pi m; \frac{3\pi}{4}+\pi m\right), m \in Z$ корней нет.

Пример **3** *(Разделение области возможных значений переменных и параметров)*

Решить уравнение $sin a x \pi = 0$

Решение:

Если $a = 0$, то x – любое число, так как имеем очевидное равенство

$$\sin 0 = 0.$$

Если $a \neq 0$, то $x = \frac{n}{a}$, где $n \in Z$.

Ответ: при $a = 0$ $x \in R$;

При $a \neq 0$, $x = \frac{n}{a}$, где $n \in Z$.

LOGO

Пример **4** *(Вспомогательные преобразования)*

Решить уравнение $sin^4x + cos^4x = a$

Решение:

Выполняем очевидные преобразования:

$$sin^4x + cos^4x + 2sin^2xcos^2x - 2sin^2xcos^2x = a;$$

$$(sin^2x + cos^2x)^2 - \frac{1}{2}sin^2 2x = a;$$

$$2 - sin^2 2x = 2a;$$

$$sin^2 2x = 2 - 2a;$$

$$1 - cos4x = 4 - 4a;$$

LOGO

$cos4x = 4a - 3.$

Последнее уравнение будет иметь решение если

$|4a - 3| \leq 1; \quad -1 \leq 4a - 3 \leq 1; \qquad 2 \leq 4a \leq 4$

$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$

Итак, если $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi}{2}k, k \in Z.$

Ответ: при $a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos(4a - 3) + \frac{\pi}{2}k, k \in Z;$

При $a \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$решений нет.

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. справоч. пособие по математике. – 3-е изд. доработ. – Мн.: ООО «Асар», 2004. – 464 с.
2. Голубев В.И. Решение сложных и нестандартных задач по математике. – М.: ИЛЕКСА, 2007. – 252 с.: ил.
3. Локоть В.В. Задачи с параметрами и их решение: Тригонометрия: уравнения, неравенства, системы. 10 класс. – 3-изд., испр. и доп. – М.: Аркти, 2008. – 64 с.
4. 4. Севрюков П.Ф. Школа решения задач с параметрами: учебно-методическое пособие / П.Ф. Севрюков, А.Н. Смоляков. – Изд. 2-е, испр. и доп. – М.: Илекса; Народное образование; Ставрополь: Сервисшкола, 2009 – 212 с.

Спасибо!

МБОУ СОШ №28