Векторы
и их применение при доказательстве теорем.

Выполнила: учитель математики

МБОУ «Дедиловская СОШ»

Соловьева Надежда Юрьевна

Цели и задачи презентации:

- познакомиться с историей возникновения векторов;
- повторить основные понятия и действия над векторами;
- рассмотреть доказательство теорем векторным методом.

Интерес к векторам и векторному исчислению пробудился у математиков в XIX. в. в связи с потребностями механики и физики. Впервые вектора были введены в работах У. Гамильтона и Г. Гроссмана. Однако исток и исчисления с направленными отрезками возникли в далеком прошлом.

В Древней Греции пифагорейцы, открыв иррациональные числа, которые нельзя выразить дробями (например: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ и др.), не решились ввести более широкое толкование числа.

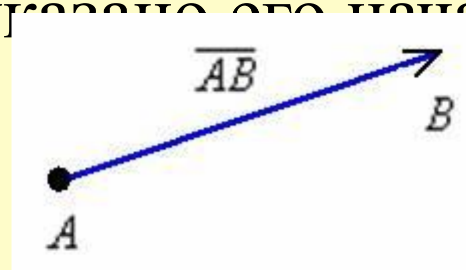
Математики того времени попытались свести вопросы арифметики и алгебры к решению задач геометрическим путем. Таким образом, было положено начало геометрической теории отношений Евдокса (408 – 355 гг. до н.э.), а позднее «геометрической алгебре».

В геометрическом исчислении, изложенном в труде Евклида «Начала», сложение и вычитание сводились к сложению и вычитанию отрезков, а умножение – к построению прямоугольников на отрезках, соответствующих по длине множителям.

Фламандский ученый С. Стевин в своем трактате «Начала статики» рассматривая сложение сил, приходит к выводу, что для нахождения результата сложения двух сил, действующих под углом 90˚, необходимо воспользоваться «параллелограммом сил», при этом для обозначения сил он ввел стрелки.

Продолжительное время вектор рассматривался только как направленный отрезок, один из концов которого называли началом, а второй – его концом. С разработкой теории преобразований вектор стали рассматривать не только как направленный отрезок, но и как параллельный перенос, заданный парой точек – точкой О и ее образом О′.

Вектором называется направленный отрезок, для которого указано его начало и конец:



В данном случае началом отрезка является точка **А**, концом отрезка – точка **В** . Сам вектор обозначен через . **Направление** имеет существенное значение, если переставить стрелку в другой конец отрезка, то получится вектор , и это уже **совершенно другой вектор**

Отдельные точки плоскости, пространства удобно считать так называемым *нулевым вектором* . У такого вектора конец и начало совпадают.

1) Векторы можно записать двумя большими латинскими буквами:

и так далее. При этом первая буква ***обязательно*** обозначает точку - начало вектора, а вторая буква точку - конец вектора.

2) Векторы также записывают маленькими латинскими буквами:

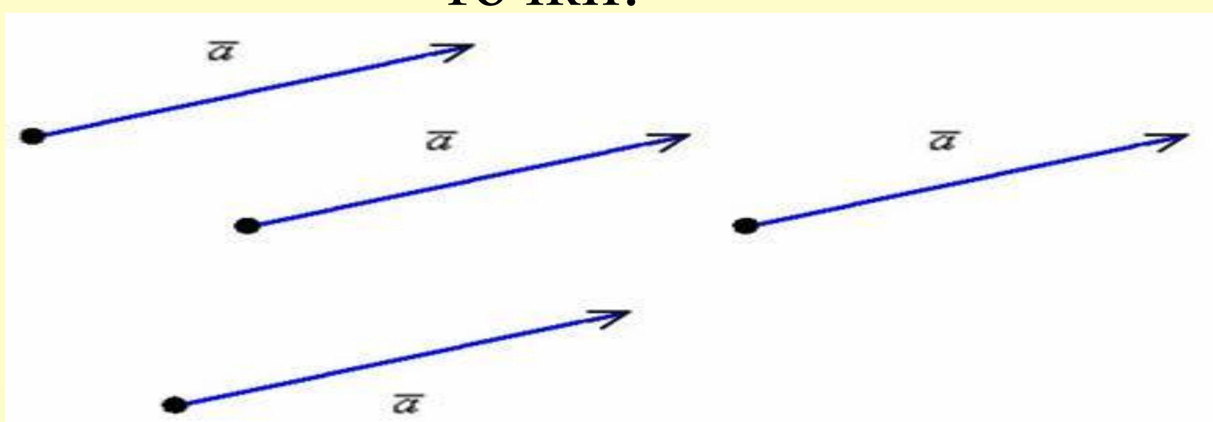
В частности, вектор можно для краткости переобозначить маленькой латинской буквой :

Длиной или ***модулем*** ненулевого вектора называется длина отрезка АВ. Длина нулевого вектора равна нулю.

Длина вектора обозначается знаком модуля: ,

В аналитической геометрии рассматривается ***свободный вектор***.

Это – вектор, который можно отложить от любой точки:



Два вектора называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

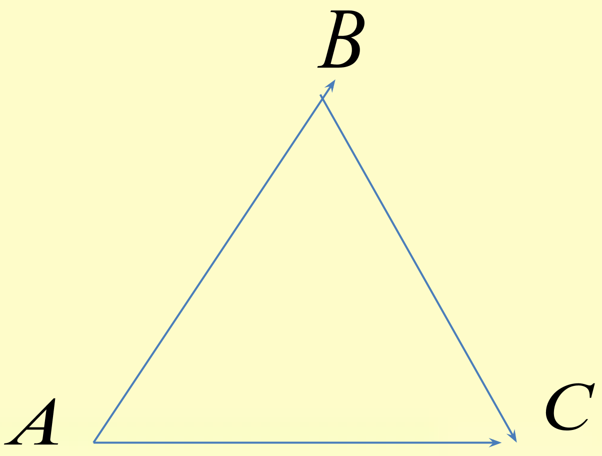
Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{в}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно.

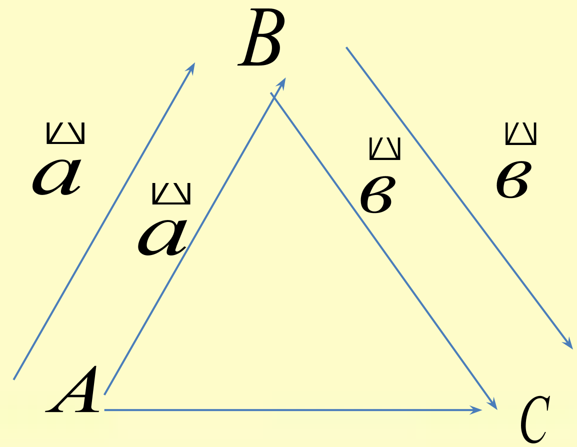
В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{в}$ называются ***сонаправленными*** , а во втором – ***противоположно направленными*** .

Сложение векторов по правилу треугольников

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{в}$ - два вектора . Отметим произвольную точку А и отложим от этой точки вектор $\overline{AB}$, равный $\vec{a}$ Затем от точки В отложим вектор $\overline{BC}$, равный $\vec{в}$.

Вектор $\overline{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a} + \vec{в}$





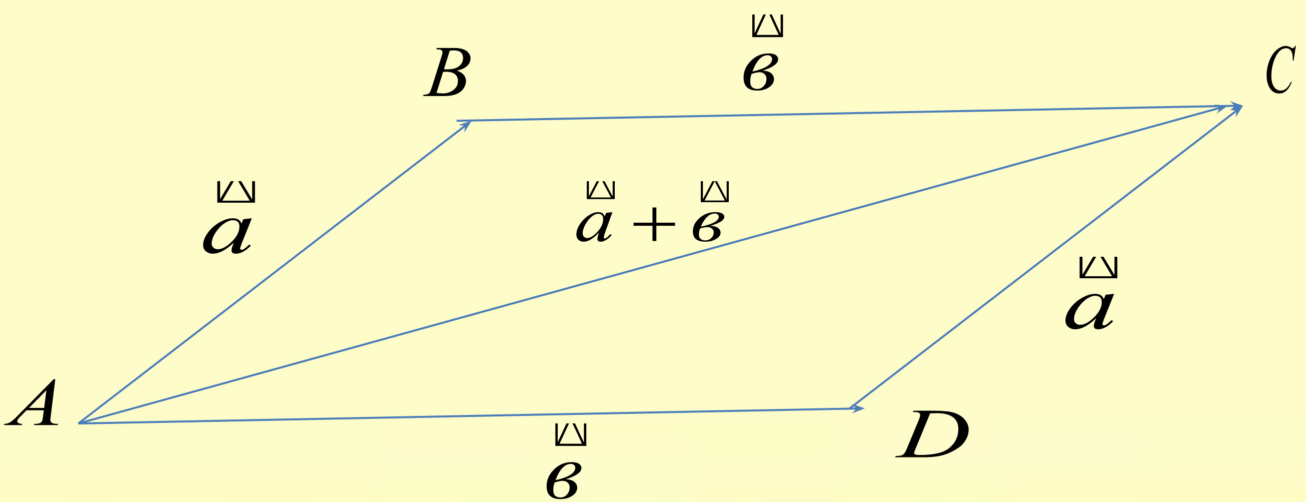
Сложение векторов по правилу параллелограмма.

Векторы и $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны.

От произвольной точки А отложим векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$ и на этих векторах построим параллелограмм $ABCD$

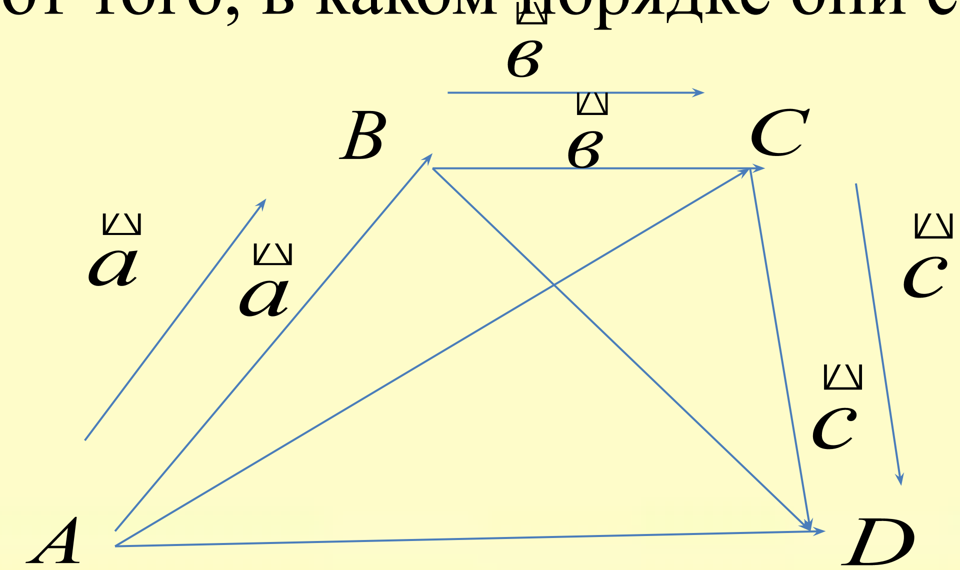
По правилу треугольника $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Аналогично $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{b} + \vec{a}$.



Сумма нескольких векторов.

Сложение нескольких векторов производится следующим образом: первый вектор складывается со вторым, затем их сумма складывается с третьим вектором и т.д. Из закона сложения векторов следует, что сумма нескольких векторов не зависит от того, в каком порядке они складываются.



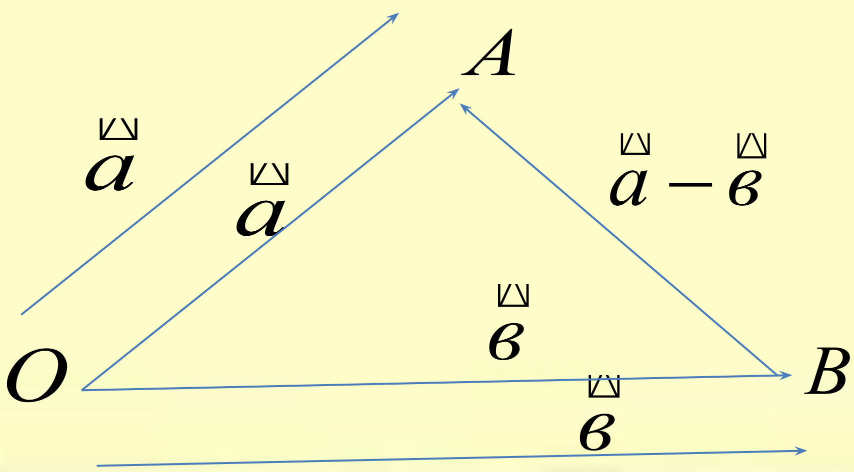
Вычитание векторов.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\vec{b}$ равна вектору $\vec{a}$.

Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} - \vec{b}$.

Отметим на плоскости произвольную точку O и отложим от этой точки векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

По правилу треугольника $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA}$ или $\vec{b} + \overrightarrow{BA} = \vec{a}$.



Произведение вектора на число

Произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число λ является такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$, причём векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $\lambda \geq 0$ и противоположно направлены при $\lambda < 0$.

Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов

называется произведение их длин на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

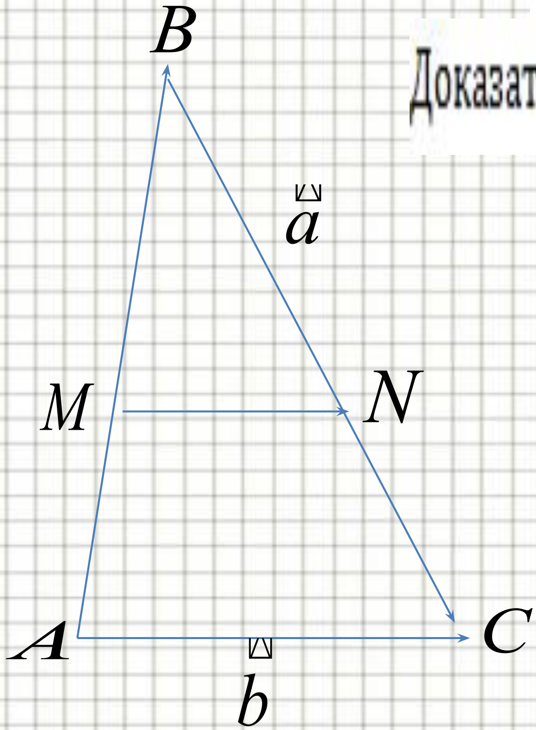
По определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cos(\vec{a} \hat{\ } \vec{b}).$$

Скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю

тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

Теорема. Средняя линия треугольника параллельна его третьей стороне и равна половине ее.



Доказательство. Рассмотрим Δ ABC. Пусть $\overline{AB} = \vec{c}$, $\overline{BC} = \vec{a}$, и $\overline{AC} = \vec{b}$,

тогда по определению суммы векторов: $\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$.

Пусть M и N – середины сторон AB и BC ΔABC, тогда

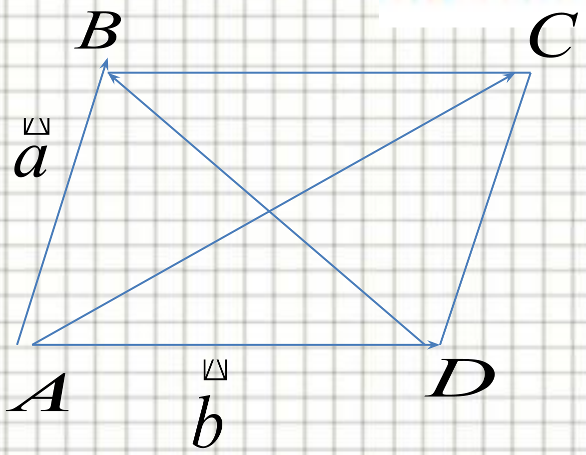
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{\vec{c}}{2} + \frac{\vec{a}}{2} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{a}) = \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Так как $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{b}$, то $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Таким образом, $MN \upuparrows AC$, следовательно, $[AC] \parallel [MN]$.

Так как $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, то $|MN| = \frac{1}{2}|AC|$.

Теорема. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный параллелограмм.

1. Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, = \vec{b}\ (\ |AB| = [CD] = \vec{a};\ \ |AD| = |BC| = \vec{b})$.

2. По определению суммы и разности векторов $AC = a + b$, $DB = a - b$.

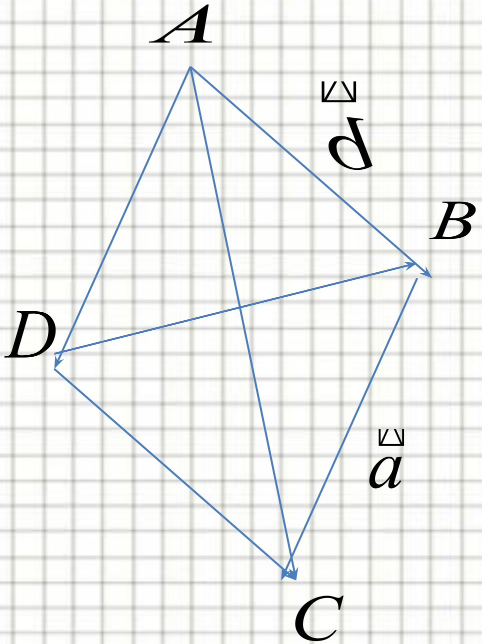
3. Используя свойство скалярного квадрата, получим:

$$AC^2 + DB^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 + (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2,$$

то есть $|AC|^2 + |DB|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |AD|^2$,

так как $\overrightarrow{AC}^2 = |AC|^2$, $\overrightarrow{DB}^2 = |DB|^2$

Теорема. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный ромб.

Из определения ромба $\overline{AB} = \overline{DC} = \vec{a}, \overline{AD} = \overline{BC} = \vec{b}$.

1. Введем обозначения: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$.

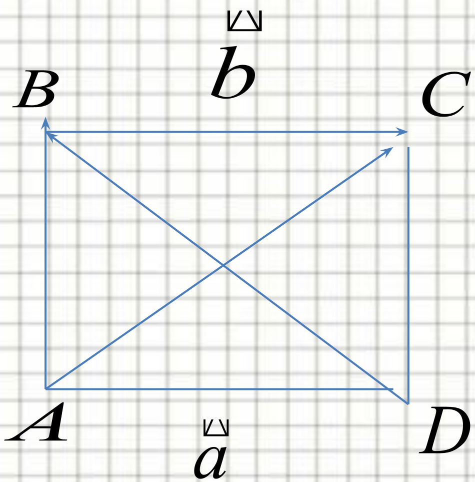
2. По определению суммы и разности векторов $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}, \quad \overline{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

3. Рассмотрим $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = a^2 - b^2$.

4. Так как стороны ромба равны, то $a = b$. Следовательно, $\overline{AC} \cdot \overline{DB} = 0$.

Из последнего получаем: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$, то есть $[DB] \perp [AC]$.

Теорема. Диагонали прямоугольника равны между собой.



Доказательство. Пусть $ABCD$ – данный прямоугольник.

1. Введя обозначения $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, получим $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$.

2. Найдем квадраты диагоналей, используя свойство скалярного произведения:

$$\overrightarrow{AC}^2 = |AC|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2,$$

Итак, $|AC|^2 = a^2 + b^2$. Далее,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, так как в прямоугольнике $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$\overrightarrow{DB}^2 = |DB|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = a^2 + b^2, \text{так как } \vec{a} \perp \vec{b}.$$

Следовательно, $|AC|^2 = |DB|^2 = a^2 + b^2$,

то есть $|AC| = |DB|$

Используемая литература и ссылки

http://s_ob.mos.edu54.ru/p5aa1...

http://slalomum.ru/zakachay/ba…

www.budivelne.info/logs » Шаблоны для школьных презентаций

http://www.smarttehno.ru/port/…

▼

Геометрия: Учеб. Для 7 – 9 кл. общеобразоват. учреждений/ Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 6-е изд. – М.: Просвещение, 1996.

Глейзер Г. И. История математики в школе в VII – IX кл.: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1981.

Энциклопедический словарь юного математика/ Сост. Э-68 А. П. Савин. - М.: Педагогика, 1989.