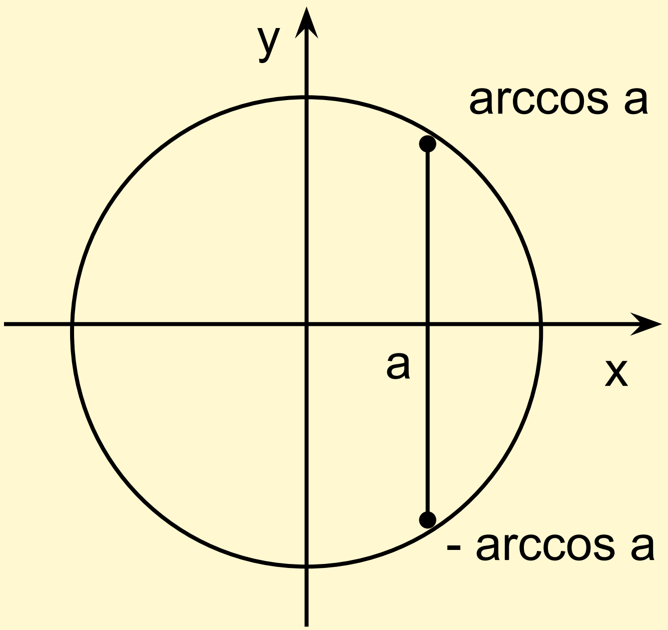
«РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

1) $\cos x = a$

Если a > 1 и a < - 1, то уравнение не имеет решений

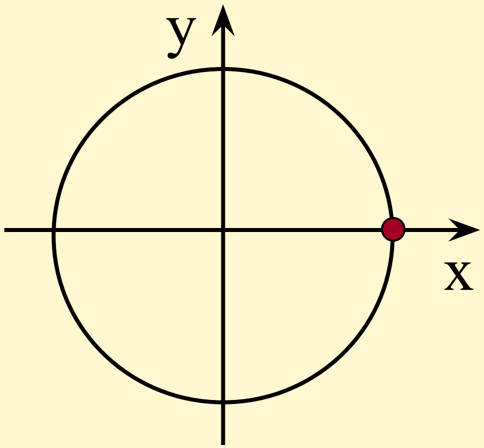
Если -1 ≤ a ≤ 1, то уравнение имеет бесконечное множество решений



$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in Z$$

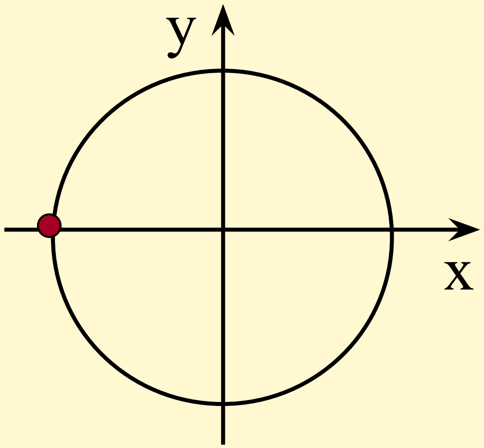
Особая форма записи решения уравнений вида:

$\cos x = 1$



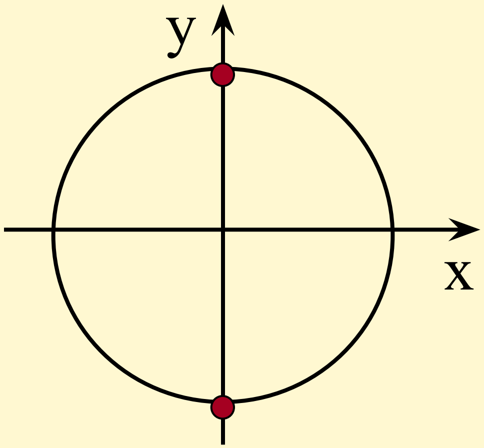
$$x = 2\pi k,\ \ k \in Z$$

$\cos x = -1$



$$x = \pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$$

$\cos x = 0$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$$

Пример 1. Решите уравнение

$$а)\ \cos x = \frac{1}{2}, \qquad x = \pm\arccos\frac{1}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,$$

$$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

$$б)\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi k,\ k \in Z.$$

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in Z, \qquad x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

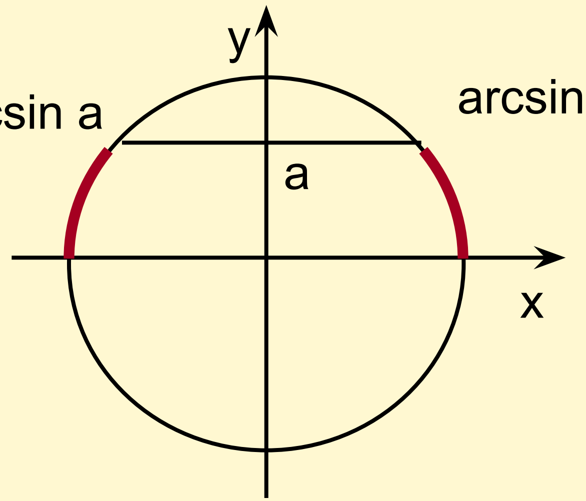
$$в)\ \cos x = \frac{2}{3}, \quad x = \pm\arccos\frac{2}{3} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

$$г)\ \cos x = 3, \quad \textit{нет решений},\ \textit{т.к.}\ 3 > 1$$

2) $\sin x = a$

Если $a > 1$ и $a < -1$, то уравнение не имеет решений

Если $-1 \leq a \leq 1$, то уравнение имеет бесконечное множество решений



$x_1 = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$x_2 = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$

или

$$\boxed{x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in Z}$$

Если $k = 2n$ (четное), то $x = (-1)^{2n} \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$

$$x = \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

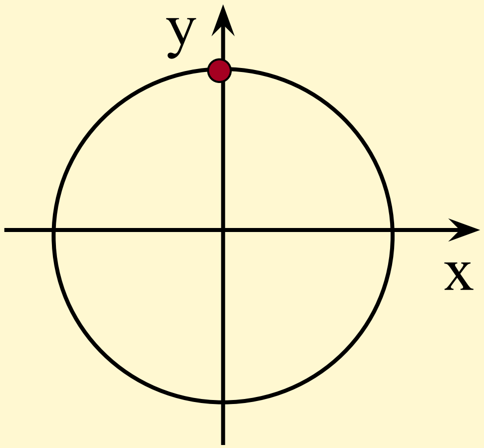
Если $k = 2n + 1$ (нечетное), то $x = (-1)^{2n+1} \arcsin a + \pi(2n+1), \quad n \in Z$

$$x = -\arcsin a + 2\pi n + \pi, \quad n \in Z$$

$$x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

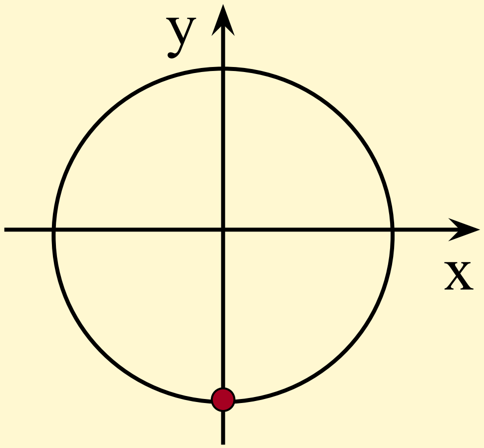
Особая форма записи решения уравнений вида:

$\sin x = 1$



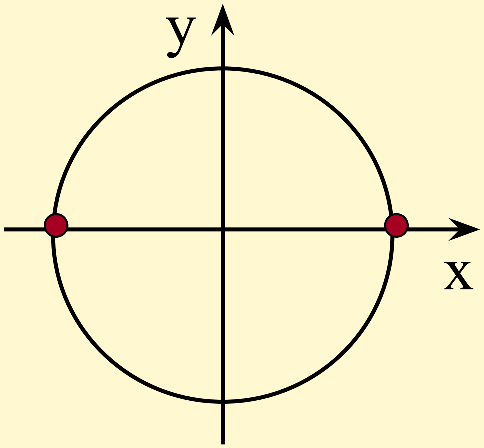
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$\sin x = -1$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in Z$$

$\sin x = 0$



$$x = \pi k, \quad k \in Z$$

Пример 2. Решите уравнение

$$a)\ \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k,\ k \in Z,$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in Z.$$

$$б)\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k,\ k \in Z.$$

$$x = -(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k,\ k \in Z, \qquad x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z,$$

$$в)\ \sin x = \frac{1}{7}, \quad x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{7} + \pi k,\ k \in Z.$$

$$г)\ \sin x = -2,\textit{нет решений, т.к. } -2 < -1$$

3) $tgx = a$

$Ha\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ *уравнение* $tgx = a$ *имеет единственный*

корень $x = arctga$

Т.к. функция y = tg x периодическая с основным периодом π, то значение функции будет повторяться через πk, kЄZ.

Следовательно,

$\boxed{x = \text{arctg } a + \pi k, \quad k \in Z}$

- все решения уравнения tg x = a

Пример 3. Решите уравнение

$$а)\ \ tgx=\sqrt{3}, \qquad x=arctg\sqrt{3}+\pi k,\ k\in Z,$$

$$x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in Z.$$

$$б)\ \ tgx=-1, \qquad x=arctg(-1)+\pi k,\ k\in Z.$$

$$x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z.$$

$$в)\ \ ctgx=\sqrt{3}, \qquad tgx=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$x=arctg\frac{1}{\sqrt{3}}+\pi k,\ k\in Z, \qquad x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.$$