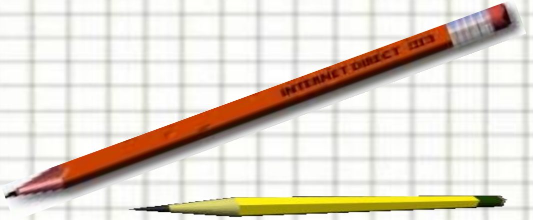
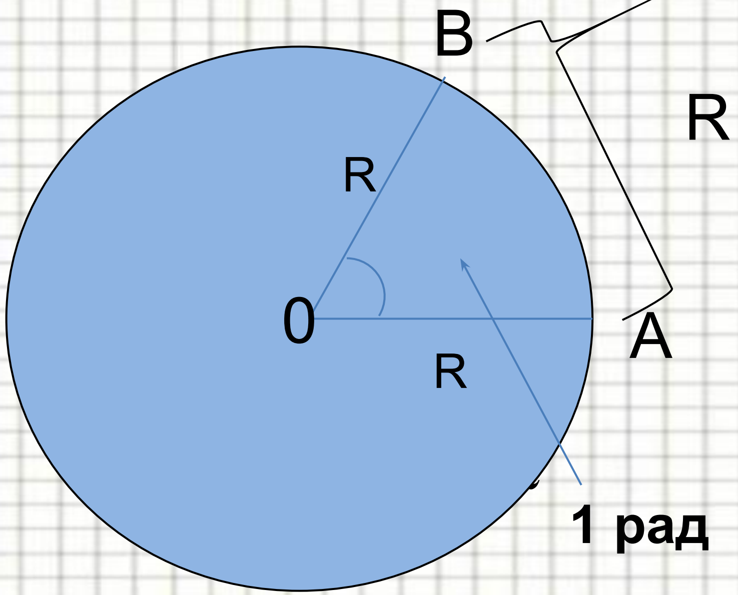


# Введение в тригонометрию

## Числовая окружность

## Радианная мера угла




**Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.**

Найдем градусную меру угла в 1 радиан. Так как дуга длиной $R$ (полуокружность) стягивает центральный угол в $180^0$, то дуга длиной $R\pi$ стягивает угол в $180^0$ раз меньший, т.е.

$$1\,рад = (\frac{180}{\pi})^0.$$

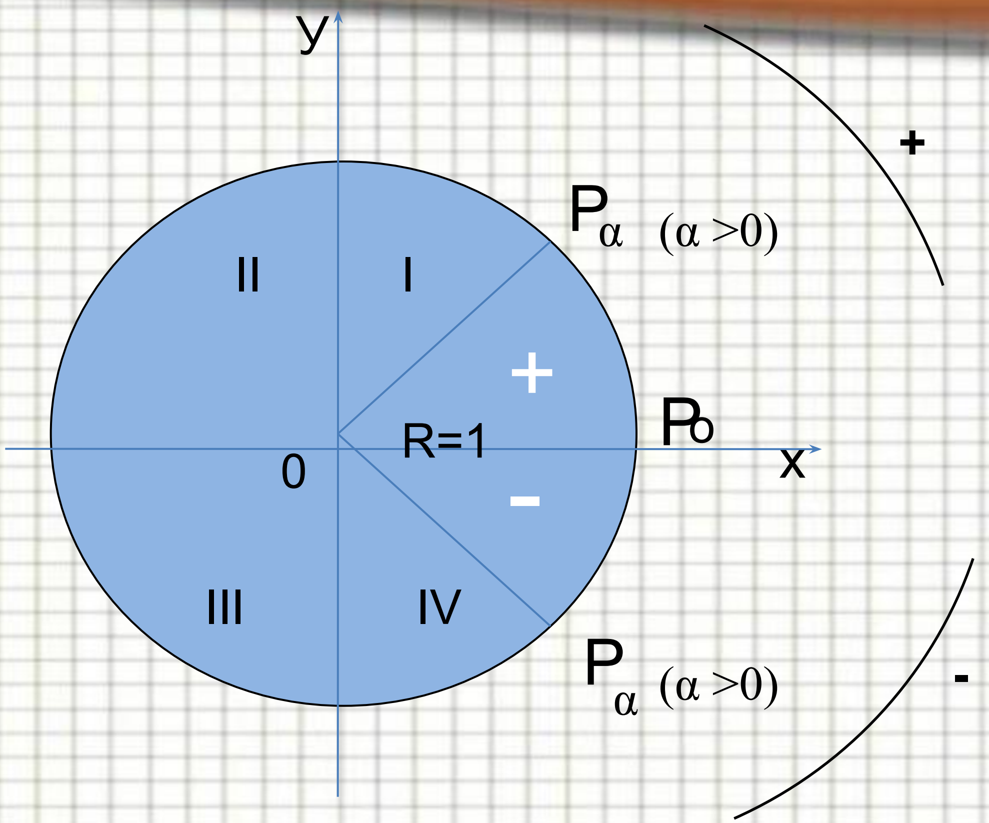
Так как $\pi$ =3,14, то 1 рад=$57{,}3^0$.

Если угол содержит *а* радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha\,рад = (\frac{180}{\pi}\alpha)^0.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\,радиан \qquad 1\,радиан = \frac{180^\circ}{\pi}$$

# Положительные и отрицательные углы в окружности




Начало отсчета углов - в точке (1;0)

$OP_o \longrightarrow 0P_\alpha$ $\Leftrightarrow$ **(α >0)**

повернули на угол α против часовой стрелки

$0P_o \longrightarrow OP_\alpha$ $\Leftrightarrow$ **(α >0)**

повернули на угол по часовой стрелки

Угол поворота радиуса $OP_o$ **против** часовой стрелки считается ***положительным***, а **по** часовой --- ***отрицательным***

# Радианная мера угла

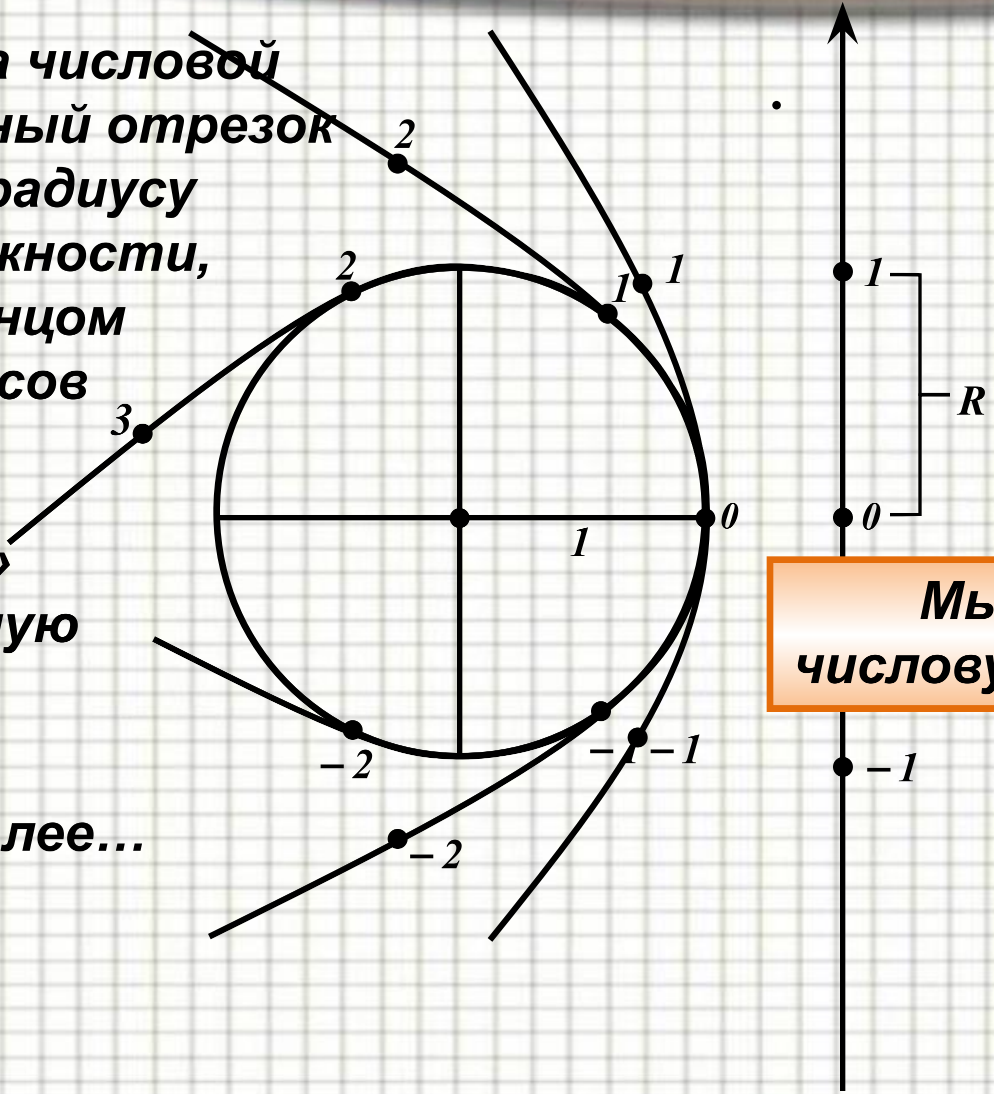
***Единичной окружностью*** называется окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

# Числовая окружность.

**Начало отсчета числовой прямой, единичный отрезок которой равен радиусу единичной окружности, совместим с концом одного из радиусов**

**Затем будем «наматывать» числовую прямую на окружность**

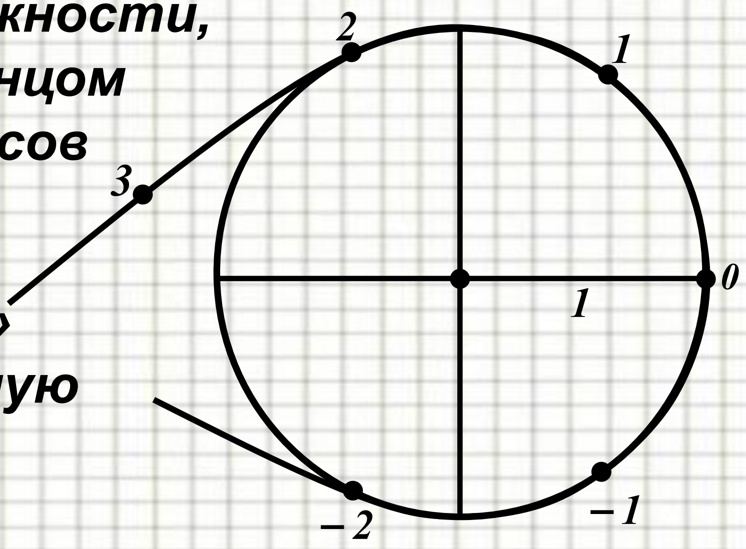
**И так далее…**




**Мы получили числовую окружность**

# Числовая окружность.

**Начало отсчета числовой прямой, единичный отрезок которой равен радиусу единичной окружности, совместим с концом одного из радиусов**




**Затем будем «наматывать» числовую прямую на окружность**

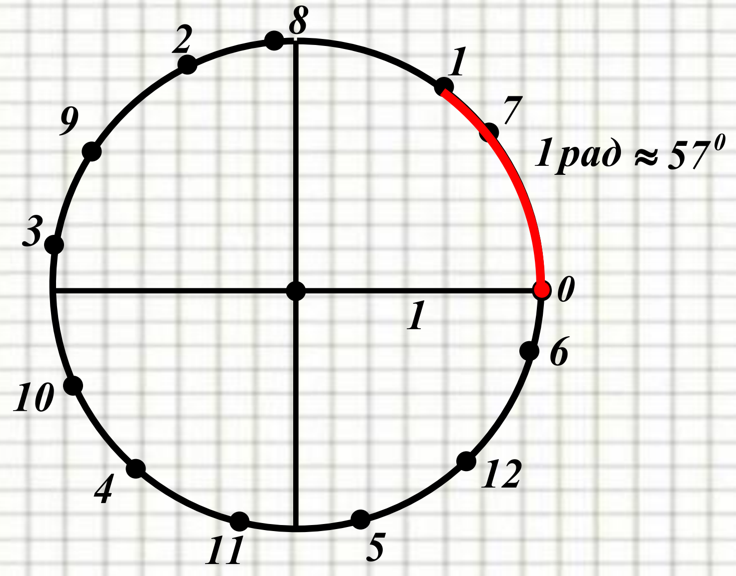
**И так далее…**

**Таким образом, каждой точке числовой прямой будет поставлена в соответствие точка единичной окружности.**

**Мы получили числовую окружность**

# Числовая окружность.

**Проследите за тем как откладываются на числовой окружности положительные числа.**

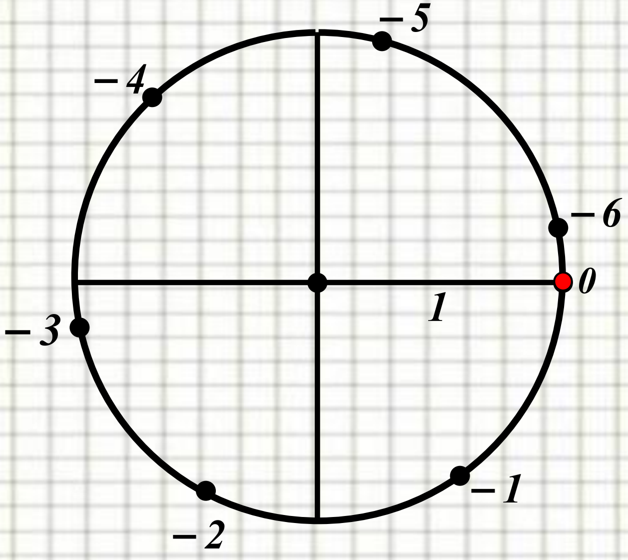



***И так далее…***

***Очевидно, что каждой точке числовой окружности соответствует бесконечно много чисел***

# Числовая окружность.

**Проследите за тем как откладываются на числовой окружности отрицательные числа.**

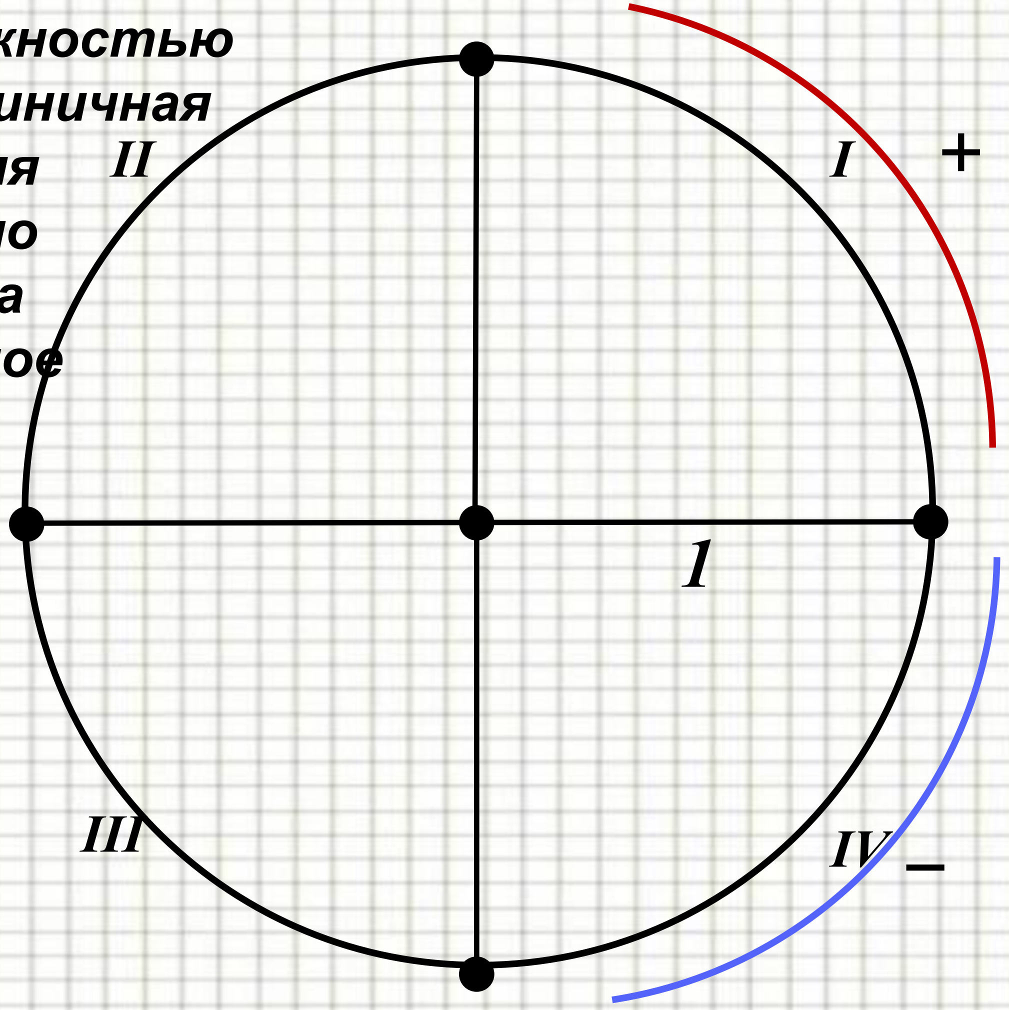


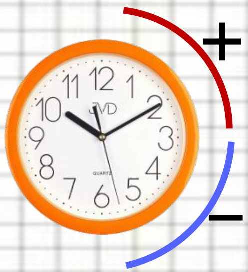

*И так далее…*

$1 рад \approx 57^0$

# Числовая окружность.

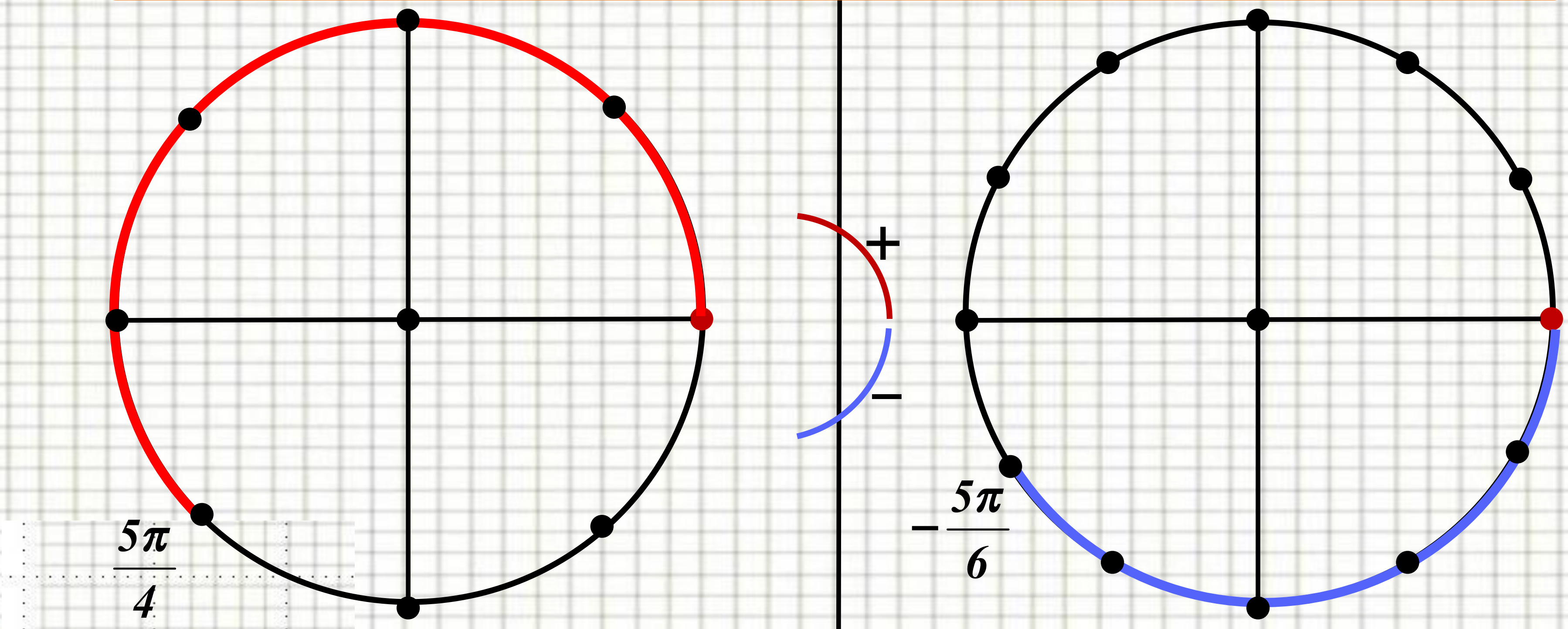
**Числовой окружностью называется единичная окружность, для которой указано начало отсчета и положительное направление**



# Два макета.

*Пример. Отметим число $\frac{-5\pi}{6}$. Для этого от начала отсчета по часовой стрелке отложим дугу длины $\frac{5\pi}{6}$. Конец этой дуги будет соответствовать данному числу.*

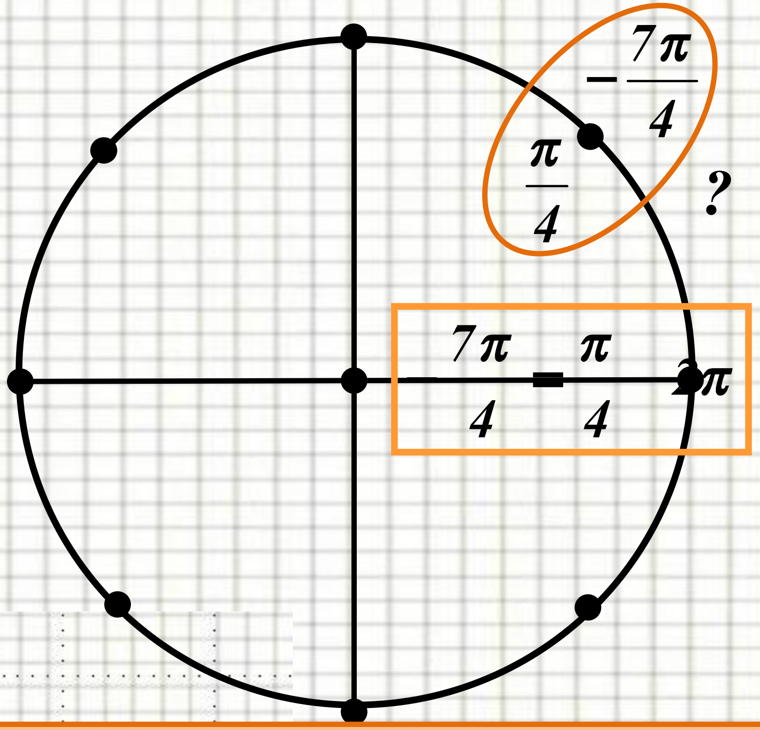


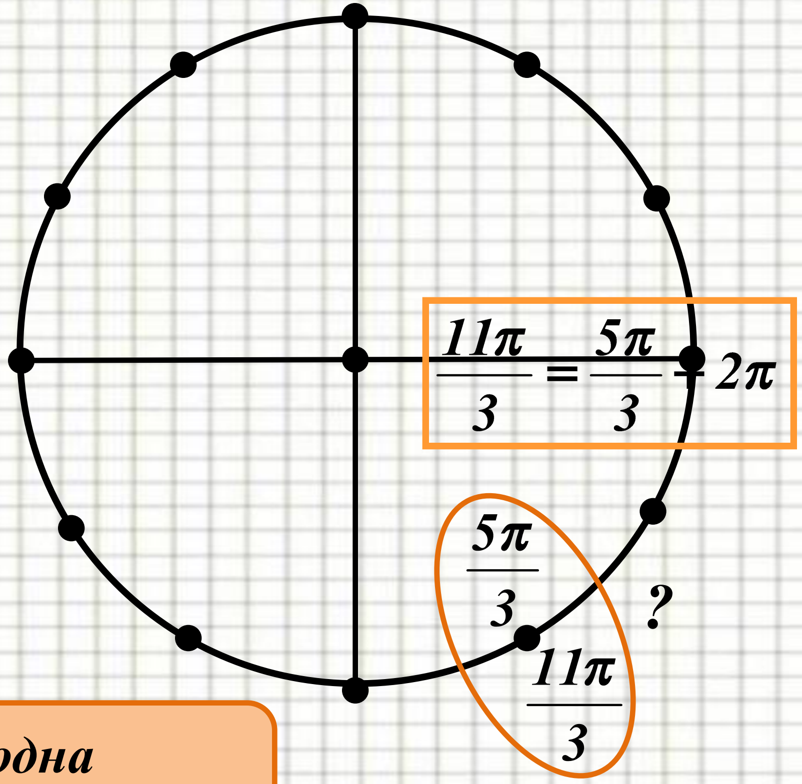

*Отмечаем числа со знаменателем 1, 2, 4*

*Отмечаем числа со знаменателем 1, 2, 3, 6*

# Некоторые свойства.

***Точке числовой окружности, в отличии от точки числовой прямой, соответствует не одно число.***



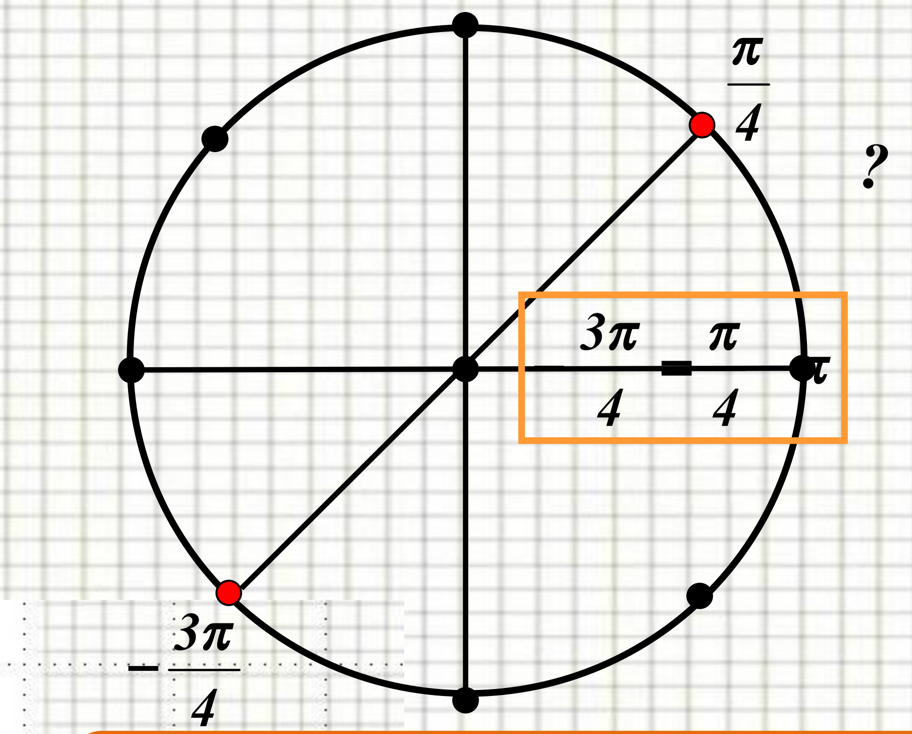



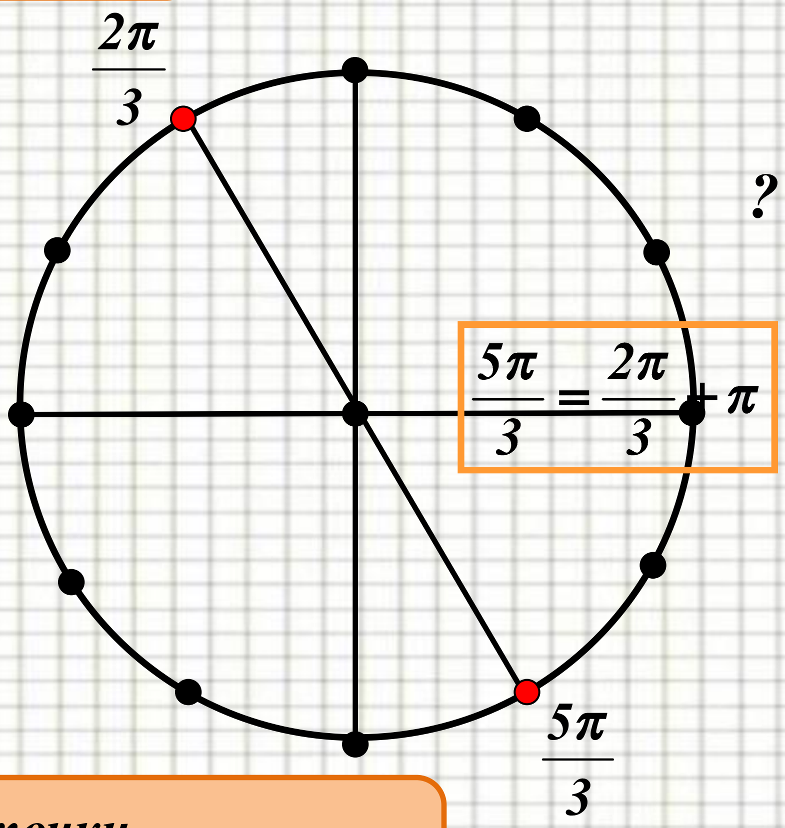

***Числам t и t +2πk (k ϵ Z) соответствует одна точка числовой окружности***

назад

# Некоторые свойства.

**_Симметрия относительно центра окружности_**

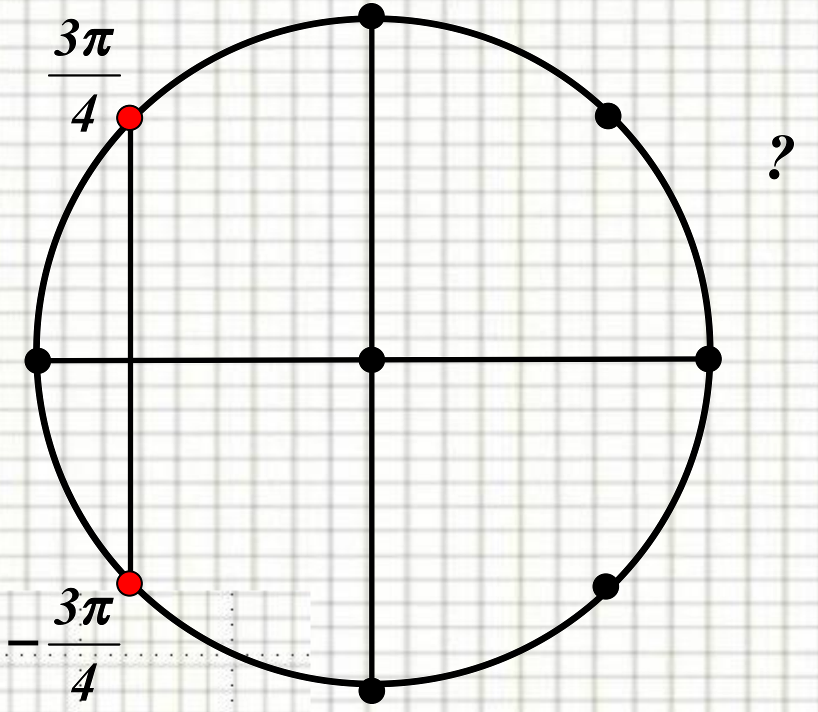


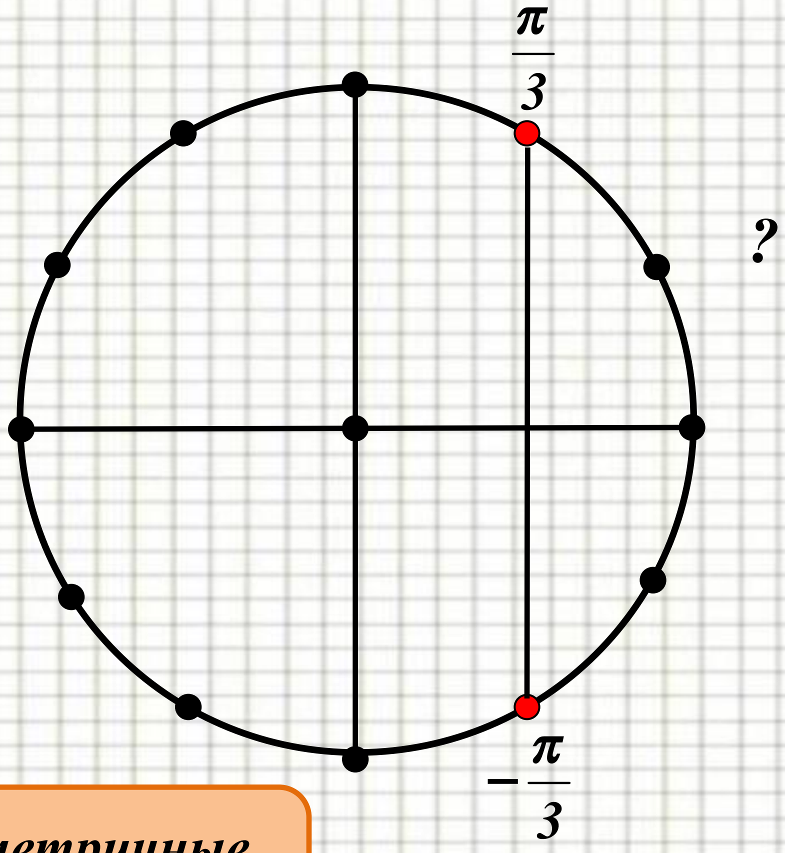




**_Числам $t$ и $t + \pi k$ ($k \in Z$) соответствуют точки, симметричные относительно центра окружности_**

# Некоторые свойства.

***Симметрия относительно горизонтального диаметра***

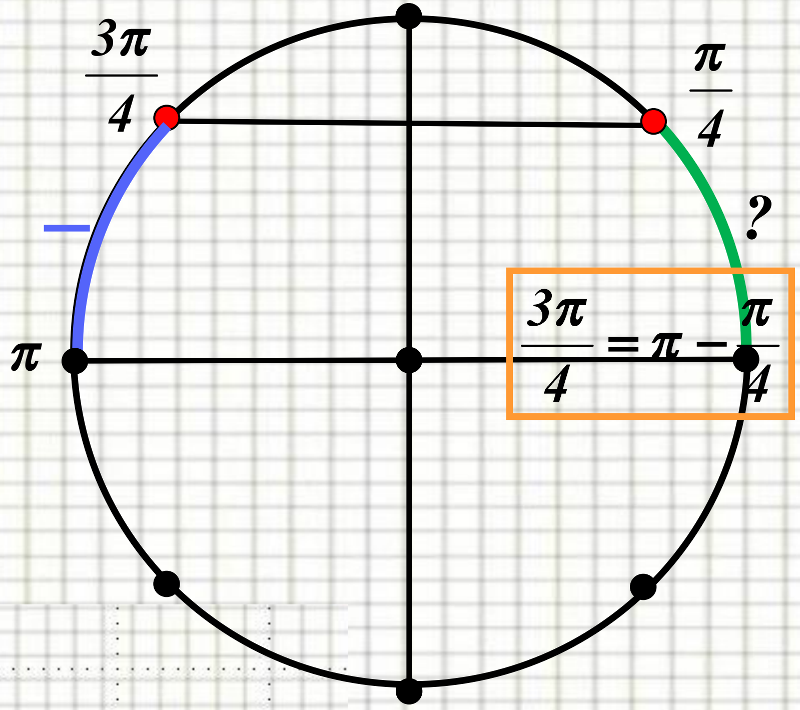


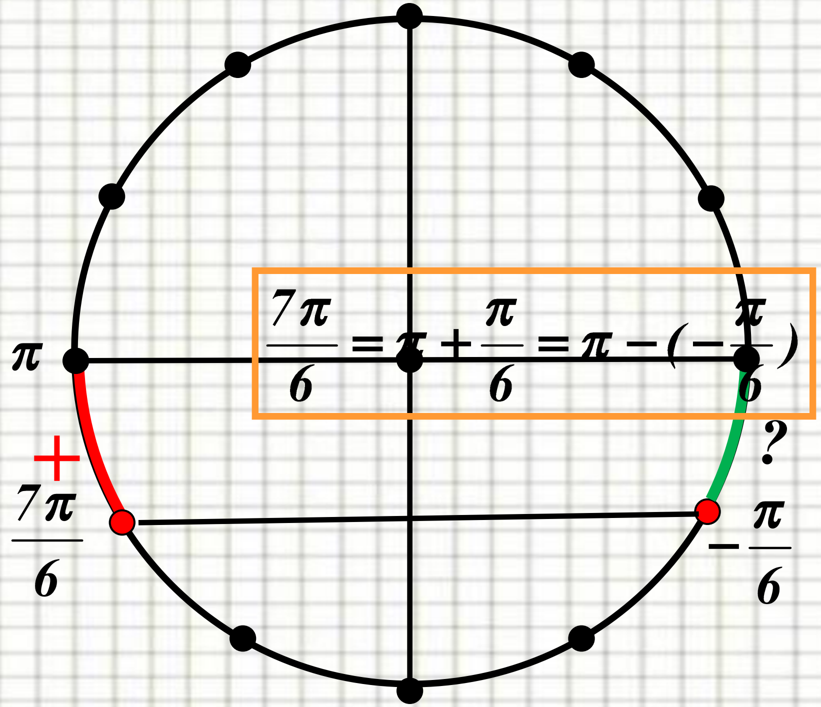




***Числам t и –t соответствуют точки, симметричные относительно горизонтального диаметра.***

# Некоторые свойства.

**Симметрия относительно вертикального диаметра**




***Числам t и π–t соответствуют точки, симметричные относительно вертикального диаметра.***

# Как отметить на окружности большие числа?

$$\frac{115\pi}{6}=\left(18+\frac{7}{6}\right)\cdot\pi=\frac{7\pi}{6}+18\pi=\boxed{\frac{7\pi}{6}}+9\cdot 2\pi$$

1 свойство:числам 1 свойство: числам t 1 свойство:числам t и 1 свойство:числам t и t1 свойство: числам t и t 1 свойство:числам t и t +21 свойство:числам t и t +2π1 свойство:числам t и t +2πk (k 1 свойство:числам t и t +2πk (k є1 свойство:числам t и t +2πk (k є Z) 1 свойство:числам t и t +2πk (k є Z) соответствует одна точка числовой окружности

Подумай, как воспользоваться свойством и составь алгоритм

1) Выделить целую четную часть

2) Воспользоваться первым свойством

(числам $\frac{115\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$ соответствует одна точка окружности)

**Потренируйся выполнять первый шаг алгоритма**

$$-\frac{37\pi}{6}=-\left(6+\frac{1}{6}\right)\cdot\pi=-6\pi\boxed{-\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{173\pi}{3}=\left(56+\frac{5}{3}\right)\cdot\pi=56\pi+\boxed{\frac{5\pi}{3}}$$

$$-\frac{1085\pi}{4}=-\left(270+\frac{5}{4}\right)\cdot\pi=$$

$$=-270\pi\boxed{-\frac{5\pi}{4}}$$

$2\pi=360^0$

$$967^0=2\cdot 360^0+\boxed{247^0}$$

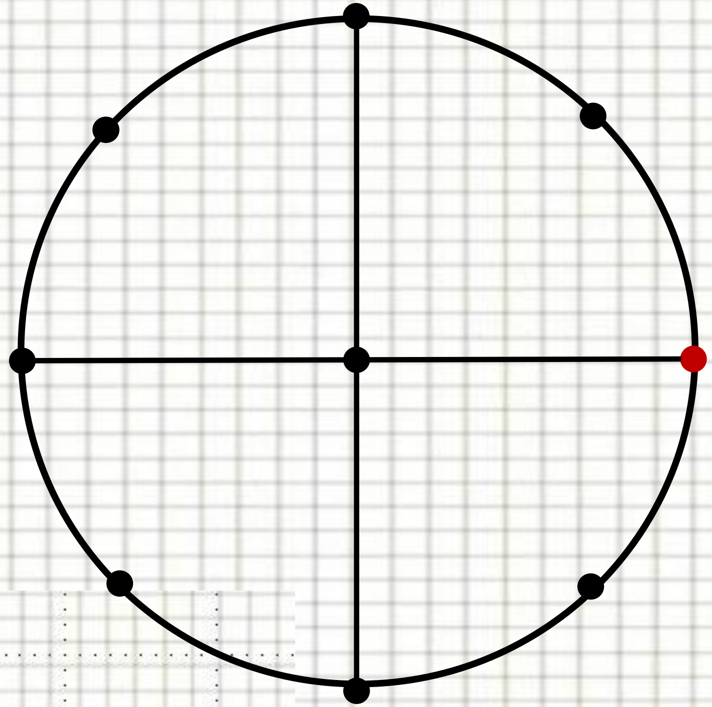
$$-5078^0=-14\cdot 360^0\boxed{-38^0}$$

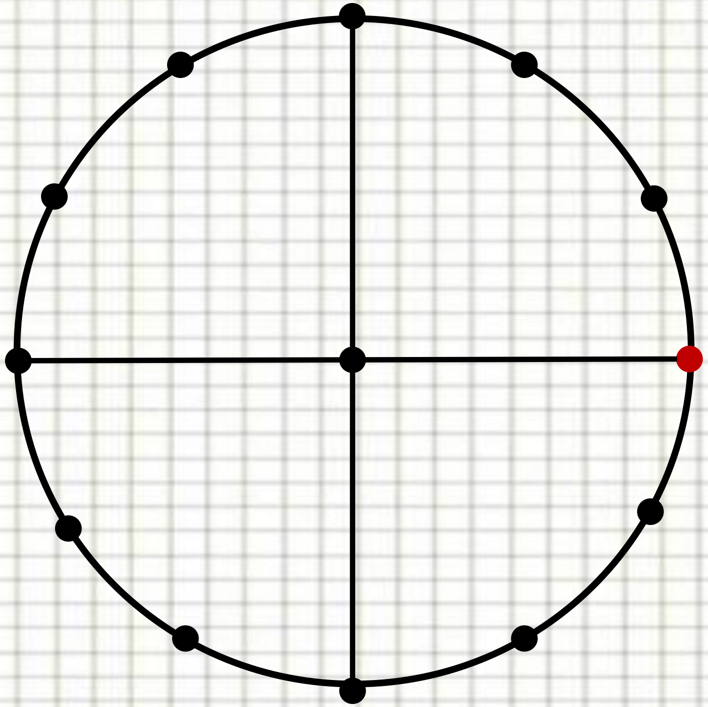
# Тренажер№1 Отметьте на числовой окружности числа.

**Для проверки кликни по выбранному числу**

$\pi$ $\frac{5\pi}{3}$ $\frac{11\pi}{3}$ $-\frac{7\pi}{4}$ $-\frac{3\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{2}$ $2\pi$ $\frac{16\pi}{3}$ $-\frac{2\pi}{3}$ $0$





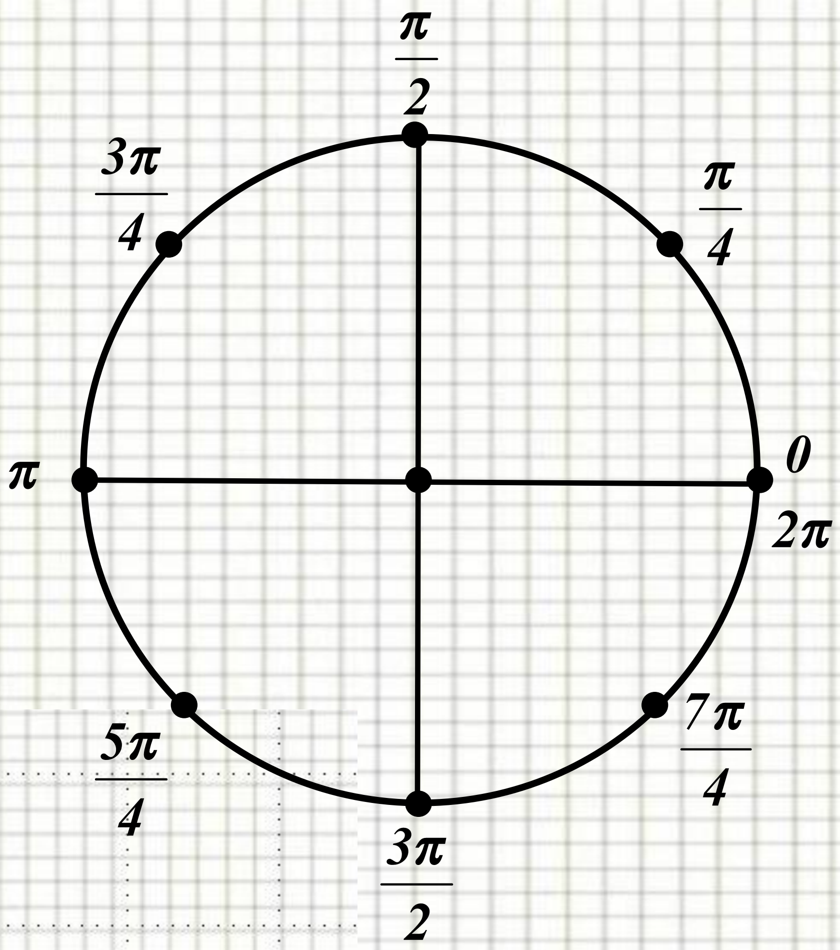
$-\frac{3\pi}{2}$ $-2\pi$ $\frac{25\pi}{6}$ $-\frac{\pi}{2}$ $-\frac{13\pi}{2}$

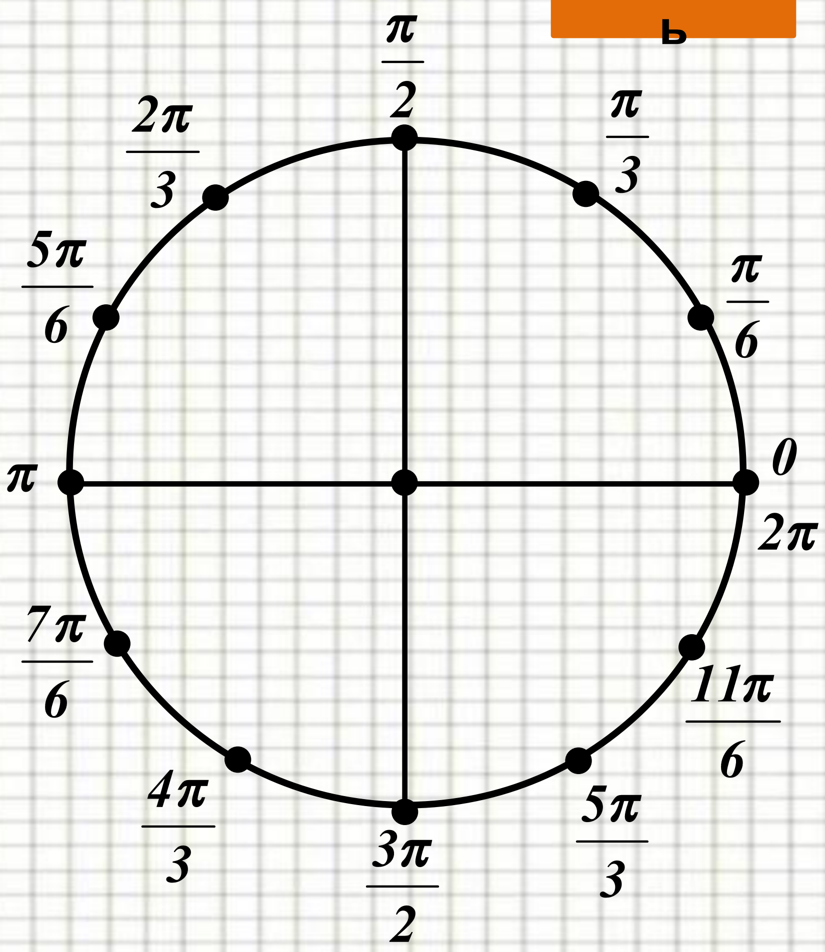
$\frac{\pi}{4}$ $\frac{3\pi}{4}$ $-\frac{11\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{4}$ $\frac{113\pi}{6}$

# Тренажер№2 Подпишите точки окружности. t∈[0;2π].

**Для проверки кликни по выбранной точке**

ОЧИСТИТЬ

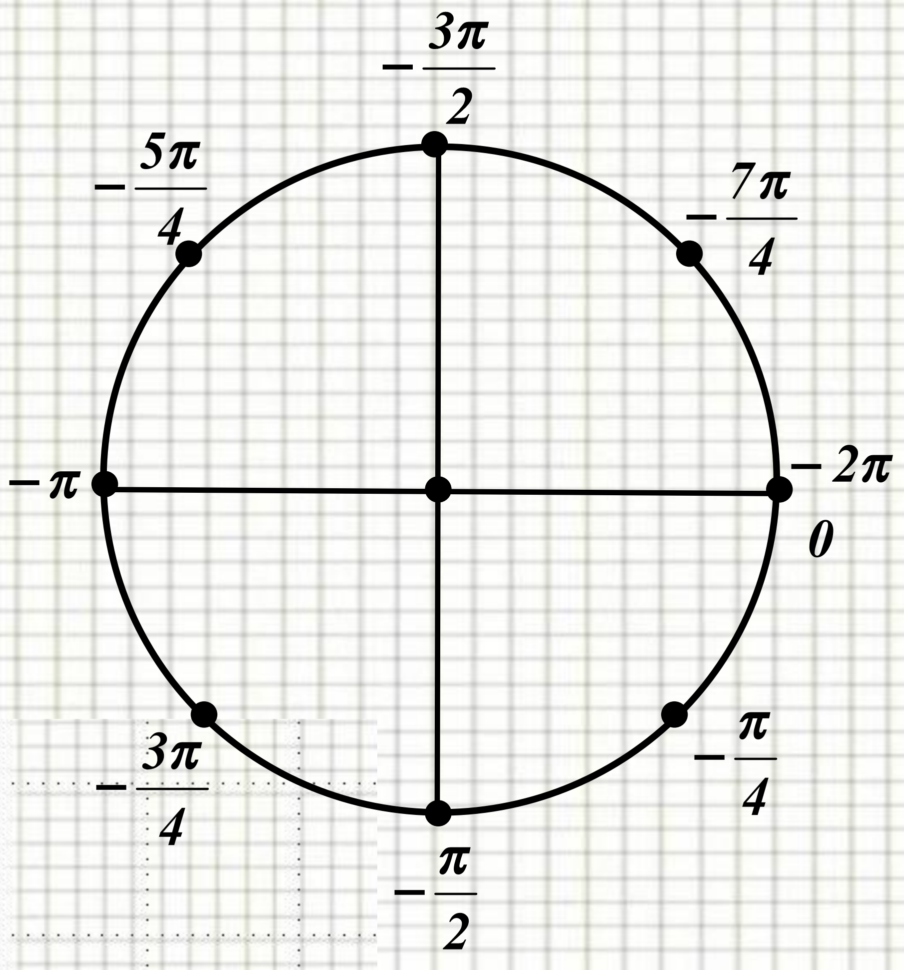


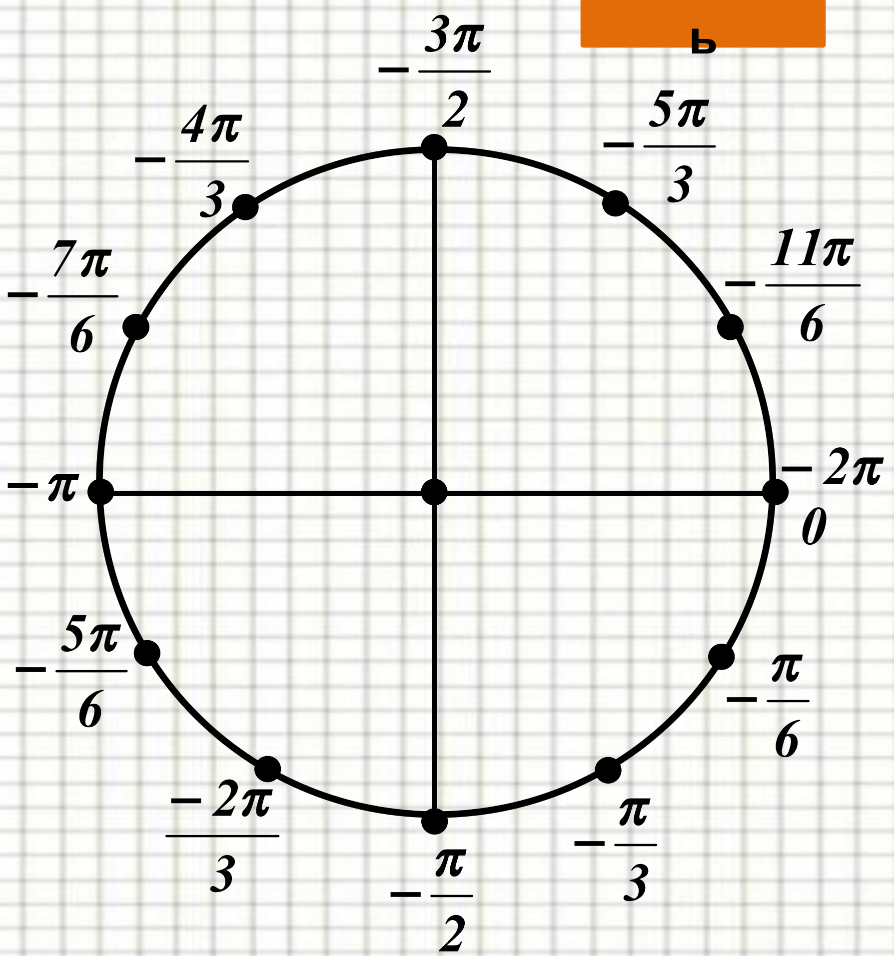



# Тренажер№3 Подпишите точки окружности. t∈[-2π;0].

Для проверки кликни по выбранной точке

ОЧИСТИТ
Ь

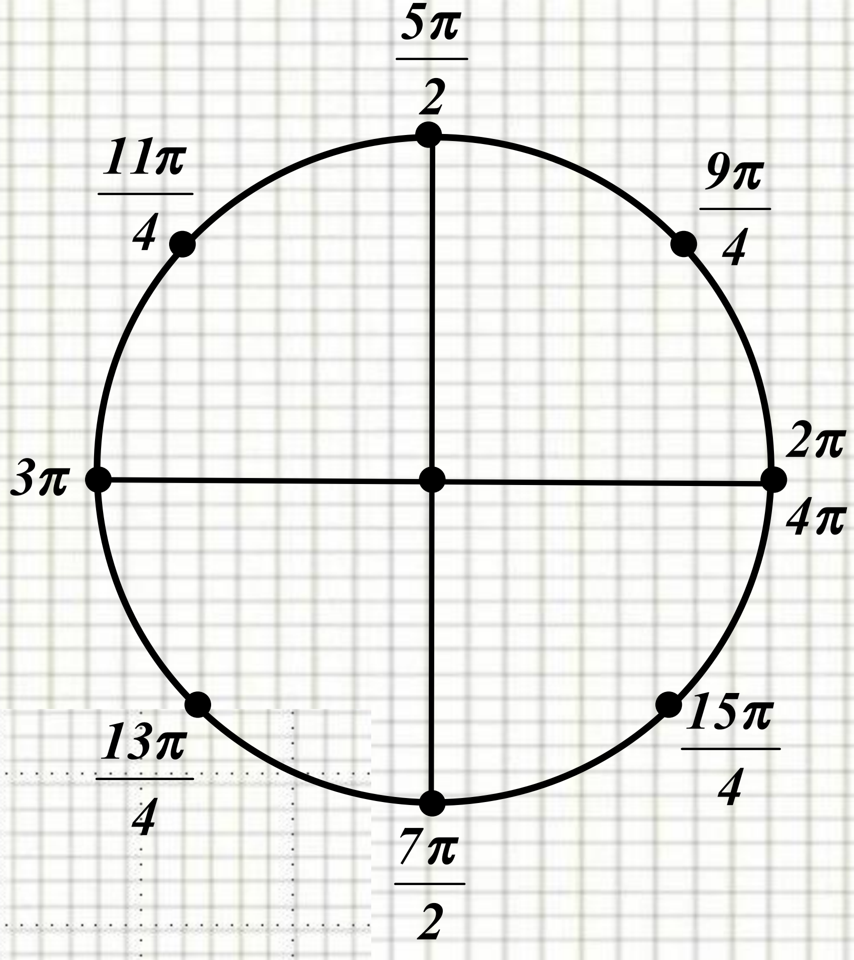


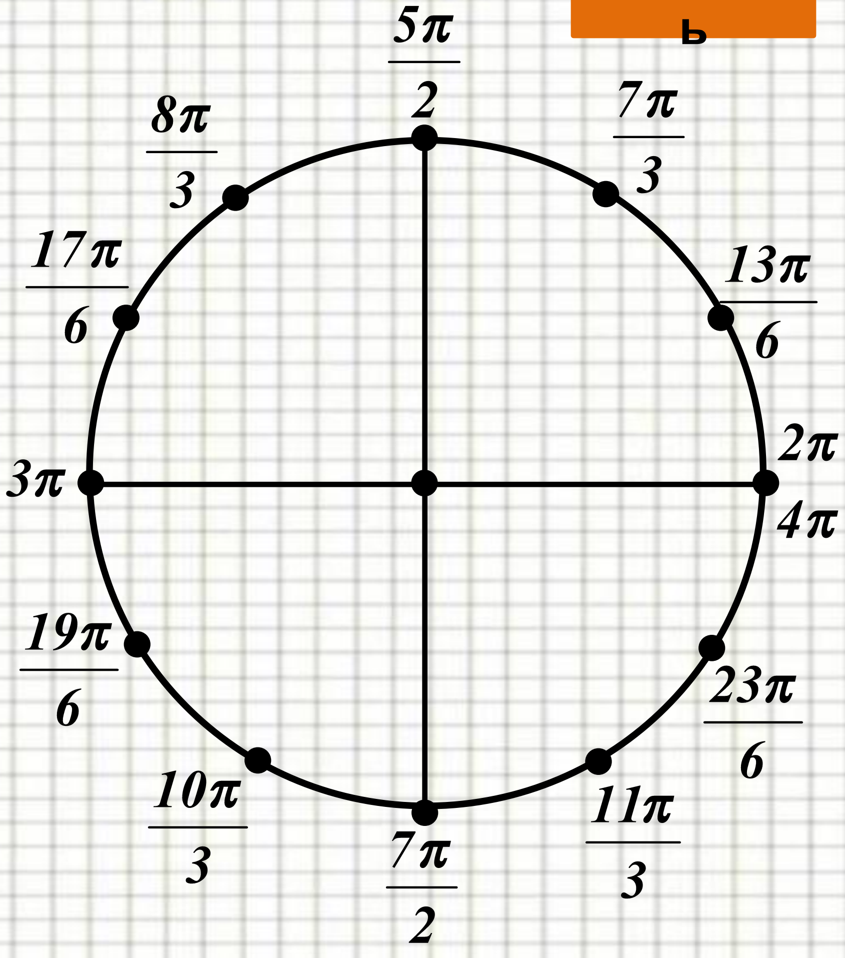



# Тренажер№4 Подпишите точки окружности. t∊[2π;4π].

**Для проверки кликни по выбранной точке**

ОЧИСТИТЬ



## Определение синуса, косинуса и тангенса угла

***Косинусом угла*** называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол $\alpha$ (обозначается cos $\alpha$)

***Синусом угла*** называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол $\alpha$ (обозначается sin $\alpha$)

В этих определениях угол может выражаться как в градусах, так и в радианах.

## Определение синуса, косинуса и тангенса угла

**Тангенсом угла** называется отношение синуса угла $\alpha$ к его косинусу (обозначается $tg\alpha$)

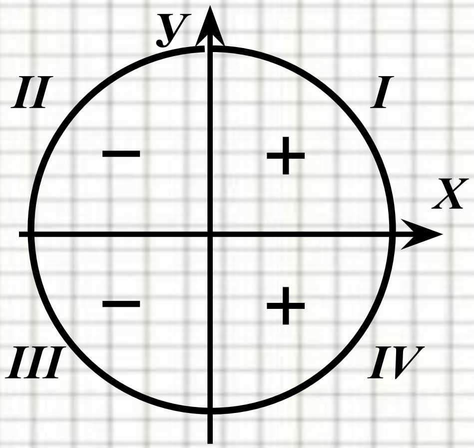
Таким образом,

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

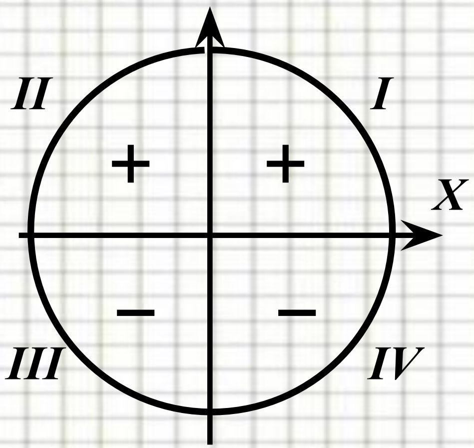
Иногда используется **котангенс угла** $\alpha$ (обозначается $ctg\alpha$), который определяется формулой

$$ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

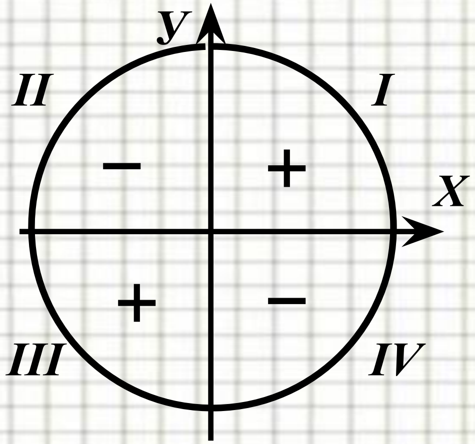
# Знаки тригонометрических функций.




$\cos t$




$\sin t$




$tgt$ $ctgt$

## Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$- *основное тригонометрическое тождество.*

Из него можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$ :

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

## Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.*

По определению тангенса и котангенса

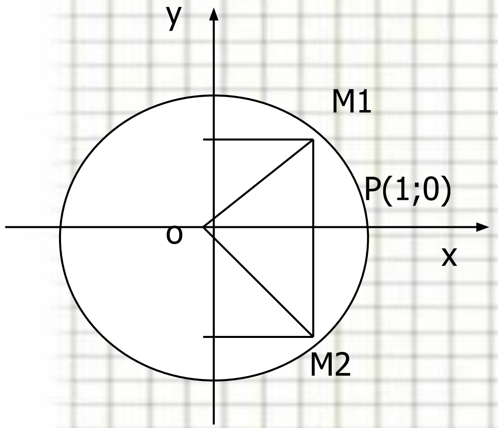
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$.

Из этого равенства можно выразить *tg* $\alpha$ через *ctg* $\alpha$ и наоборот:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

# Синус, косинус и тангенс углов $\alpha$ и $-\alpha$




Пусть точки $M_1$ и $M_2$ единичной окружности получены поворотом точки P(1;0) на углы $\alpha$ и $-\alpha$ соответственно). Тогда ось 0х делит угол $M_1 0 M_2$ пополам, и поэтому точки $M_1$ и $M_2$ симметричны относительно оси 0х.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка $M_1$ имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, точка $M_2$ имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$.

Следовательно $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\quad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Используя определение тангенса, получаем

.

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$$

**Таким образом,** $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ $\quad ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

# Формулы сложения

**Теорема.** Для любых $\alpha$ и $\beta$ справедливо равенство

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

# Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

**1.**

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Итак, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

**2.**

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) =$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Итак, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Полагая в формуле $tg(\alpha + \beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$ $\beta = \alpha$

получаем

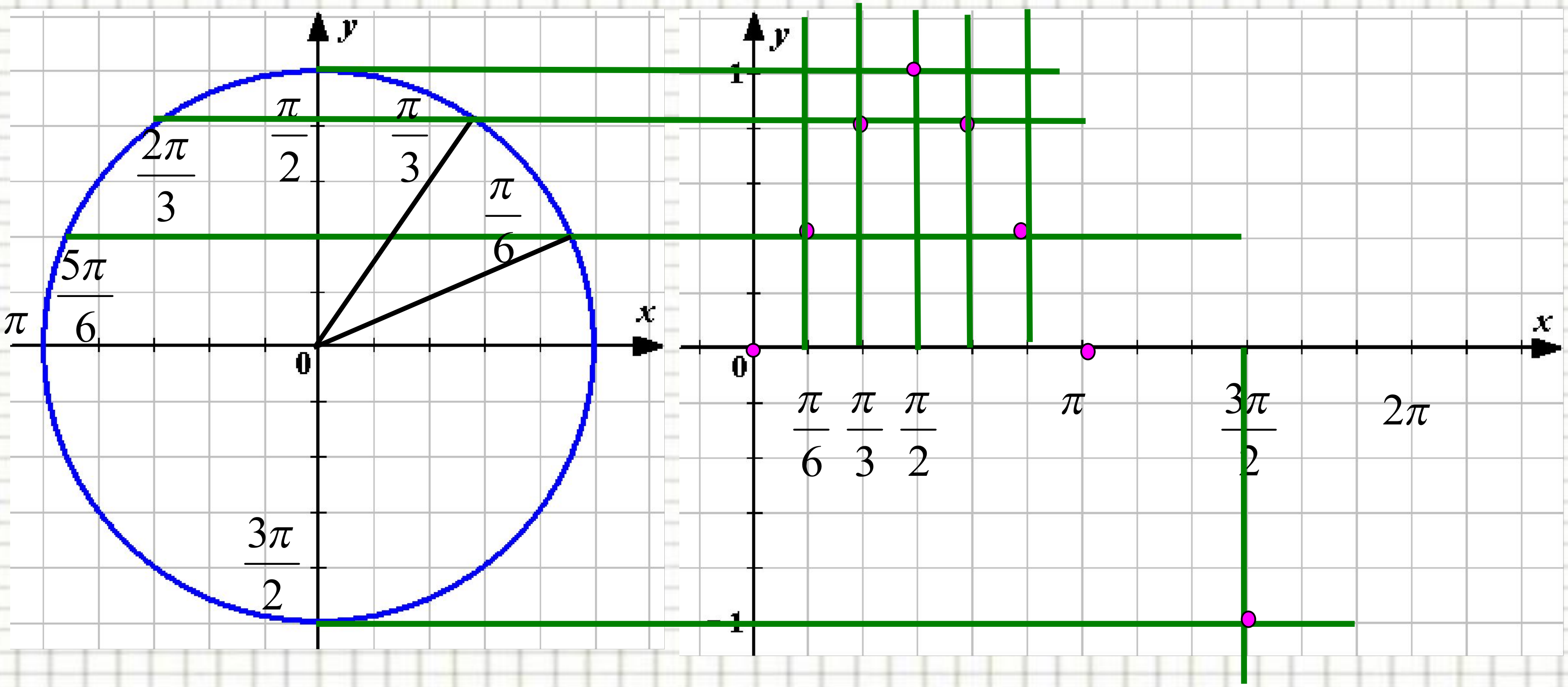
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

# Тригонометрические функции числового аргумента.

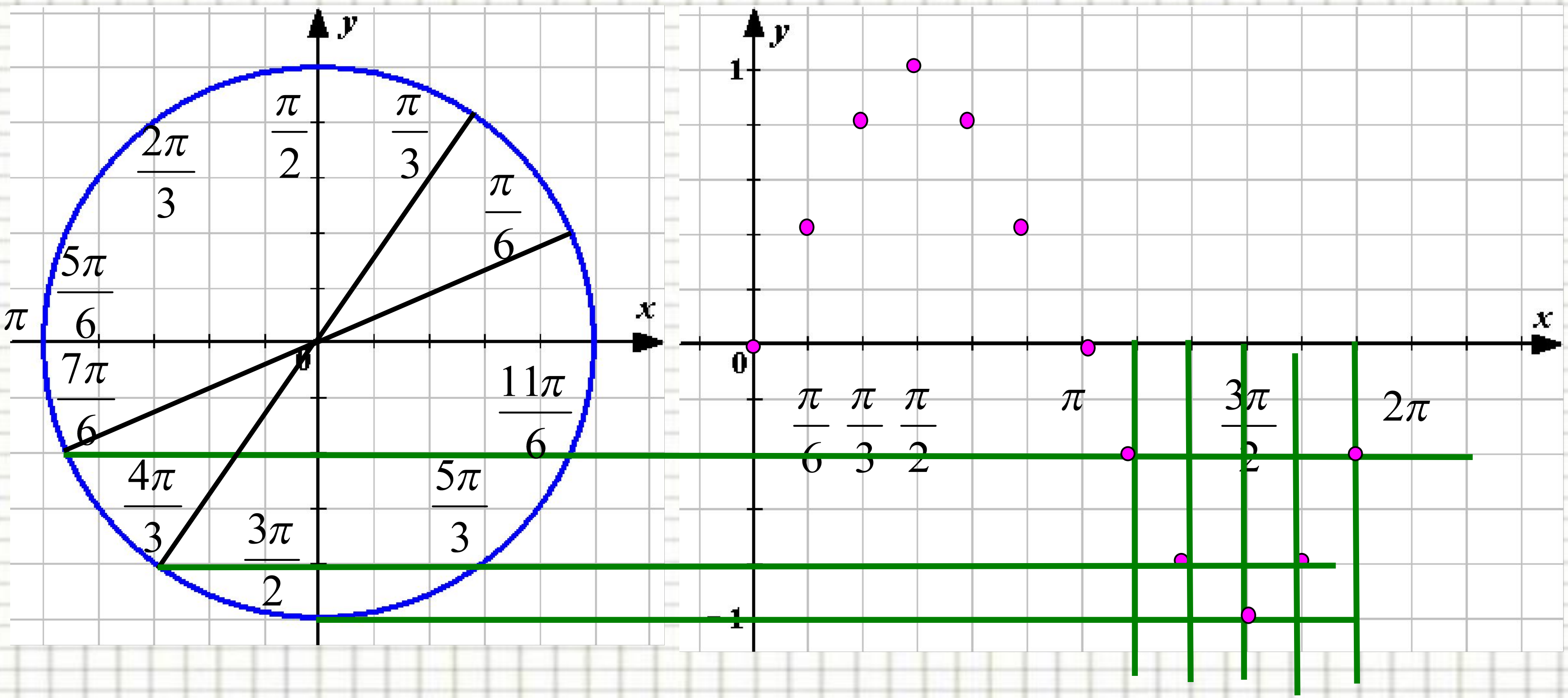
$y = \sin x$

$y = \cos x$

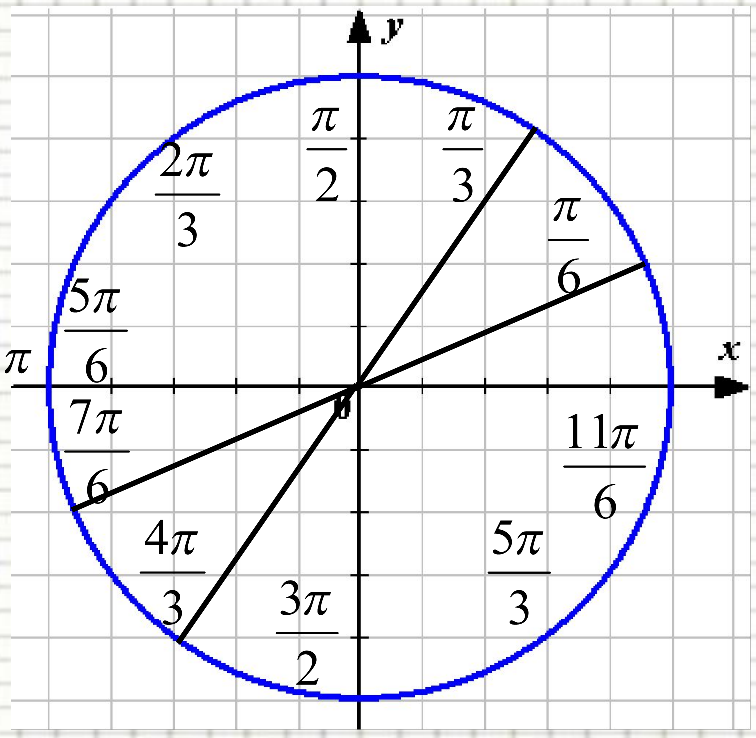
# *Построение графика функции y = sin x.*

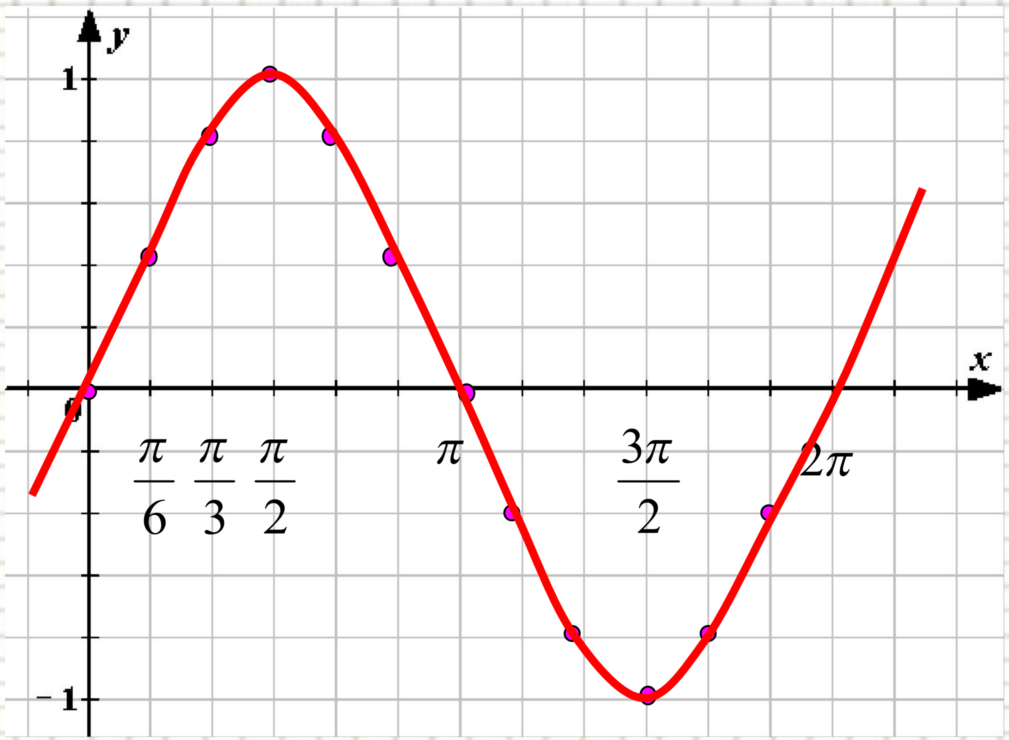


# *Построение графика функции y = sin x.*



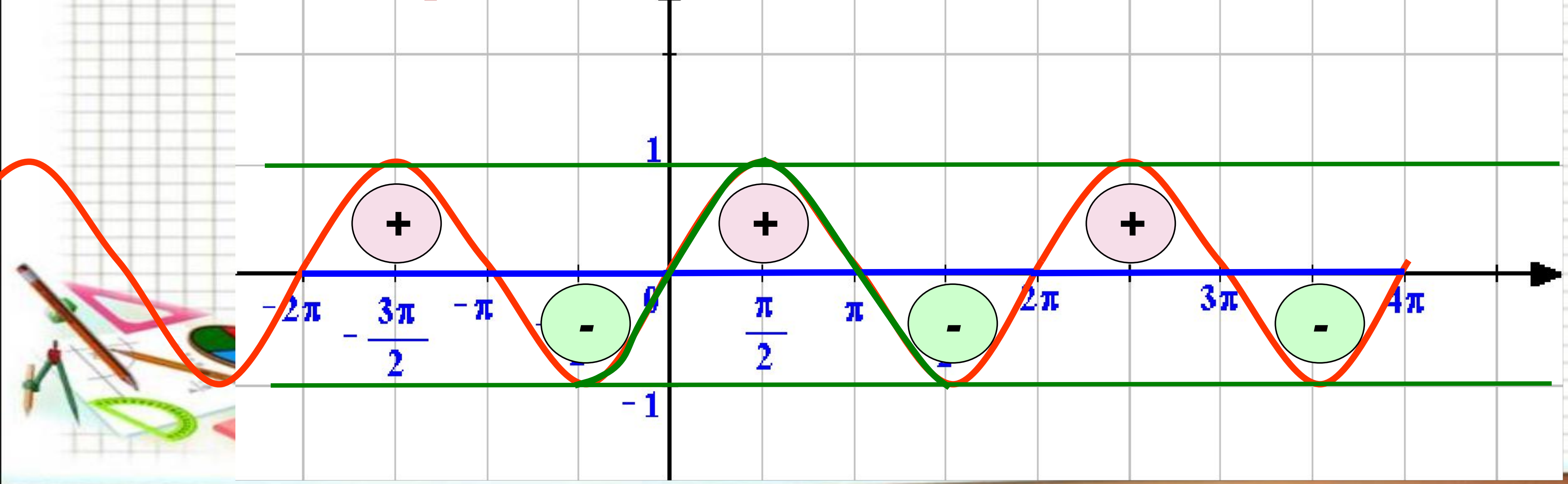
# *Построение графика функции y = sin x.*




# Функция $y = \sin x$.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел ( R )
2. Областью изменений (Областью значений) - [ - 1; 1 ].
3. Функция $y = \sin \alpha$ нечетная, т.к. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
4. Функция периодическая, с главным периодом $2\pi$. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$.
5. Функция непрерывная
6. Возрастает: $[-\pi/2; \pi/2]$. Убывает: $[\pi/2; 3\pi/2]$.



# Построение графика функции $y = \cos x$.

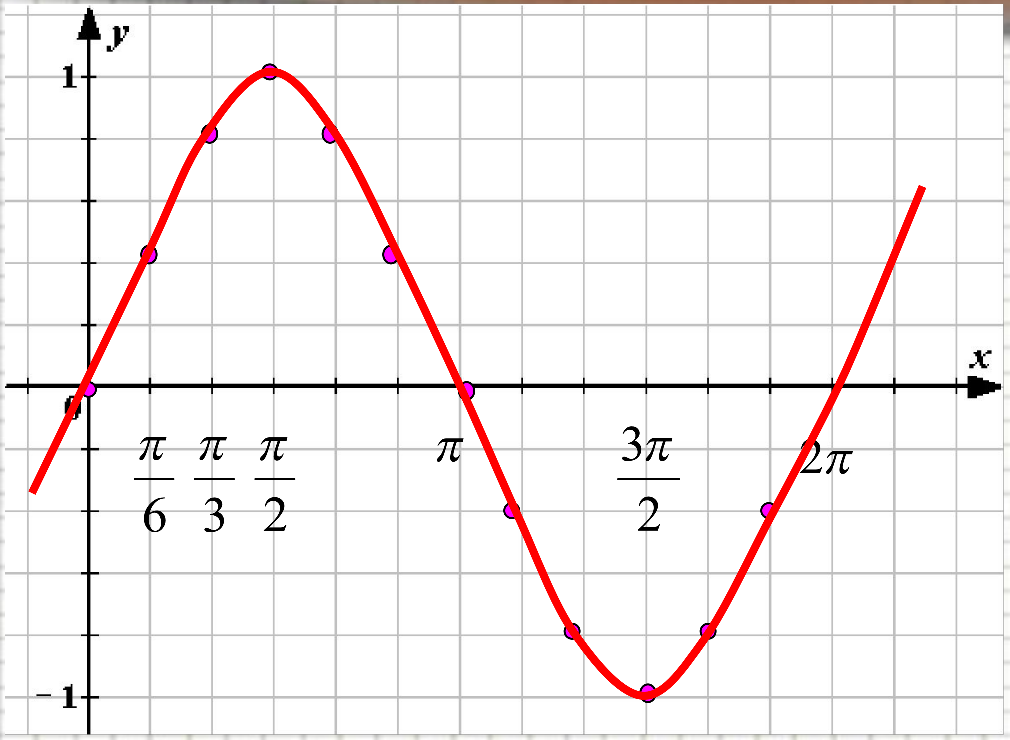



**График функции $y = \cos x$ получается переносом графика функции $y = \sin x$ влево на $\pi/2$.**

$$\sin(x + \pi/2) = \sin x \cos \pi/2 + \sin \pi/2 \cos x = \cos x$$

# Функция $y = \cos x$.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел ( R )
2. Областью изменений (Областью значений) - [ - 1; 1 ].
3. Функция $y = \cos \alpha$ четная, т.к. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
4. Функция периодическая, с главным периодом $2\pi$. $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$.
5. Функция непрерывная
6. Возрастает: $[\pi; 2\pi]$. Убывает: $[0; \pi]$.