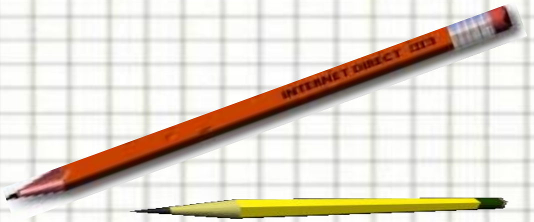
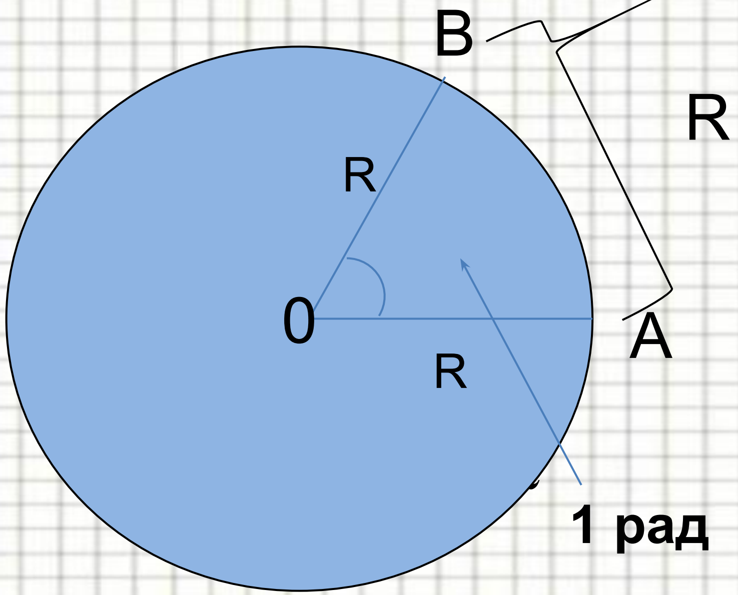


Введение в тригонометрию

Числовая окружность

Радианная мера угла



Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в один радиан.

Найдем градусную меру угла в 1 радиан. Так как дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180^0, то дуга длиной R стягивает угол в π раз меньший, т.е.

$$1 рад = (\frac{180}{\pi})^0.$$

Так как π =3,14, то 1 рад=$57{,}3^0$.

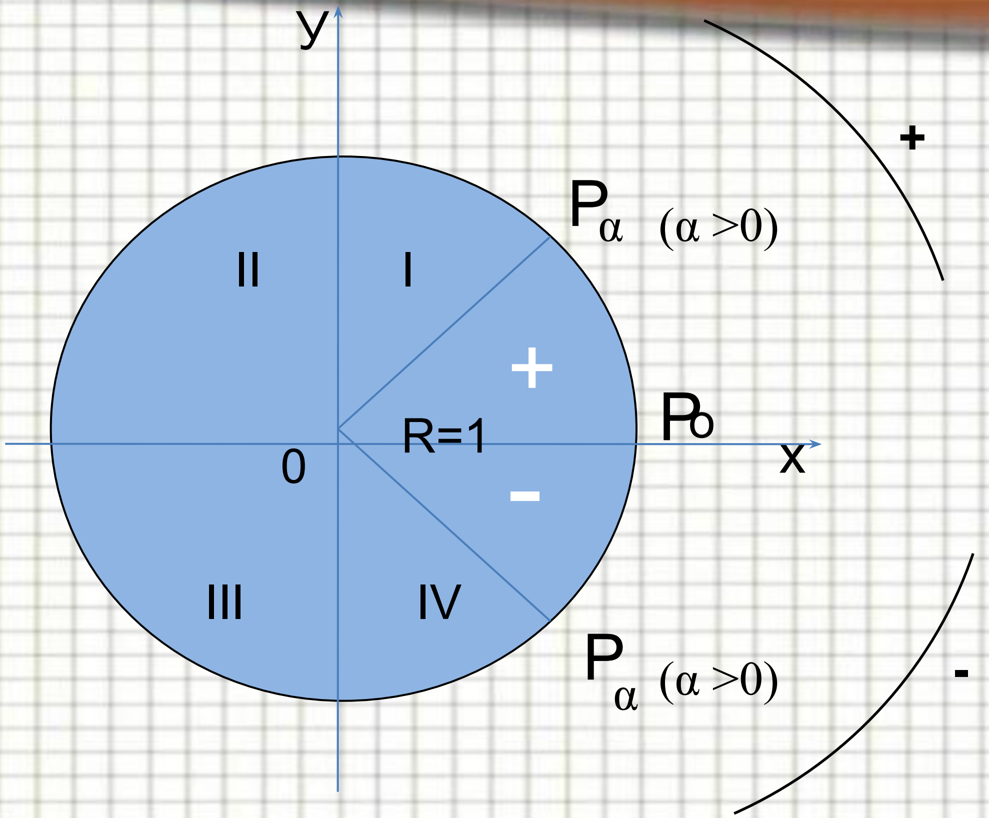
Если угол содержит *a* радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha рад = (\frac{180}{\pi}\alpha)^0.$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} радиан$$

$$1 радиан = \frac{180^\circ}{\pi}$$

Положительные и отрицательные углы в окружности



Начало отсчета углов - в точке (1;0)

$OP_o \longrightarrow 0P_\alpha$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha > 0)$

повернули на угол α против часовой стрелки

$0P_o \longrightarrow OP_\alpha$ $\Leftrightarrow$ $(\alpha > 0)$

повернули на угол по часовой стрелки

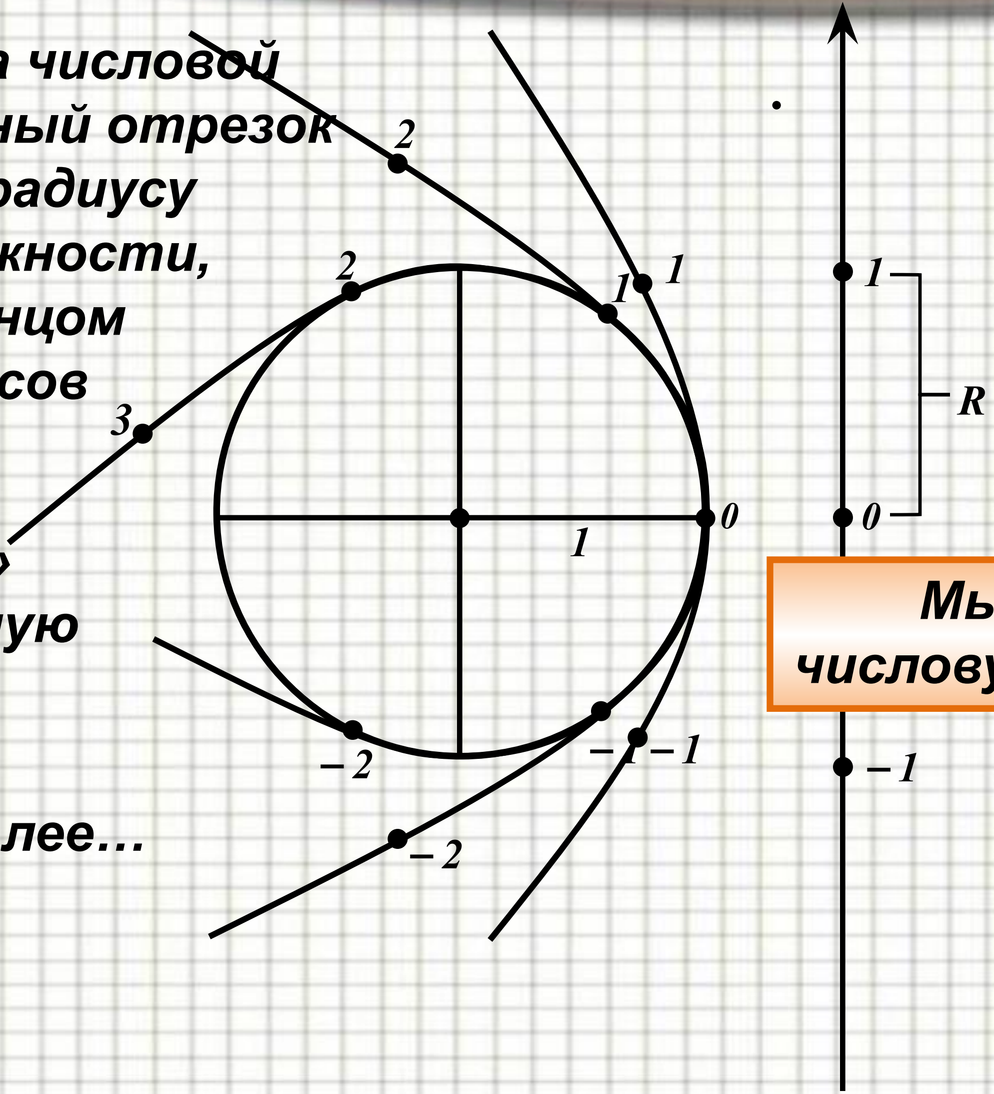
Угол поворота радиуса OP_0 **против** часовой стрелки считается ***положительным***, а **по** часовой --- ***отрицательным***

Радианная мера угла

Единичной окружностью называется окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице.

Числовая окружность.

Начало отсчета числовой прямой, единичный отрезок которой равен радиусу единичной окружности, совместим с концом одного из радиусов



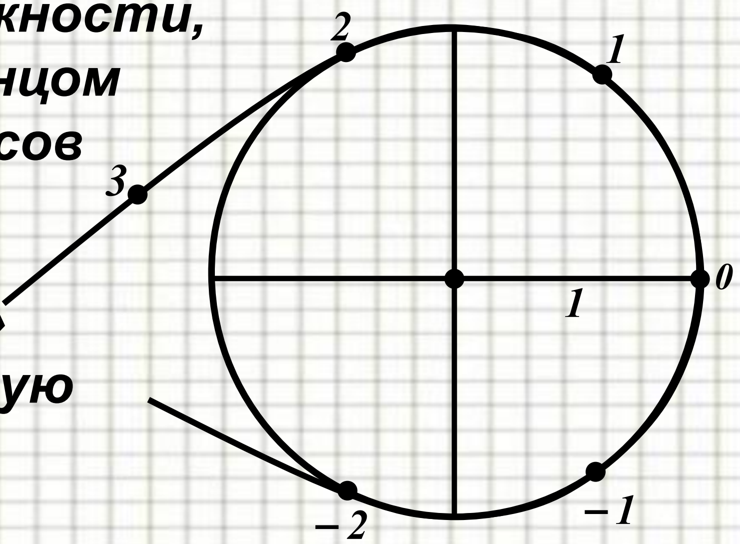
Затем будем «наматывать» числовую прямую на окружность

Мы получили числовую окружность

И так далее…

Числовая окружность.

Начало отсчета числовой прямой, единичный отрезок которой равен радиусу единичной окружности, совместим с концом одного из радиусов



Затем будем «наматывать» числовую прямую на окружность

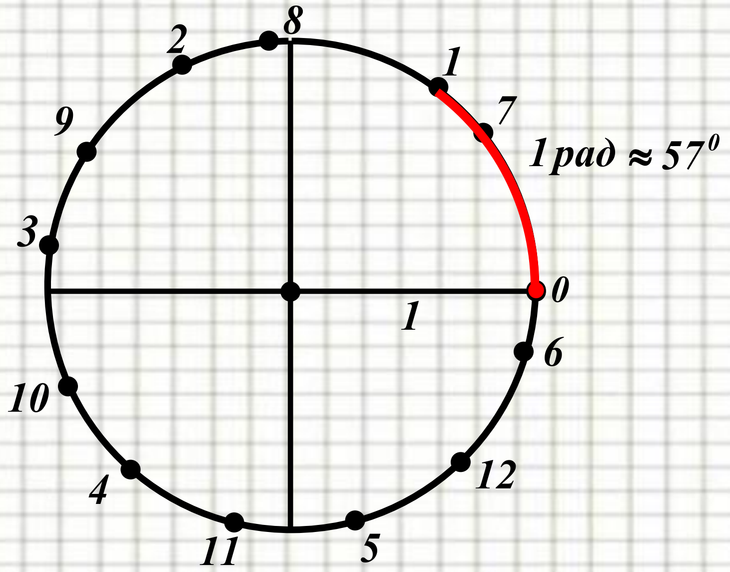
И так далее…

Таким образом, каждой точке числовой прямой будет поставлена в соответствие точка единичной окружности.

Мы получили числовую окружность

Числовая окружность.

Проследите за тем как откладываются на числовой окружности положительные числа.

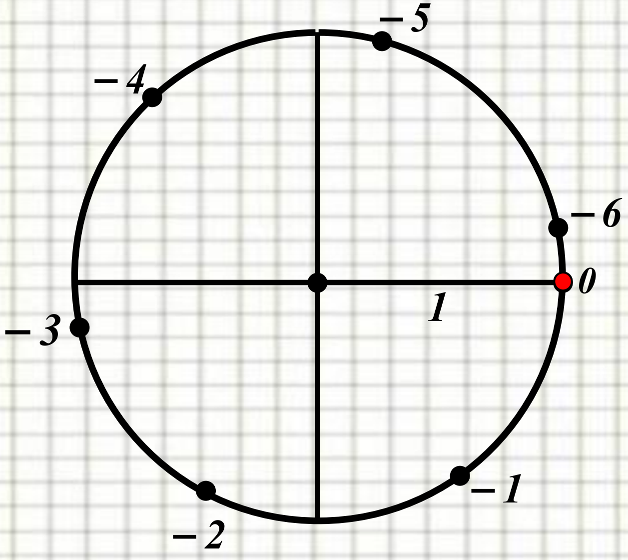


И так далее…

Очевидно, что каждой точке числовой окружности соответствует бесконечно много чисел

Числовая окружность.

Проследите за тем как откладываются на числовой окружности отрицательные числа.

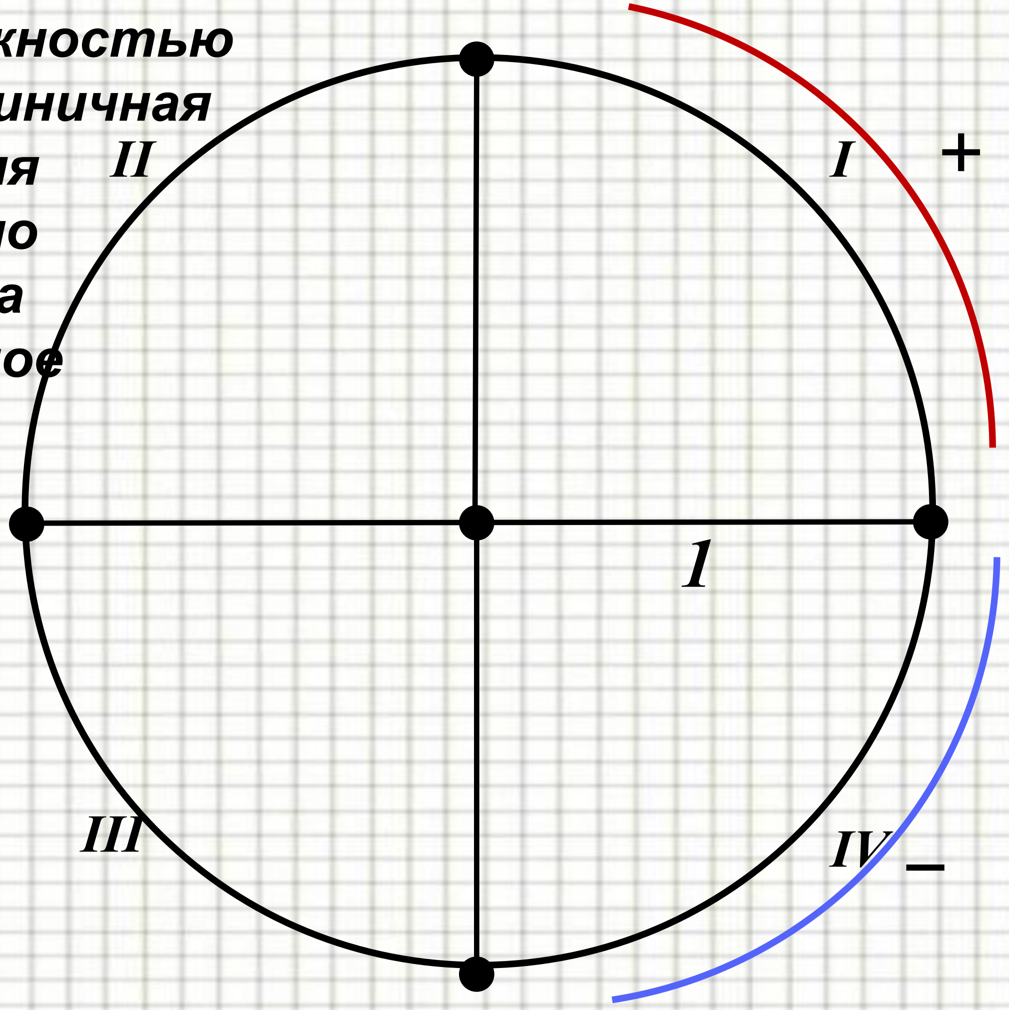


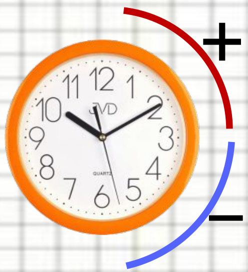
И так далее…

$1 \text{рад} \approx 57^0$

Числовая окружность.

Числовой окружностью называется единичная окружность, для которой указано начало отсчета и положительное направление

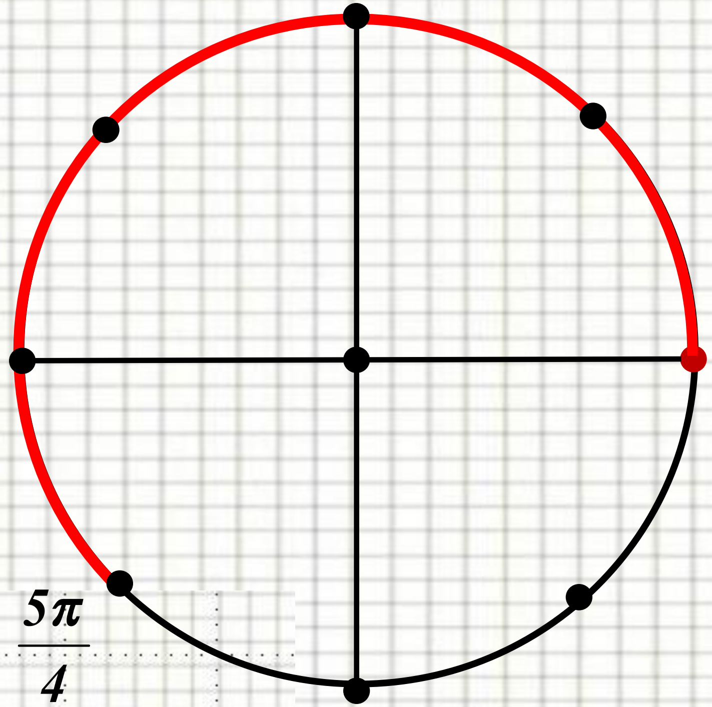


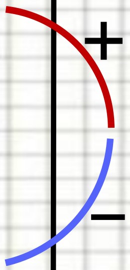


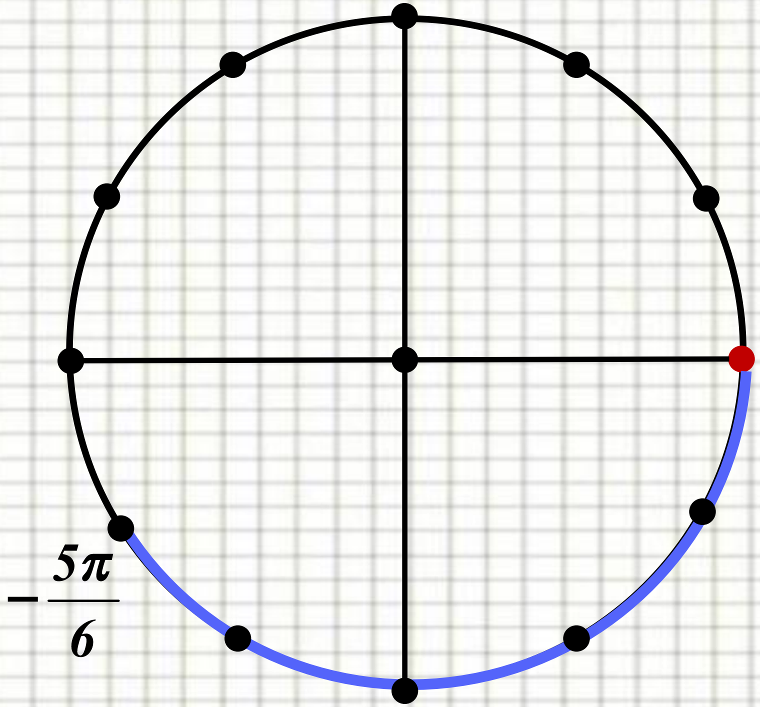
Начало отсчета

Два макета.

Пример. *Отметим число* $\frac{-5\pi}{6}$. *Для этого от начала отсчета по часовой стрелке отложим дугу длины* $\frac{5\pi}{6}$. *Конец этой дуги будет соответствовать данному числу.*





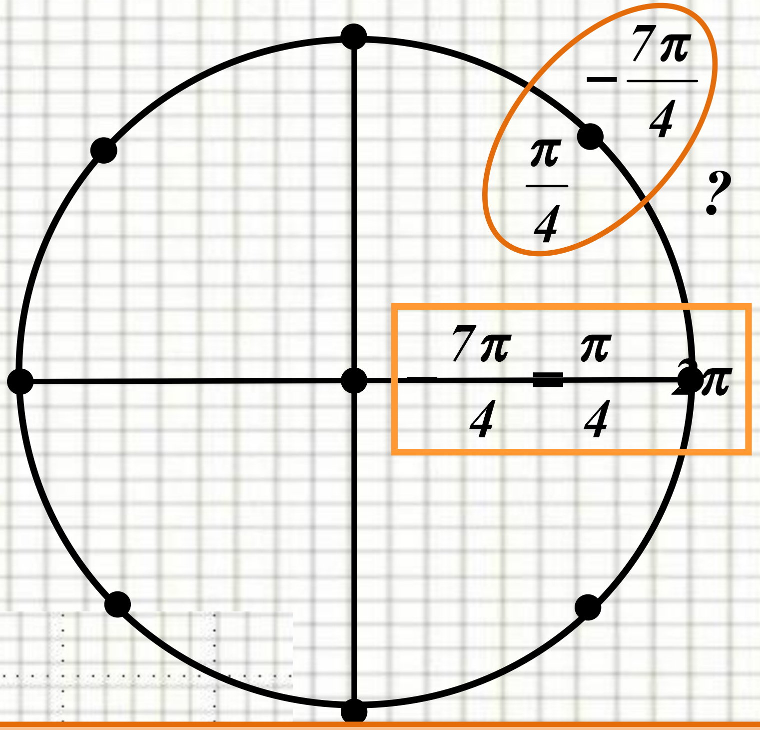


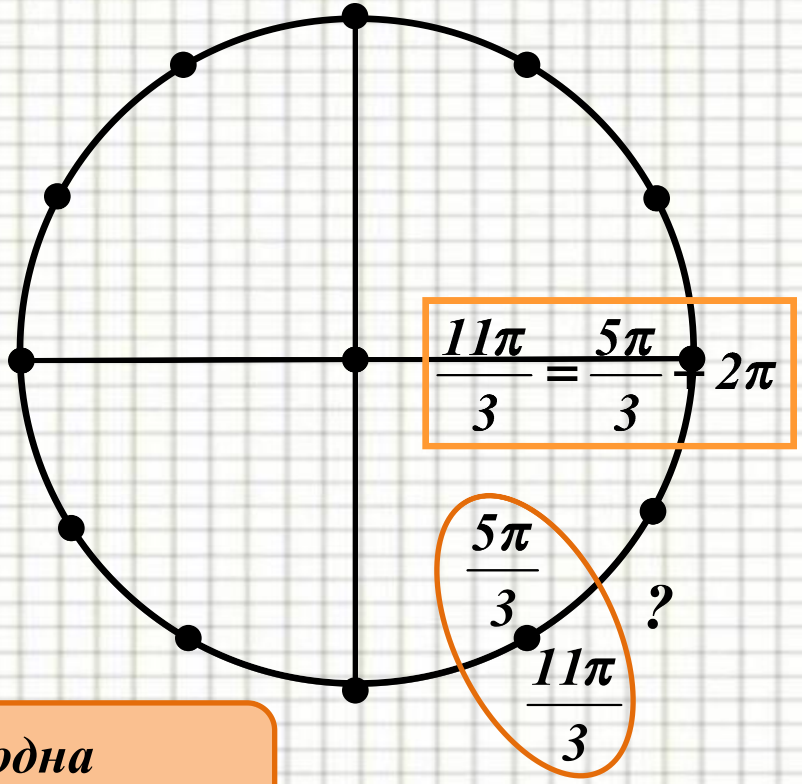
Отмечаем числа со знаменателем 1, 2, 4

Отмечаем числа со знаменателем 1, 2, 3, 6

Некоторые свойства.

Точке числовой окружности, в отличии от точки числовой прямой, соответствует не одно число.



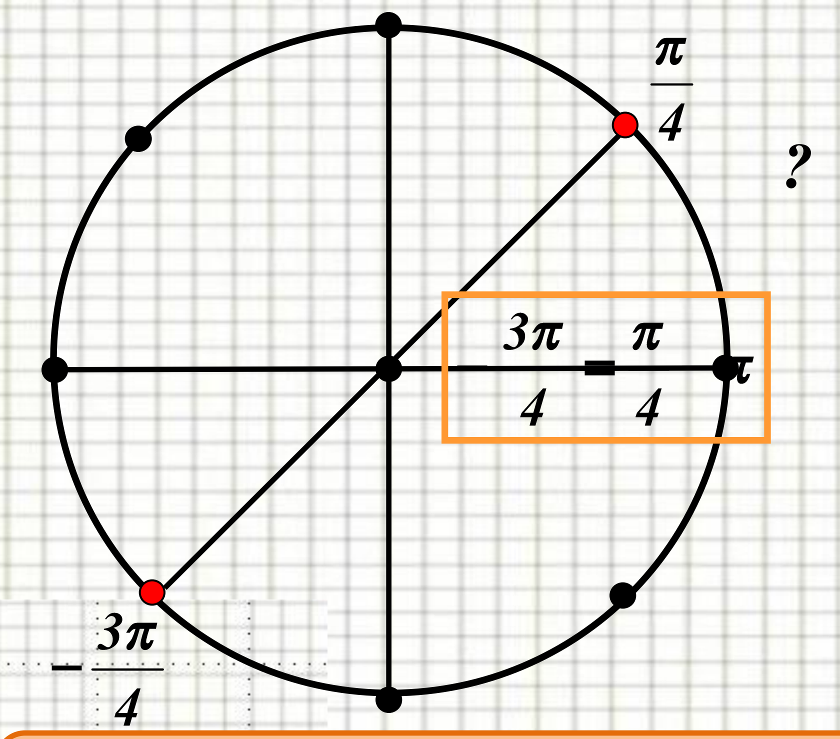


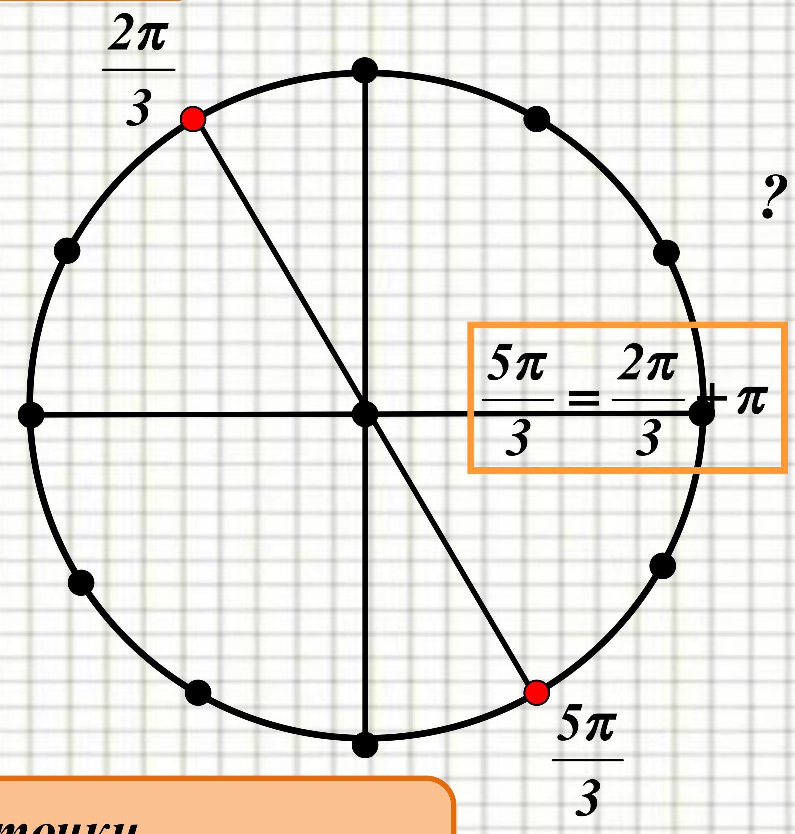
Числам t и t +2πk (k ϵ Z) соответствует одна точка числовой окружности

назад

Некоторые свойства.

Симметрия относительно центра окружности

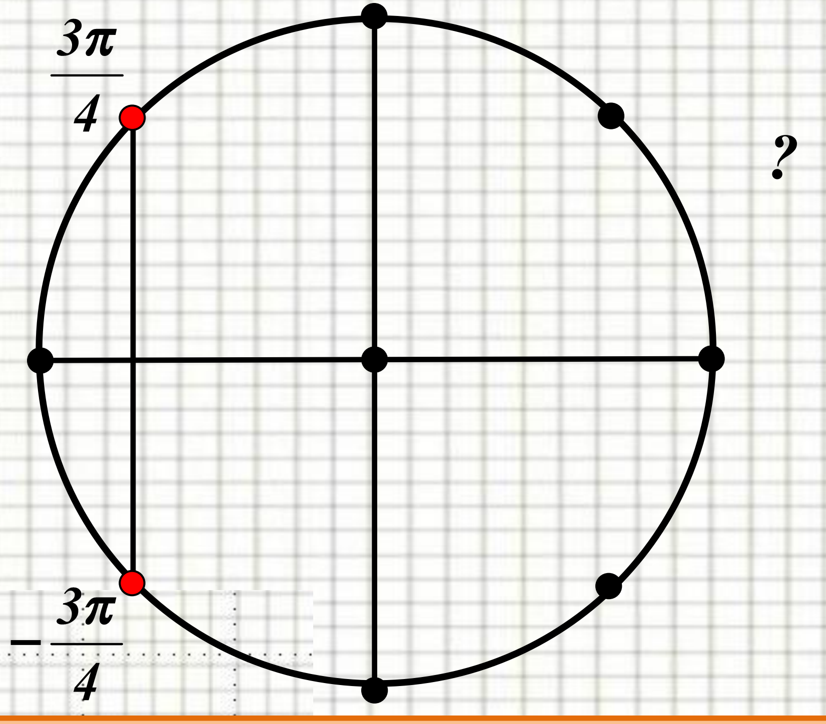


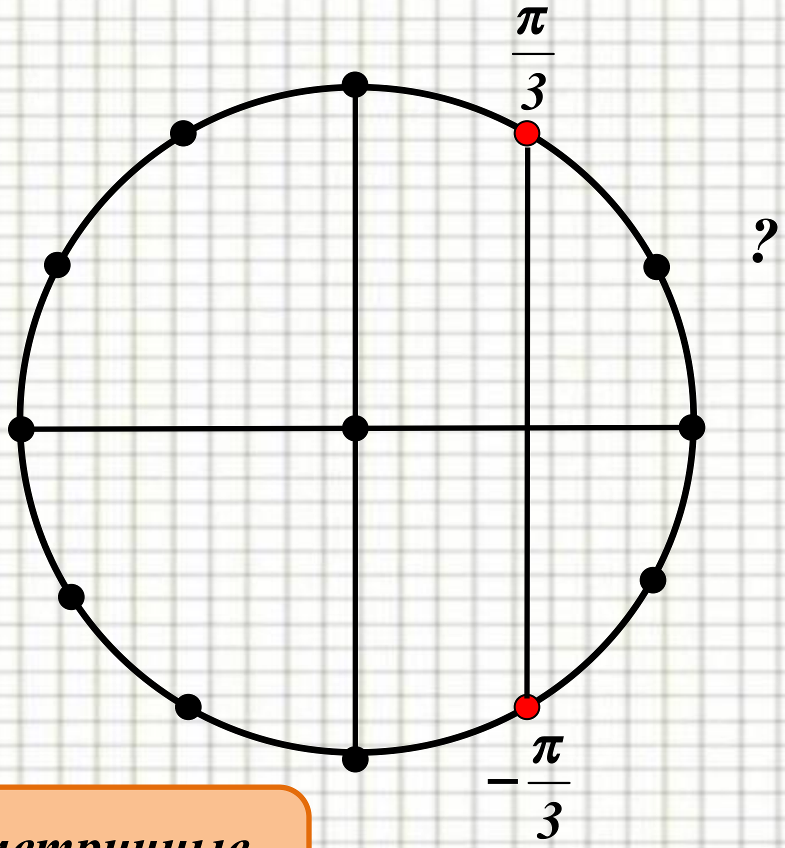


Числам t и $t + \pi k$ ($k \in Z$) соответствуют точки, симметричные относительно центра окружности

Некоторые свойства.

Симметрия относительно горизонтального диаметра

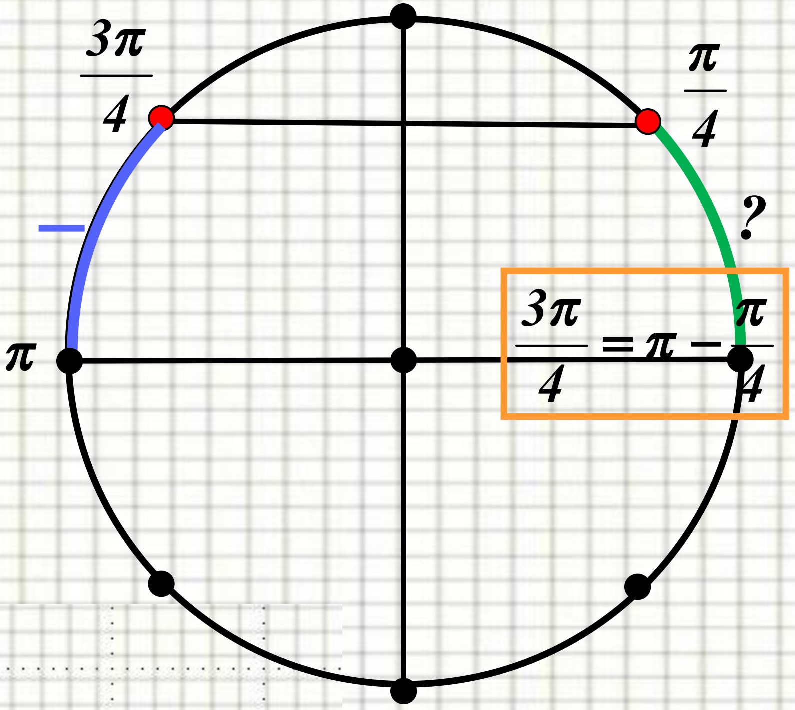


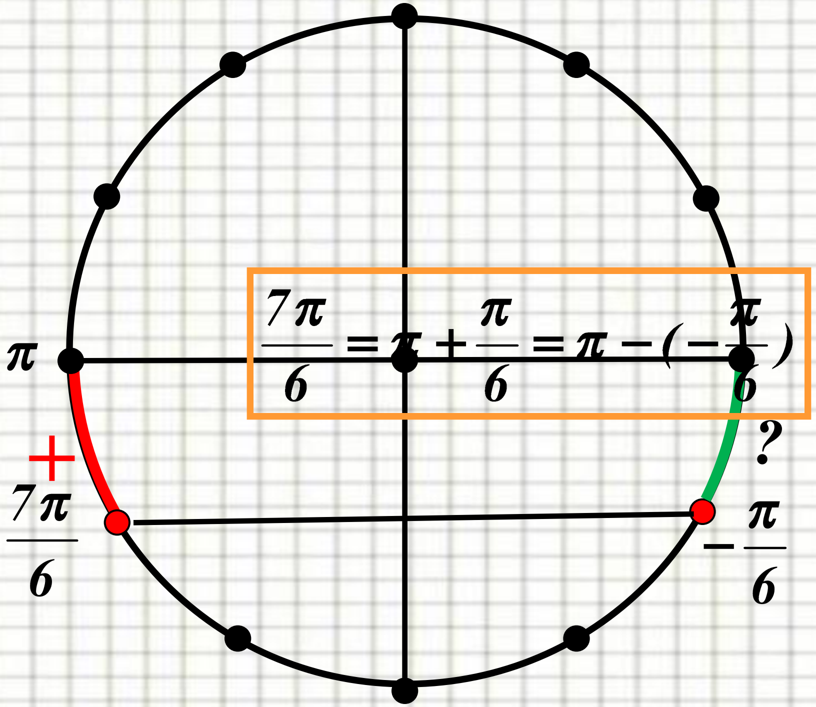


Числам t и –t соответствуют точки, симметричные относительно горизонтального диаметра.

Некоторые свойства.

Симметрия относительно вертикального диаметра





Числам t и $\pi - t$ соответствуют точки, симметричные относительно вертикального диаметра.

Как отметить на окружности большие числа?

$$\frac{115\pi}{6}=\left(18+\frac{7}{6}\right)\cdot\pi=\frac{7\pi}{6}+18\pi=\boxed{\frac{7\pi}{6}}+9\cdot 2\pi$$

1 свойство:числам 1 свойство: числам t 1 свойство:числам t и 1 свойство:числам t и t1 свойство: числам t и t 1 свойство:числам t и t +21 свойство:числам t и t +2π1 свойство:числам t и t +2πk (k 1 свойство:числам t и t +2πk (k є1 свойство:числам t и t +2πk (k є Z) 1 свойство:числам t и t +2πk (k є Z) соответствует одна точка числовой окружности

Подумай, как воспользоваться свойством и составь алгоритм

1) Выделить целую четную часть

2) Воспользоваться первым свойством

(числам $\frac{115\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$ соответствует одна точка окружности)

Потренируйся выполнять первый шаг алгоритма

$$-\frac{37\pi}{6}=-\left(6+\frac{1}{6}\right)\cdot\pi=-6\pi\boxed{-\frac{\pi}{6}}$$

$$\frac{173\pi}{3}=\left(56+\frac{5}{3}\right)\cdot\pi=56\pi+\boxed{\frac{5\pi}{3}}$$

$$-\frac{1085\pi}{4}=-\left(270+\frac{5}{4}\right)\cdot\pi=$$

$$=-270\pi\boxed{-\frac{5\pi}{4}}$$

$2\pi=360^0$

$$967^0=2\cdot 360^0+\boxed{247^0}$$

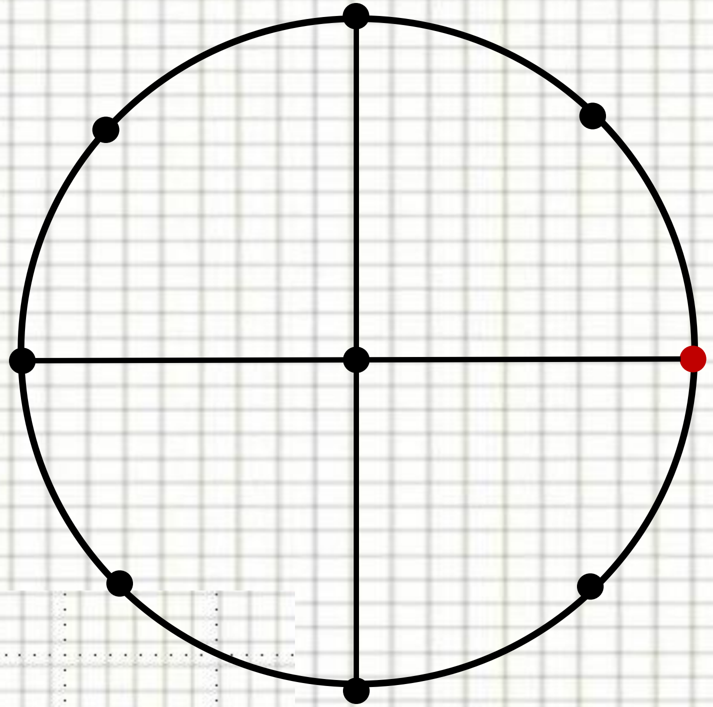
$$-5078^0=-14\cdot 360^0\boxed{-38^0}$$

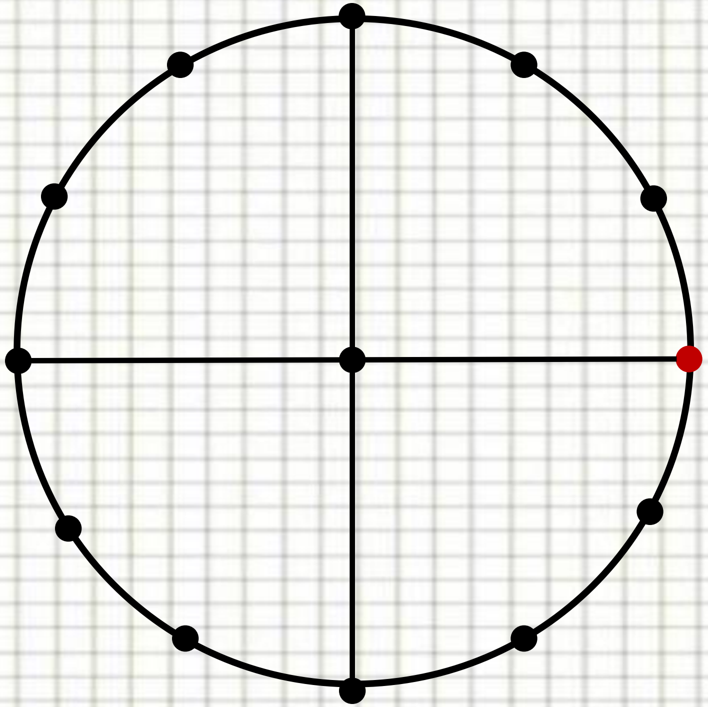
Тренажер№1 Отметьте на числовой окружности числа.

Для проверки кликни по выбранному числу

$\pi \qquad \frac{5\pi}{3} \qquad \frac{11\pi}{3} \qquad -\frac{7\pi}{4} \qquad -\frac{3\pi}{4}$

$\frac{\pi}{2} \qquad \frac{3\pi}{2} \qquad 2\pi \qquad \frac{16\pi}{3} \qquad -\frac{2\pi}{3} \qquad 0$



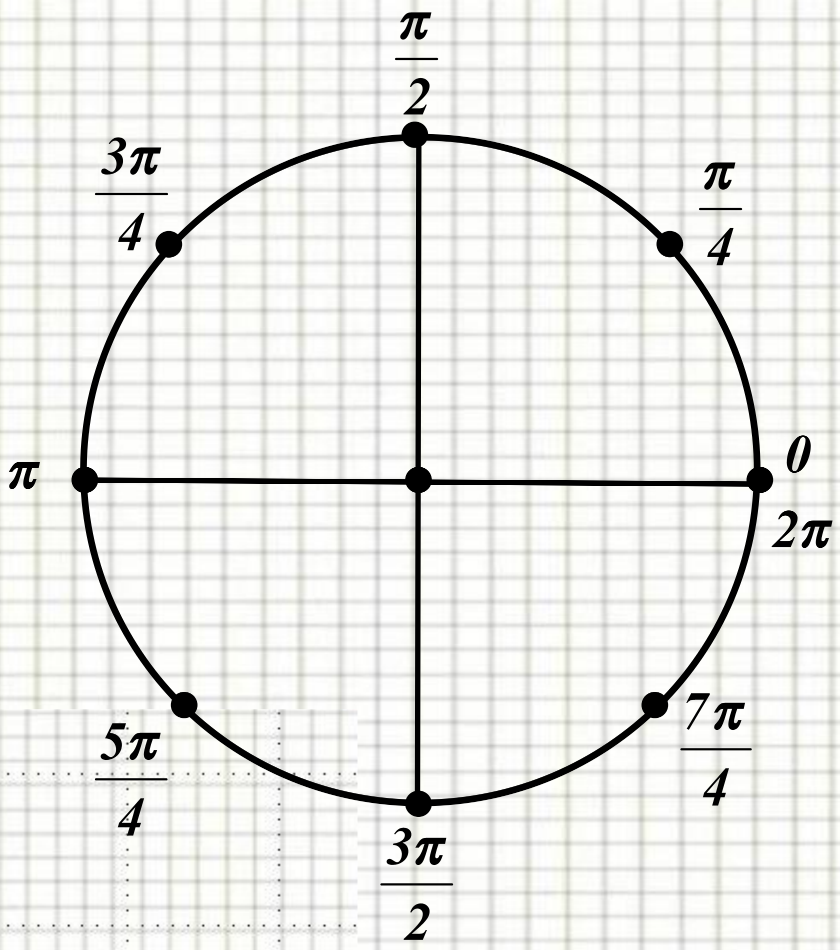


$-\frac{3\pi}{2} \qquad -2\pi \qquad \frac{25\pi}{6} \qquad -\frac{\pi}{2} \qquad -\frac{13\pi}{2}$

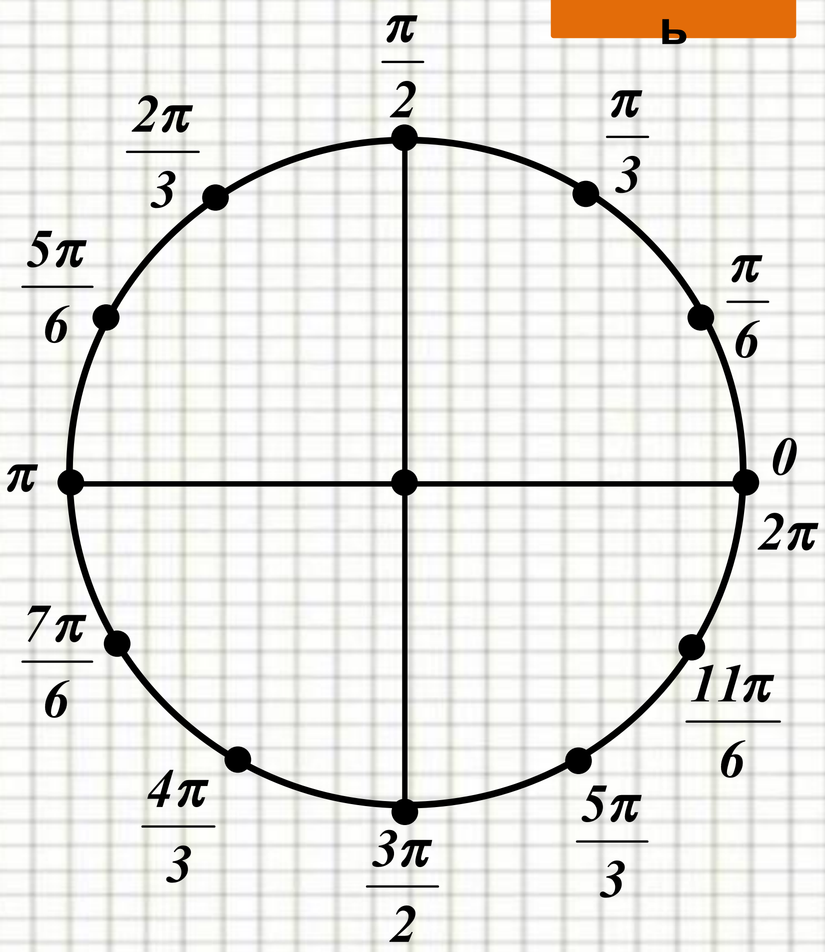
$\frac{\pi}{4} \qquad \frac{3\pi}{4} \qquad -\frac{11\pi}{4} \qquad \frac{11\pi}{4} \qquad \frac{113\pi}{6}$

Тренажер№2 Подпишите точки окружности. t∈[0;2π].

Для проверки кликни по выбранной точке



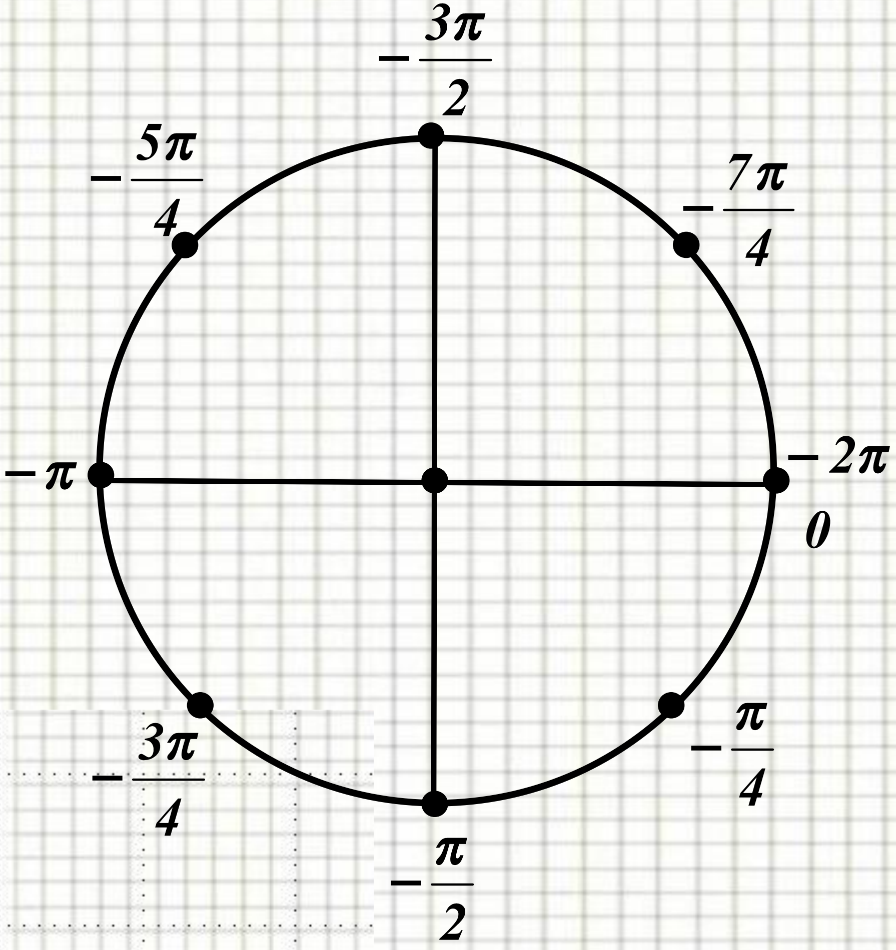
ОЧИСТИТЬ

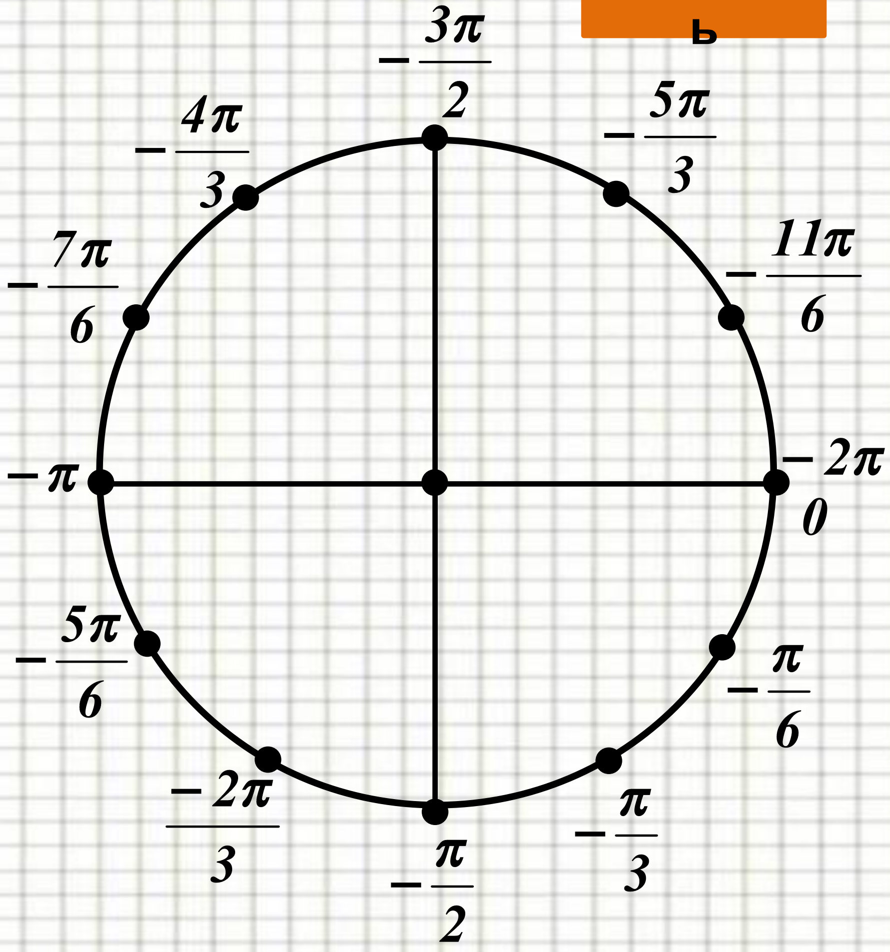


Тренажер№3 Подпишите точки окружности. $t \in [-2\pi; 0]$.

Для проверки кликни по выбранной точке

ОЧИСТИТЬ

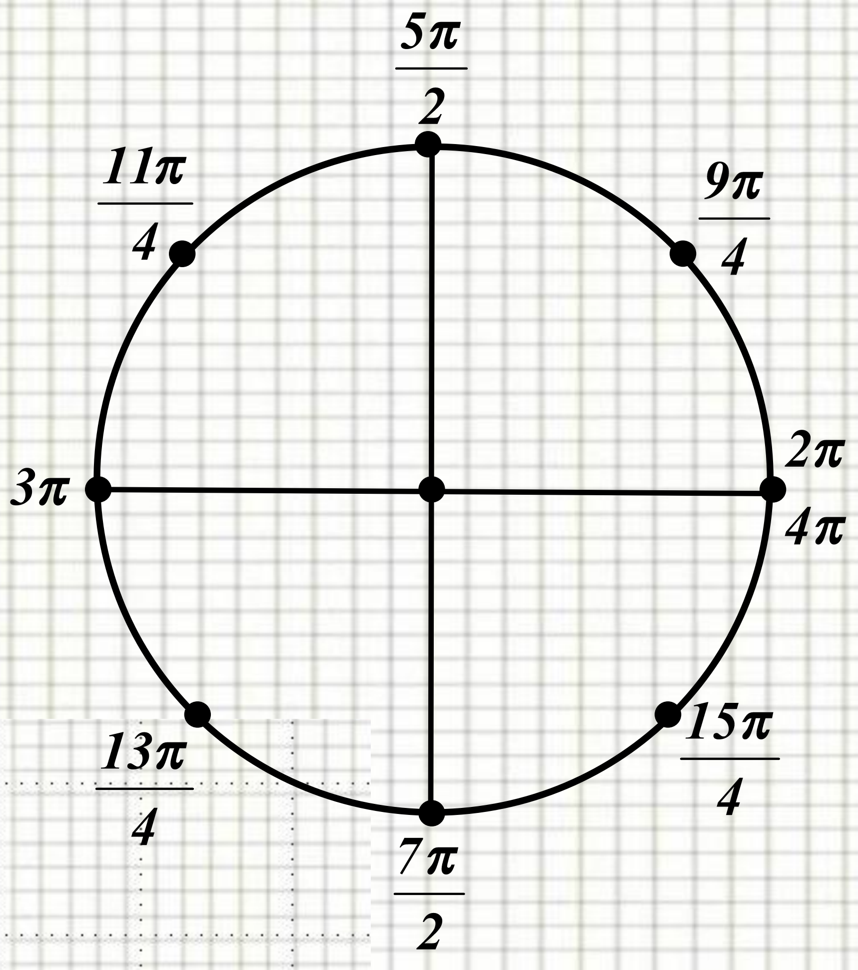


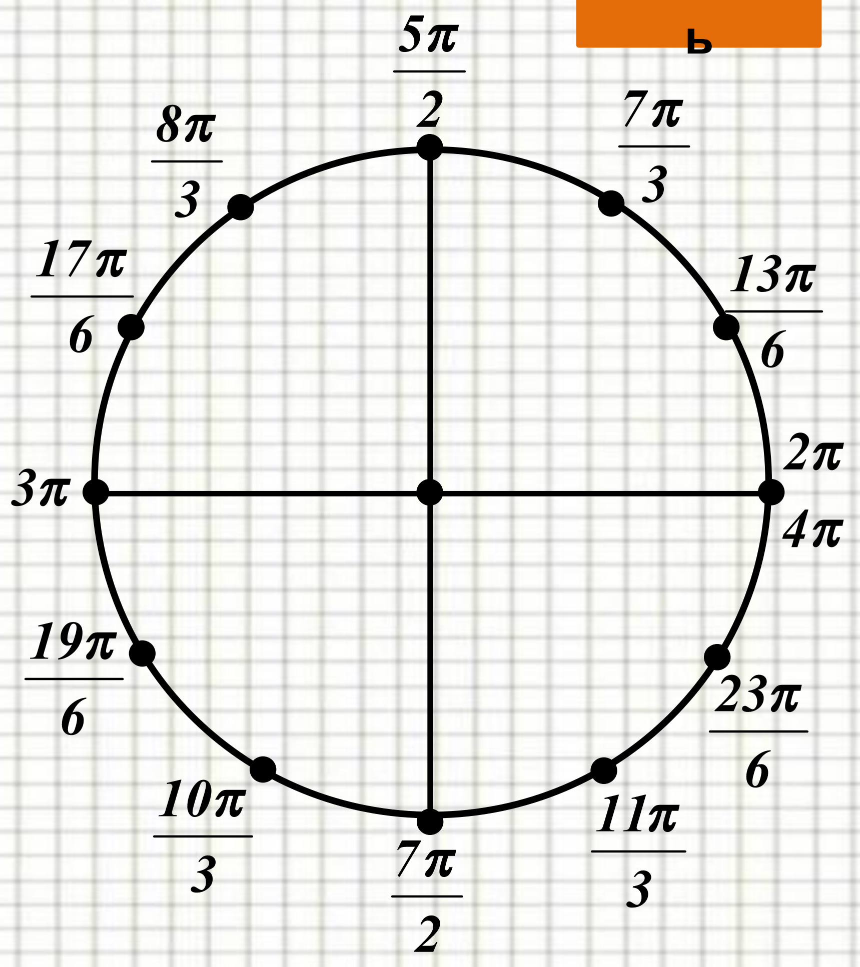


Тренажер№4 Подпишите точки окружности. t∈[2π;4π].

Для проверки кликни по выбранной точке

очистить





Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Косинусом угла называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается cos α)

Синусом угла называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) вокруг начала координат на угол α (обозначается sin α)

В этих определениях угол может выражаться как в градусах, так и в радианах.

Определение синуса, косинуса и тангенса угла

Тангенсом угла называется отношение синуса угла α к его косинусу (обозначается $tg\alpha$)

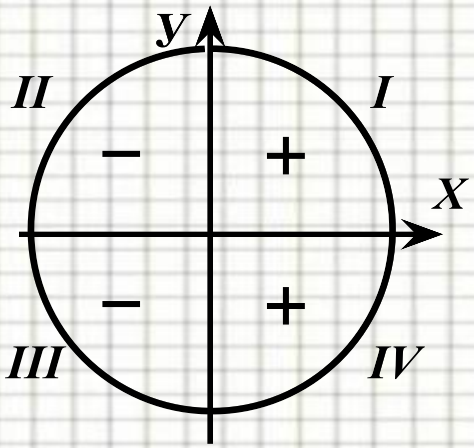
Таким образом,

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

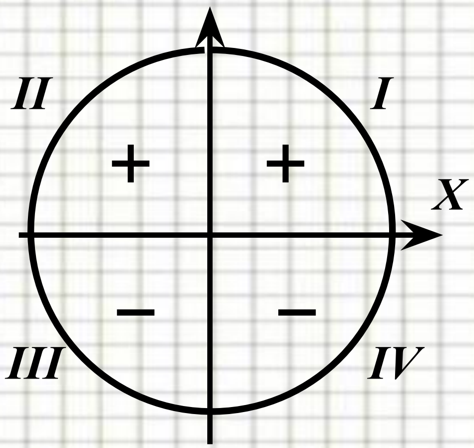
Иногда используется **котангенс угла** α (обозначается $ctg\alpha$), который определяется формулой

$$ctg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

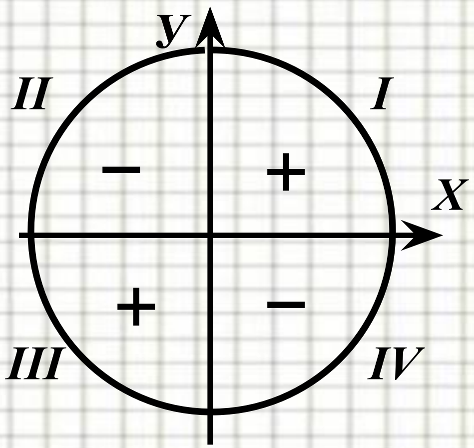
Знаки тригонометрических функций.



cos t



sin t



tgt **ctgt**

Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$- *основное тригонометрическое тождество.*

Из него можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и $\cos\alpha$ через $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \qquad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

В этих формулах знак перед корнем определяется знаком выражения, стоящего в левой части формулы.

Зависимость между синусом, косинусом и тангенсом одного и того же угла

Выясним теперь *зависимость между тангенсом и котангенсом.*

По определению тангенса и котангенса

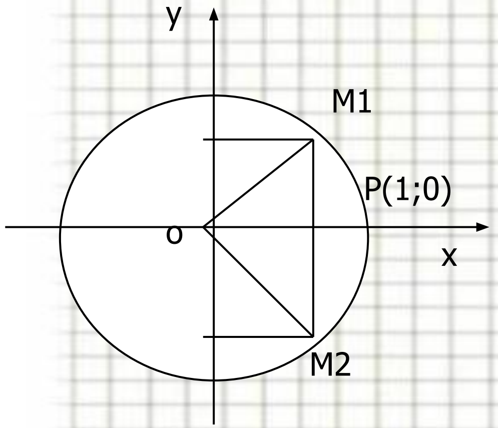
$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Перемножая эти равенства, получаем $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$.

Из этого равенства можно выразить *tg* α через *ctg* α и наоборот:

$$tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha} \qquad ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$$

Синус, косинус и тангенс углов и α $-\alpha$



Пусть точки M_1 и M_2 единичной окружности получены поворотом точки P(1;0) на углы α и $-\alpha$ соответственно). Тогда ось 0x делит угол $M_1 0 M_2$ пополам, и поэтому точки M_1 и M_2 симметричны относительно оси 0x.

Абсциссы этих точек совпадают, а ординаты отличаются только знаками. Точка M_1 имеет координаты $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, точка M_2 имеет координаты $(\cos(-\alpha); \sin(-\alpha))$.

Следовательно $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

Используя определение тангенса, получаем

.

$$tg(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -tg\alpha$$

Таким образом, $tg(-\alpha) = -tg\alpha$ $ctg(-\alpha) = -ctg\alpha$

Формулы сложения

Теорема. Для любых α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Синус, косинус и тангенс двойного угла

Выведем формулы синуса и косинуса двойного угла, используя формулы сложения.

1.

$$\sin 2\alpha = \sin(\alpha + \alpha) =$$
$$= \sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Итак, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2.

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) =$$
$$= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha =$$
$$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Итак, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

Полагая в формуле $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$ $\beta = \alpha$

получаем

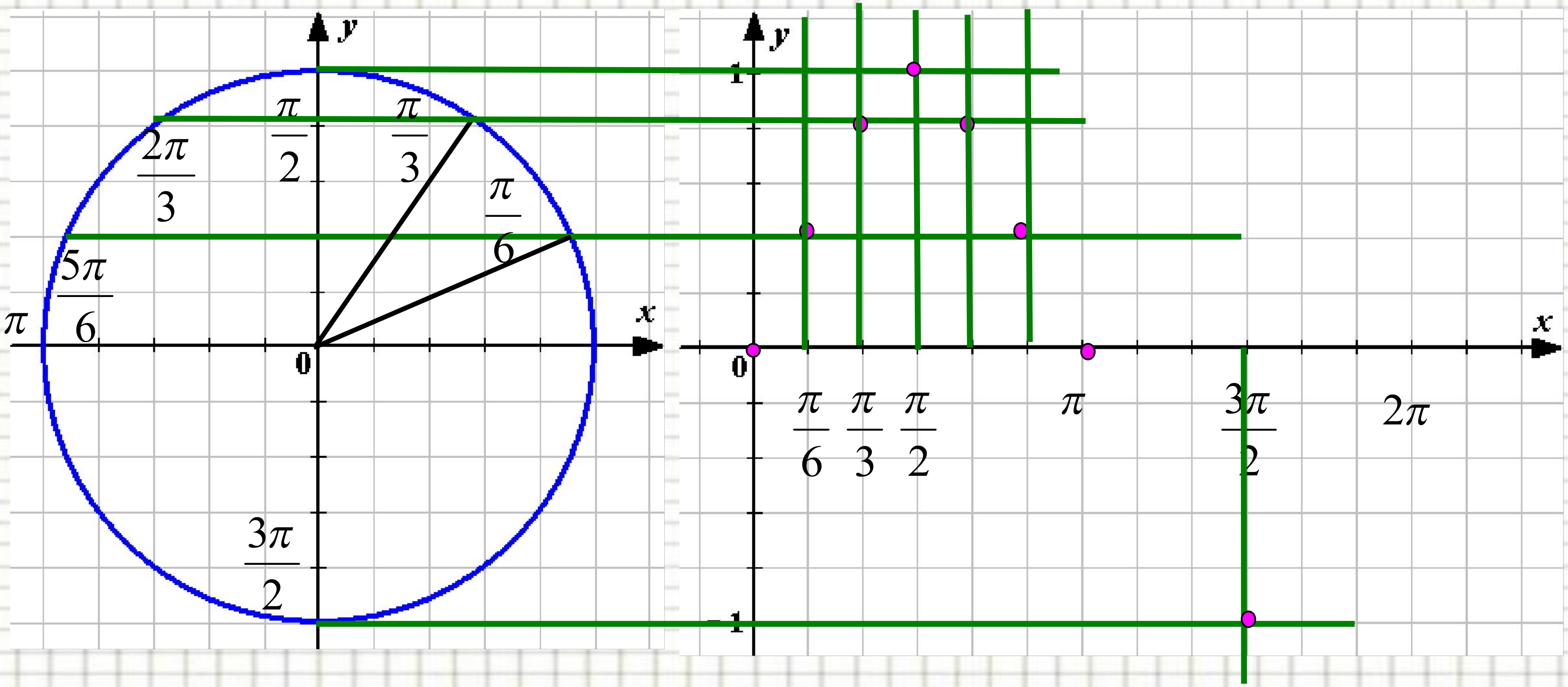
$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

Тригонометрические функции числового аргумента.

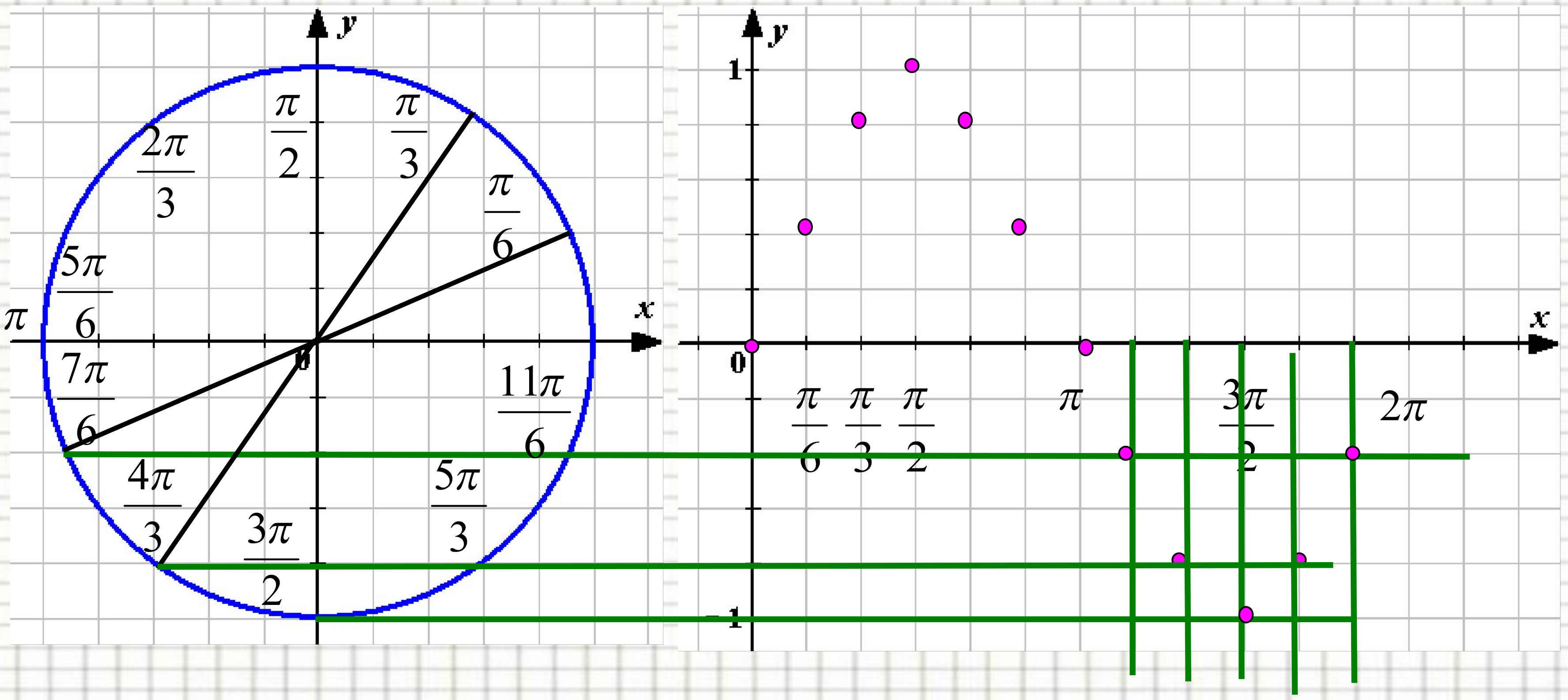
$y = \sin x$

$y = \cos x$

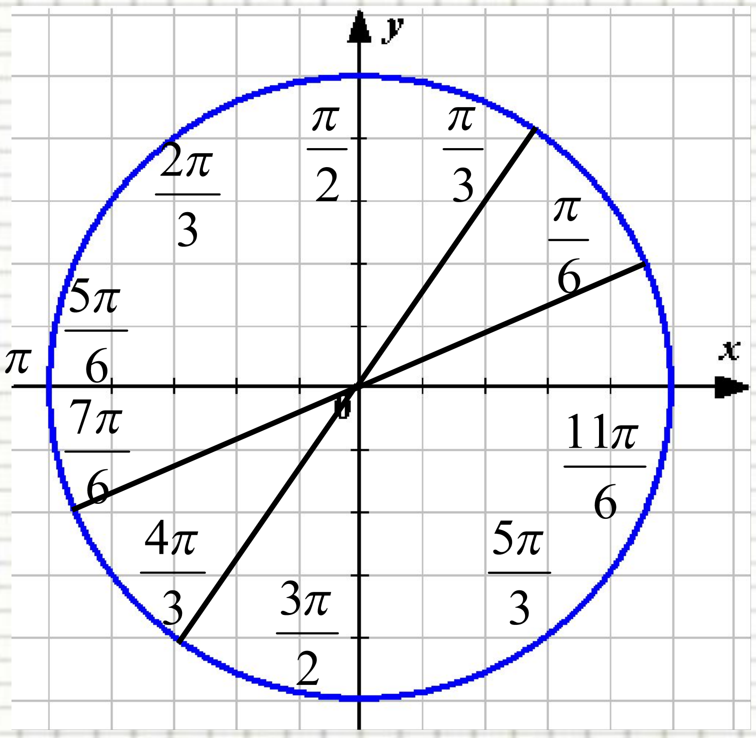
Построение графика функции y = sin x.

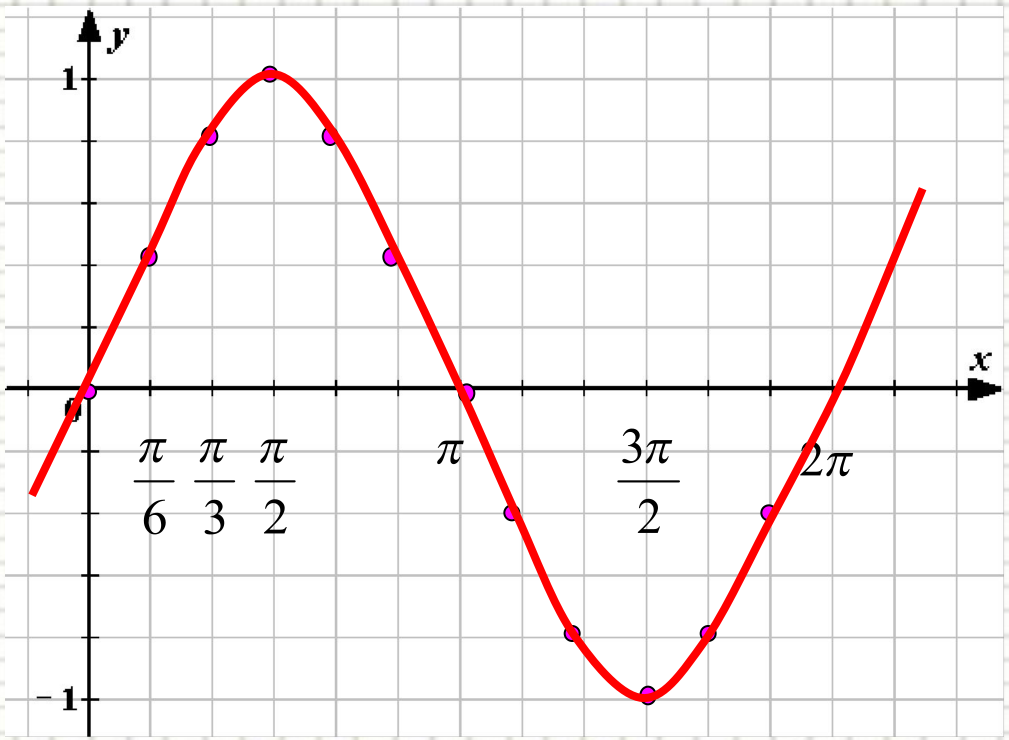


Построение графика функции y = sin x.



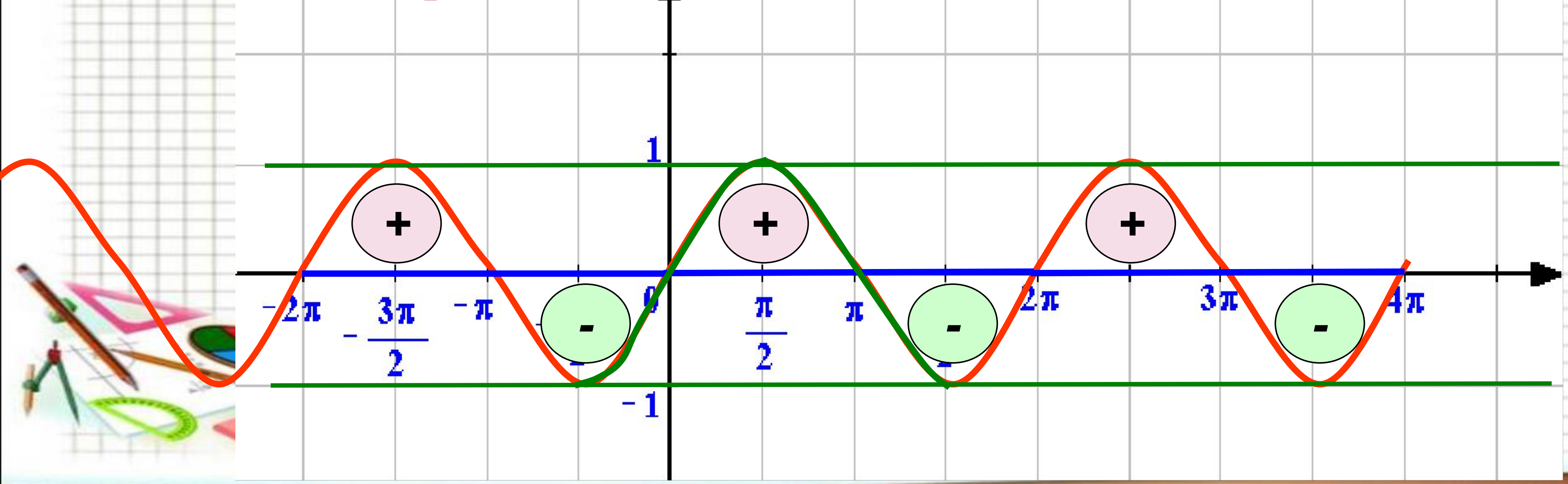
Построение графика функции $y = \sin x$.





Функция $y = \sin x$.

1. Областью определения функции является множество всех действительных чисел (R)
2. Областью изменений (Областью значений) - [- 1; 1].
3. Функция $y = \sin \alpha$ нечетная, т.к. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$
4. Функция периодическая, с главным периодом 2π. $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$.
5. Функция непрерывная
6. Возрастает: $[-\pi/2; \pi/2]$. Убывает: $[\pi/2; 3\pi/2]$.



Построение графика функции y = cos x.

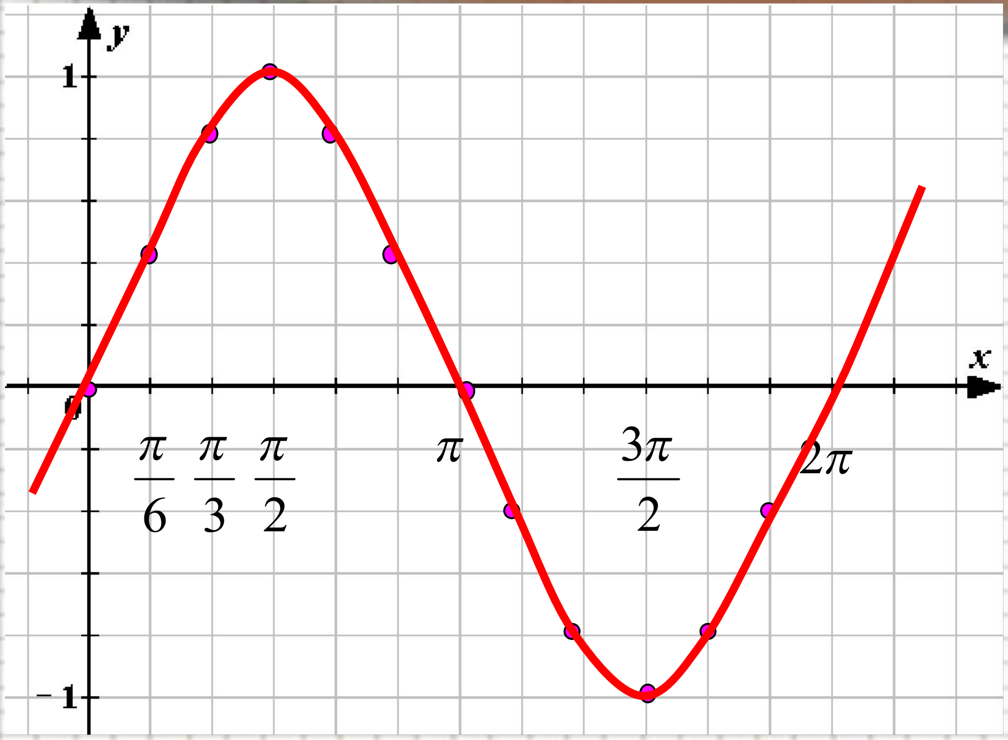


График функции y = cos x получается переносом графика функции y = sin x влево на π/2.

$$Sin\,(x + \pi/2) = \sin x \cos \pi/2 + \sin \pi/2 \cos x = \cos x$$

Функция y = cos x.

1. *Областью определения функции является множество всех действительных чисел (R)*
2. *Областью изменений (Областью значений) - [- 1; 1].*
3. *Функция y = cos α четная, т.к. cos (- α) = cos α*
4. *Функция периодическая, с главным периодом 2π.*
   cos (α + 2π) = cos α.
5. *Функция непрерывная*
6. *Возрастает:* [π; 2π].   *Убывает:* [0; π].