Тригонометрические функции и их применение

Цели урока

***Обучающая цель*:**

повторить свойства тригонометрических функций; показать их полезность; научить видеть знакомое в незнакомом.

Воспитательная цель:

формировать целостную систему знаний и научного мировоззрения, указать на красоту и изящество математических рассуждений, воспитание ответственности и чувства долга.

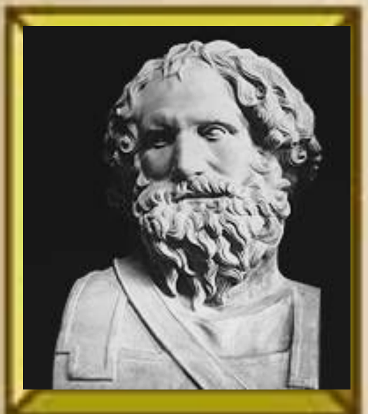
***Развивающая цель*:** развитие интереса учащихся к математике через взаимосвязь явлений и процессов; развитие творческого, критического мышления, развитие самостоятельности.

Развитие тригонометрии

Некоторые тригонометрические сведения были известны еще древним вавилонянам и египтянам, но основы этой науки были заложены в Древней Греции.

Греческий астроном Гиппарх во II веке до н. э. составил таблицу числовых значений хорд в зависимости от величин стягиваемых ими дуг.

Евклид



Архимед

Аполлоний
Пергский

Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу тригонометрические функции) встречаются уже в III в. до н.э. В работах великих математиков Древней Греции Евклида, Архимеда, Апполония Пергского.

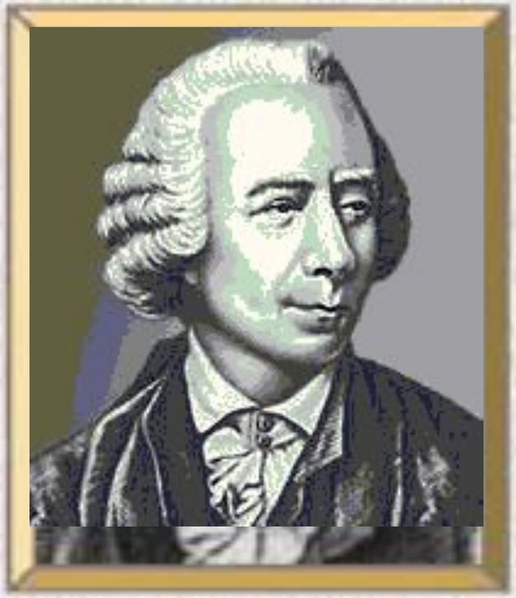
В XVII – XIX вв. тригонометрия становится одной из глав математического анализа. Она находит большое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов.

Иоганн Бернулли

Применял символы тригонометрических функций. Из физики известно, что уравнение гармонического колебания (например, колебания маятника) имеет вид:

$$y = A \sin (wt + a)$$

График гармонических колебаний называется синусоидой, поэтому в физике и технике сами гармонические колебания часто называют синусоидальными колебаниями.



Леонард Эйлер

Основоположник аналитической теории тригонометрических функций.

Разрабатывает учение о тригонометрических функциях любого аргумента

Трактует синус, косинус и т.д. не как тригонометрические линии, обязательно связанные с окружностью, а как тригонометрические функции, которые рассматриваются как отношение сторон прямоугольного треугольника, как числовые величины.

«Введение в анализ бесконечных» 1748 г.

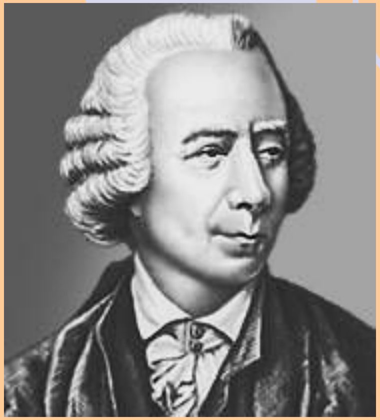
Слово **«тригонометрия»** *впервые встречается в 1505 году в заглавии книги немецкого теолога и математика Питискуса. Происхождение этого слова греческое (***trigonon** *— треугольник и* **metreo** *— измеряю). Иными словами тригонометрия – наука об измерении треугольников.*

При переводе арабских математических текстов
в XII в. было введено
латинским синус (sinus – изгиб, кривизна).

Слово косинус намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения complementy sinus, т.е. «дополнительный синус» (или иначе «синус дополнительной дуги»; вспомните $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$).

Региомонтан

Тангенсы возникли в связи с решением задач об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X в. Арабским математиком Абу-л-Вафой, который составил первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в.



Л. Эйлер

Декарт

Впервые построил синусоиду французский математик Жиль Пирсон.

После появления Декарта и

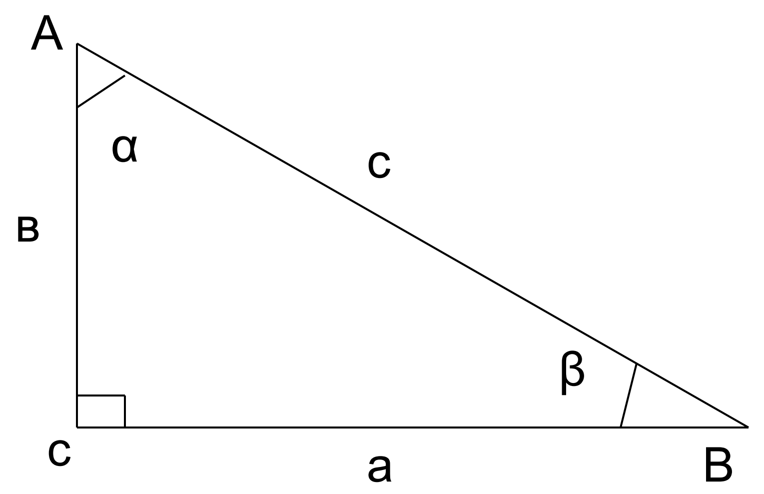
его знаменитого трактата «Геометрия» произошел взлет тригонометрии

Джон Валлис вскоре построил

график в два оборота, в своем труде «Механика» заявил, что график можно повторять бесконечно.

Основные тригонометрические функции:

- y = sin x
- y = cos x
- y = tg x
- y = ctg x
- y = sec x
- y = cosec x



sin α = a/c　　cos α = в/c

tg α = a/в　　ctg α = в/a

sec α = c/в　　cosec α = c/a

Определение тригонометрических функций

Свойства функций	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\operatorname{tg} x$	$y=\operatorname{ctg} x$
Область определения	D(f): R	D(f): R	$x\neq\pi/2+\pi n$	$x\neq\pi+\pi n$
Область значений	E(f):[-1;1]	E(f):[-1;1]	E(f): R	E(f): R
Четность (нечетность)	нечетная	четная	нечетная	нечетная
Периодичность основной период	2π	2π	π	π
Промежутки возрастания (убывания)	$[-\pi/2+2\pi n;\pi/2+2\pi n]$ $[\pi/2+2\pi n;3\pi/2+2\pi n]$	$[-\pi+2\pi n;\ 2\pi n]$ $[2\pi n;\ \pi+2\pi n]$	$(-\pi/2+\pi n;\pi/2+\pi n)$	$(\pi n;\pi+\pi n)$
Промежутки знакопос-тоянства	$f(x)>0$ $(2\pi n;\pi+2\pi n)$ $f(x)<0$ $(\pi+2\pi n;2\pi+2\pi n)$	$(-\pi/2+2\pi n;\pi/2+2\pi n)$ $(\pi/2+2\pi n;3\pi/2+2\pi n)$	$(\pi n;\pi/2+\pi n)$ $(-\pi/2+\pi n;+\pi n)$	$(\pi n;\pi/2+\pi n)$ $(\pi/2+\pi n;\pi+\pi n)$
Экстремумы	max $x=\pi/2+2\pi n$ min $x=3\pi/2+2\pi n$	max $x=2\pi n$ min $x=\pi+2\pi n$	нет	нет

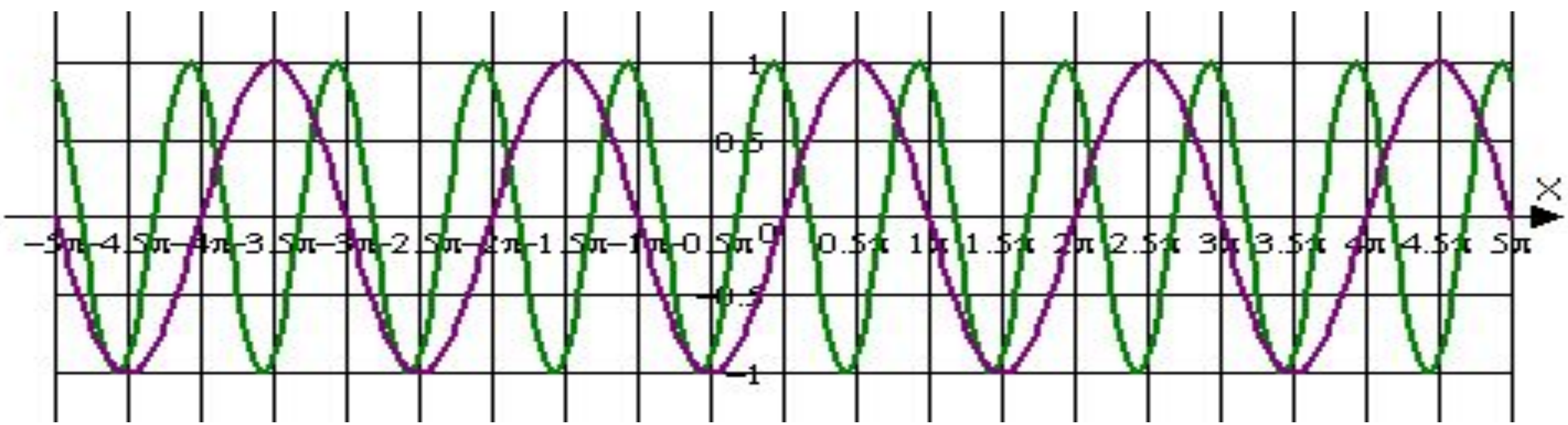
	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
y=2sin x	R	[-2;2]	2π	Расширение по оси оу в 2 раза
y=1/2sin x	R	[-1/2;1/2]	2π	Сжатие графика по оси оу в 2 раза

	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
y=cos2x	R	[-1;1]	π	Сжатие по оси ох в два раза
y= cos ½ x	R	[-1;1]	4π	Растяжение по оси Ох в два раза

	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
y=tg x +2;	x≠π/2+πn	R	π	График поднимется на 2 единицы вверх по оси оу
y= tg(x+π/3)	x≠π/6+πn	R	π	График сдвинется влево по оси ох на π/3

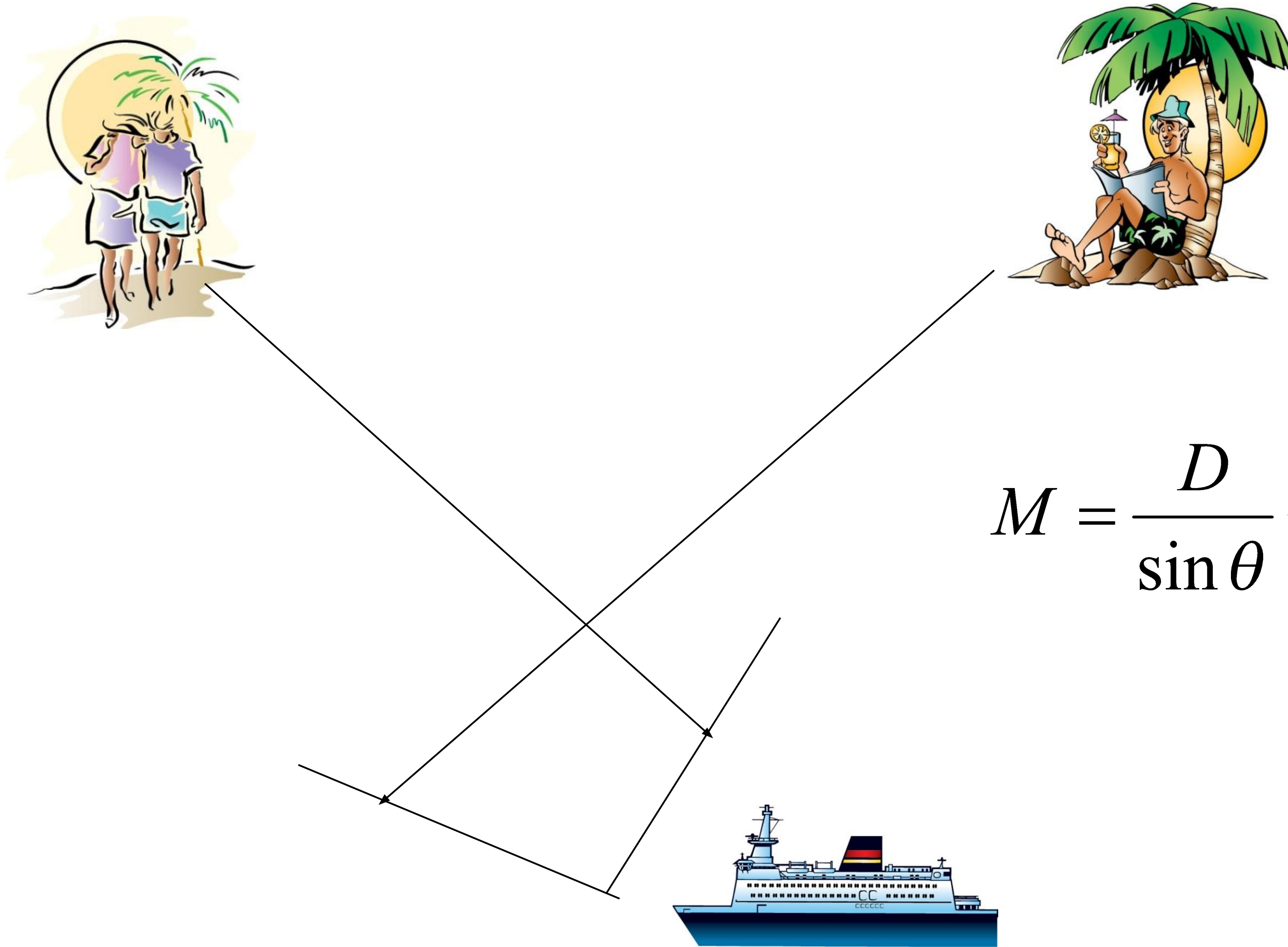
	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
y=1-sin(x/2)	R	[0;2]	4π	Растяжение графика по оси ох в 2 раза, параллельный перенос графика y=sin x единицу вверх по оу

Тригонометрические функции используются для описания колебательных как механических так и электрических процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой **$y = A\sin(\omega x + \alpha)$**. Эта формула называется формулой гармонических колебаний. Величина A называется амплитудой колебаний, она характеризует размах колебаний. Величина ω называется частотой колебания, α – начальная фаза колебания.



Для обеспечения безопасности судовождения в настоящее время создан ряд радиотехнических средств. В радиопередатчике формируются радиосигналы — электрические колебания несущей частоты, промодулированные по амплитуде, частоте или фазе в соответствии с передаваемым сообщением. Радиосигналы излучаются (в виде электромагнитных волн) передающей антенной в окружающее пространство, достигают приемной антенны и поступают в радиоприемник, где они усиливаются и преобразуются в сигналы, адекватные передаваемому сообщению. В радиотехнике широко используется электрический резонанс.

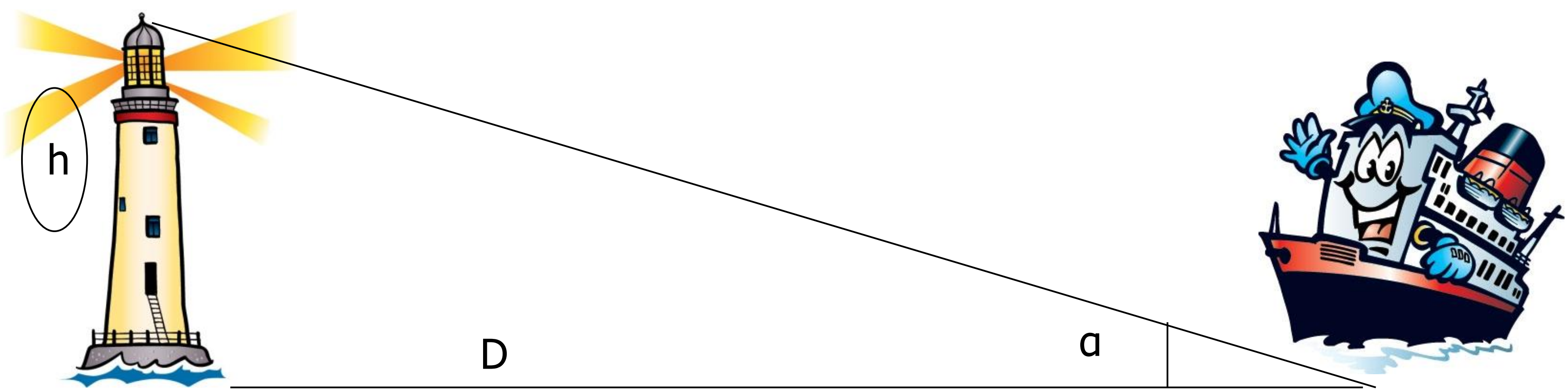
- Для определения места судна по береговым ориентирам. Нахождение средней квадратической ошибки.



$$M = \frac{D}{\sin\theta} \bullet \sqrt{2}$$

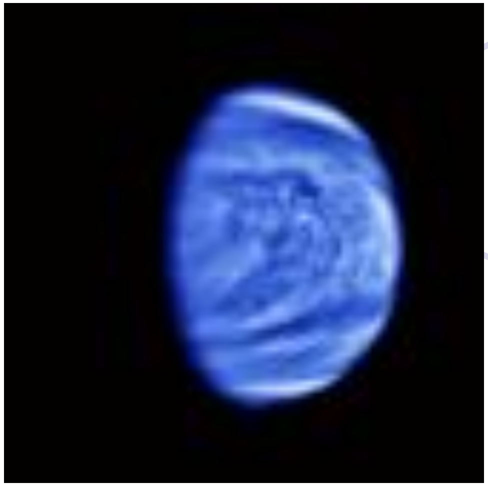
- Определение расстояния по вертикальному углу от судна до маяка

  $D = h \cdot ctg\ \alpha$



Механические колебания применяются

для скорейшей укладки бетона специальными виброукладчиками, для просеивания материалов на вибриситах и даже для почти безболезненного высверливания отверстий в зубах

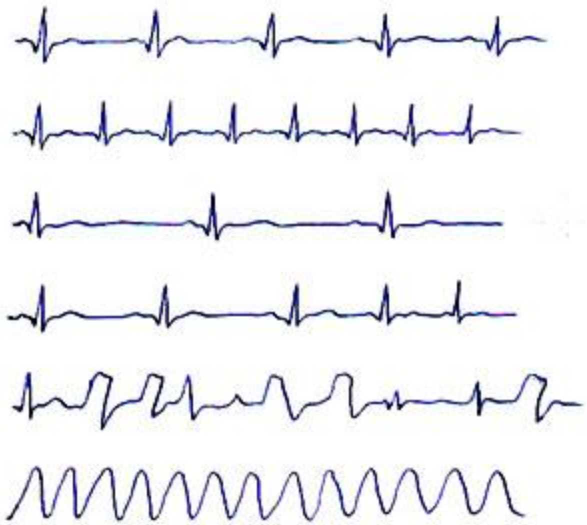
Акустические колебания нужны для приема и воспроизведения звука, а электромагнитные – для радио, телевидения, связи с космическими ракетами.

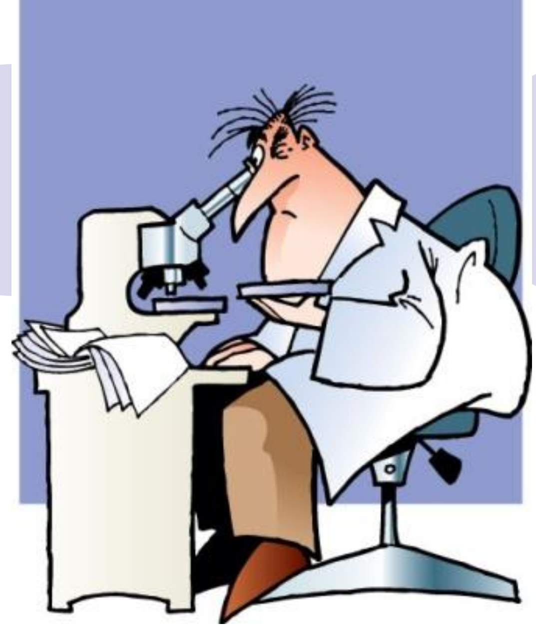
Электромагнитные колебания доносят до нас вести о сложных процессах, происходящих внутри звезд, о взрывах в отдаленных галактиках, о нейтронных звездах.

С помощью электромагнитных колебаний

были получены снимки обратной стороны

Луны и вечно закрытой облаками Венеры





Колебания сопровождают и биологические процессы, например, слух, зрение, восприятие ультрафиолета, (используемые многими биологическими видами), передачу возбуждения по нервной ткани, работу сердца и мозга.

Записывая работу сердца или мозга, врачи получают электрокардиограммы и энцефалограммы. Как говорил создатель учения о биосфере академик Вернадский: “Кругом нас, в нас самих, всюду и везде, без перерыва, вечно сменяясь, совпадая и сталкиваясь, идут излучения разной длины – от волн, длина которых измеряется десятимиллионными долями миллиметра, до длинных, измеряемых километрами”.

- *Но колебания не всегда полезны. Вибрация станка действует на резец и обрабатываемую деталь и может привести к браку; вибрация жидкости в топливных баках ракеты угрожает их целостности, а вибрация самолетных крыльев при неблагоприятных условиях может привести к катастрофе.*

- *Даже хорошо затянутая гайка под влиянием вибрации ослабевает и станок разбалтывается. А самое страшное – под действием вибрации меняется внутренняя структура металлов, что приводит к так называемой “усталости” и последующему неожиданному*

  разрушению

  конструкции.

- *Колебаниями объясняются случай падения моста, по которому шло в ногу воинское подразделение, а также разрушение мостов во время ураганов, катастрофы в кузнечных цехах, где несколько механических молотов начинали работать в такт.*

- *Таким образом, отметим, что колебания, контролируемые человеком, весьма полезны. Однако они могут превратиться в опасного врага. Поэтому надо уметь изучать колебания, знать их свойства. А здесь без математических расчетов не обойтись.*