Тригонометрические функции и их применение

Цели урока

***Обучающая цель*:**
повторить свойства тригонометрических функций; показать их полезность; научить видеть знакомое в незнакомом.

Воспитательная цель:
формировать целостную систему знаний и научного мировоззрения, указать на красоту и изящество математических рассуждений, воспитание ответственности и чувства долга.

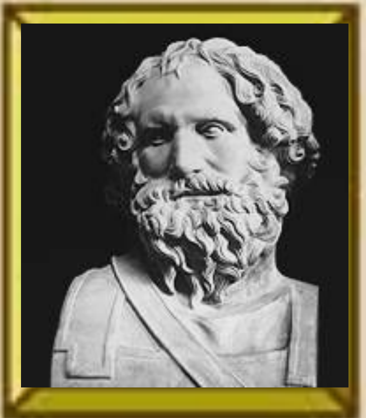
***Развивающая цель*:** развитие интереса учащихся к математике через взаимосвязь явлений и процессов; развитие творческого, критического мышления, развитие самостоятельности.

Развитие тригонометрии

Некоторые тригонометрические сведения были известны еще древним вавилонянам и египтянам, но основы этой науки были заложены в Древней Греции.

Греческий астроном Гиппарх во II веке до н. э. составил таблицу числовых значений хорд в зависимости от величин стягиваемых ими дуг.

Евклид



Архимед

Аполлоний Пергский

Фактически различные отношения отрезков треугольника и окружности (а по существу тригонометрические функции) встречаются уже в III в. до н.э. В работах великих математиков Древней Греции Евклида, Архимеда, Апполония Пергского.

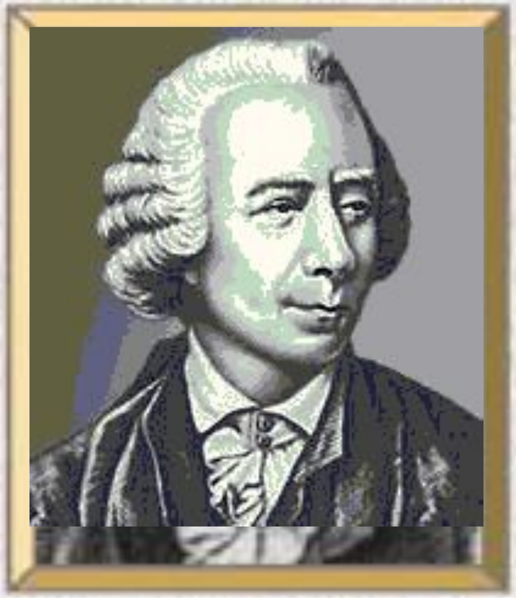
В XVII – XIX вв. тригонометрия становится одной из глав математического анализа. Она находит большое применение в механике, физике и технике, особенно при изучении колебательных движений и других периодических процессов.

Иоганн Бернулли

Применял символы тригонометрических функций. Из физики известно, что уравнение гармонического колебания (например, колебания маятника) имеет вид:

$$y = A \sin (wt + a)$$

График гармонических колебаний называется синусоидой, поэтому в физике и технике сами гармонические колебания часто называют синусоидальными колебаниями.



Леонард Эйлер

Основоположник аналитической теории тригонометрических функций.

Разрабатывает учение о тригонометрических функциях любого аргумента

Трактует синус, косинус и т.д. не как тригонометрические линии, обязательно связанные с окружностью, а как тригонометрические функции, которые рассматриваются как отношение сторон прямоугольного треугольника, как числовые величины.

«Введение в анализ бесконечных» 1748 г.

Слово **«тригонометрия»** *впервые встречается в 1505 году в заглавии книги немецкого теолога и математика Питискуса. Происхождение этого слова греческое (***trigonon** *— треугольник и* **metreo** *— измеряю). Иными словами тригонометрия – наука об измерении треугольников.*

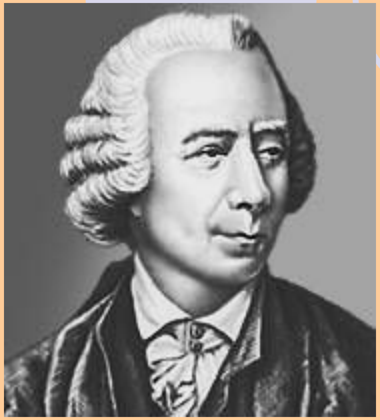
При переводе арабских математических текстов
в XII в. было введено
латинским синус (sinus – изгиб, кривизна).

Слово **косинус** намного моложе. Косинус – это сокращение латинского выражения *complementy sinus*, т.е. «дополнительный синус» (или иначе «синус дополнительной дуги»; вспомните

$$\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)).$$

Региомонтан

Тангенсы возникли в связи с решением задач об определении длины тени. Тангенс (а также котангенс, секанс и косеканс) введен в X в. Арабским математиком Абу-л-Вафой, который составил первые таблицы для нахождения тангенсов и котангенсов. Однако эти открытия долгое время оставались неизвестными европейским ученым, и тангенсы были заново открыты в XIV в.



Л. Эйлер

Декарт

Впервые построил синусоиду французский математик Жиль Пирсон.

После появления Декарта и

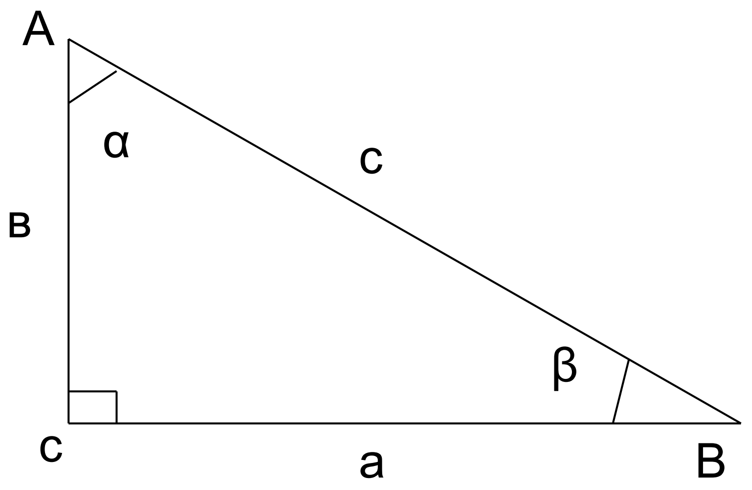
его знаменитого трактата «Геометрия» произошел взлет тригонометрии

Джон Валлис вскоре построил

график в два оборота, в своем труде «Механика» заявил, что график можно повторять бесконечно.

Основные тригонометрические функции:

- y = sin x
- y = cos x
- y = tg x
- y = ctg x
- y = sec x
- y = cosec x



sin α = a/c   cos α = в/c

tg α = a/в   ctg α = в/a

sec α = c/в   cosec α = c/a

Определение тригонометрических функций

Свойства функций	y=sin x	y= cos x	y= tg x	y= ctg x
Область определения	D(f): R	D(f): R	x≠π/2+πn	x≠π+πn
Область значений	E(f):[-1;1]	E(f):[-1;1]	E(f): R	E(f): R
Четность (нечетность)	нечетная	четная	нечетная	нечетная
Периодичность основной период	2π	2π	π	π
Промежутки возрастания (убывания)	[-π/2+2πn;π/2+2πn] [π/2+2πn;3π/2+2πn]	**[-π+2πn; 2πn]** **[2πn; π+2πn]**	**(-π/2+πn;π/2+πn)**	**(πn;π+πn)**
Промежутки знакопос-тоянства	**f(x)>0 (2πn;π+2πn)** **f(x)<0 (π+2πn;2π+2πn)**	**(-π/2+2πn;π/2+2πn)** **(π/2+2πn;3π/2+2πn)**	**(πn;π/2+πn)** **(-π/2+πn;+πn)**	**(πn;π/2+πn)** **(π/2+πn;π+πn)**
Экстремумы	**max x= π/2+2πn** **min x= 3π/2+2πn**	**max x= 2πn** **min x= π+2πn**	нет	нет

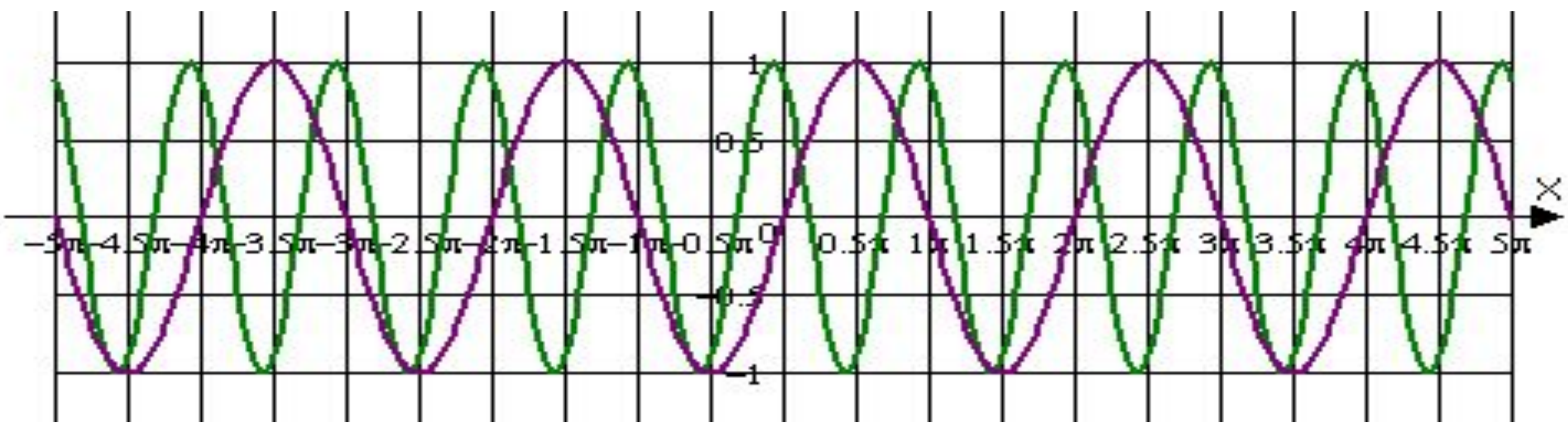
	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
y=2sin x	R	[-2;2]	2π	Расширение по оси оу в 2 раза
y=1/2sin x	R	[-1/2;1/2]	2π	Сжатие графика по оси оу в 2 раза

	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
y=cos2x	R	[-1;1]	π	Сжатие по оси ох в два раза
y= cos ½ x	R	[-1;1]	4π	Растяжение по оси Ох в два раза

	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
$y=tg\ x+2$;	$x \neq \pi/2+\pi n$	R	π	График поднимется на 2 единицы вверх по оси оy
$y=tg(x+\pi/3)$	$x \neq \pi/6+\pi n$	R	π	График сдвинется влево по оси оx на π/3

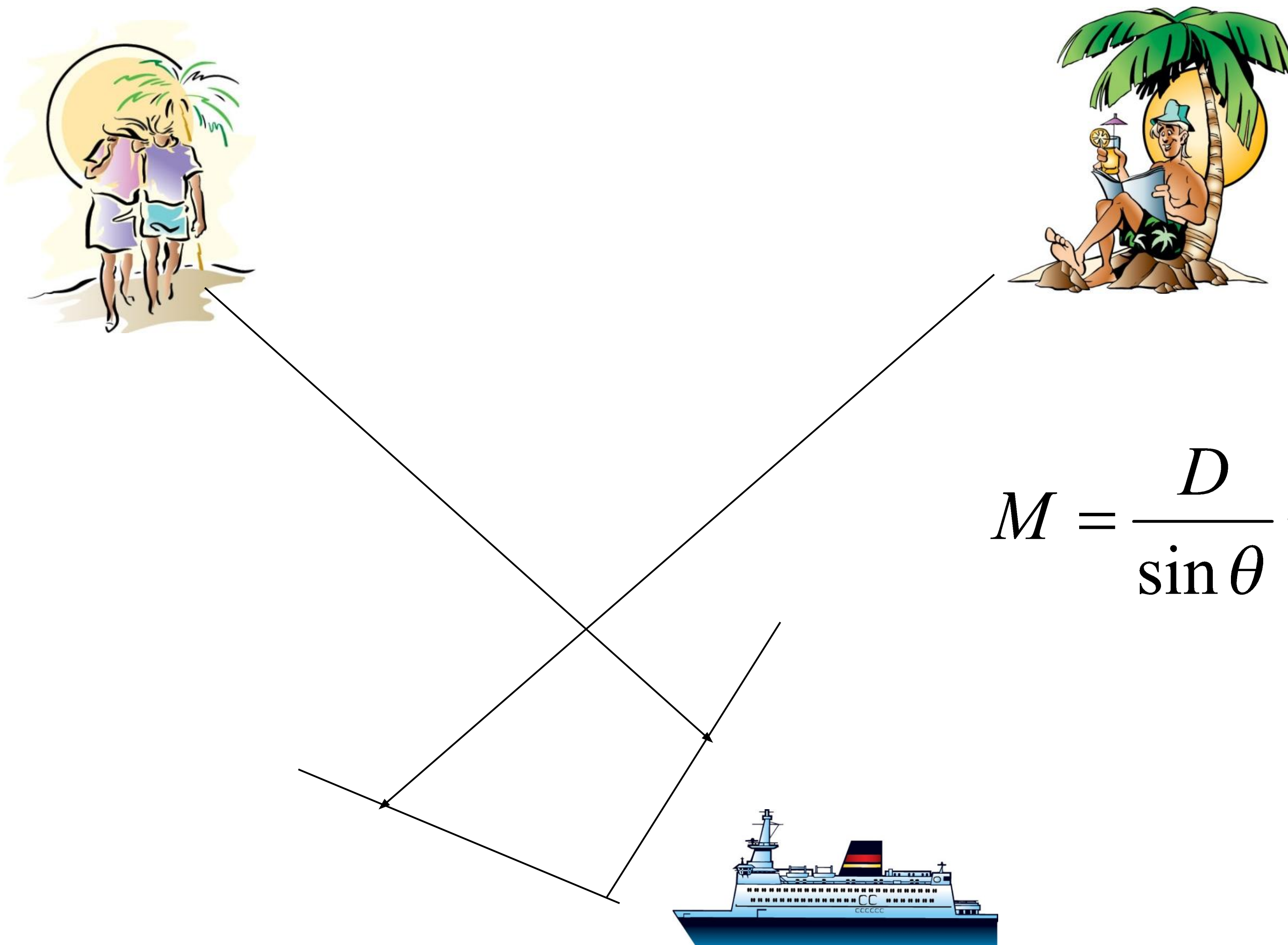
	Область определения	*Область значений*	*Период*	*Преобразования*
$y=1-\sin(x/2)$	R	[0;2]	4π	Растяжение графика по оси оx в 2 раза, параллельный перенос графика y=sin x единицу вверх по оy

Тригонометрические функции используются для описания колебательных как механических так и электрических процессов. Один из наиболее важных процессов такого рода описывается формулой **y =Asin (ωx +α)**. *Эта формула называется формулой гармонических колебаний. Величина А называется амплитудой колебаний, она характеризует размах колебаний. Величина ω называется частотой колебания, α – начальная фаза колебания.*



Для обеспечения безопасности судовождения в настоящее время создан ряд радиотехнических средств. В радиопередатчике формируются радиосигналы — электрические колебания несущей частоты, промодулированные по амплитуде, частоте или фазе в соответствии с передаваемым сообщением. Радиосигналы излучаются (в виде электромагнитных волн) передающей антенной в окружающее пространство, достигают приемной антенны и поступают в радиоприемник, где они усиливаются и преобразуются в сигналы, адекватные передаваемому сообщению. В радиотехнике широко используется электрический резонанс.

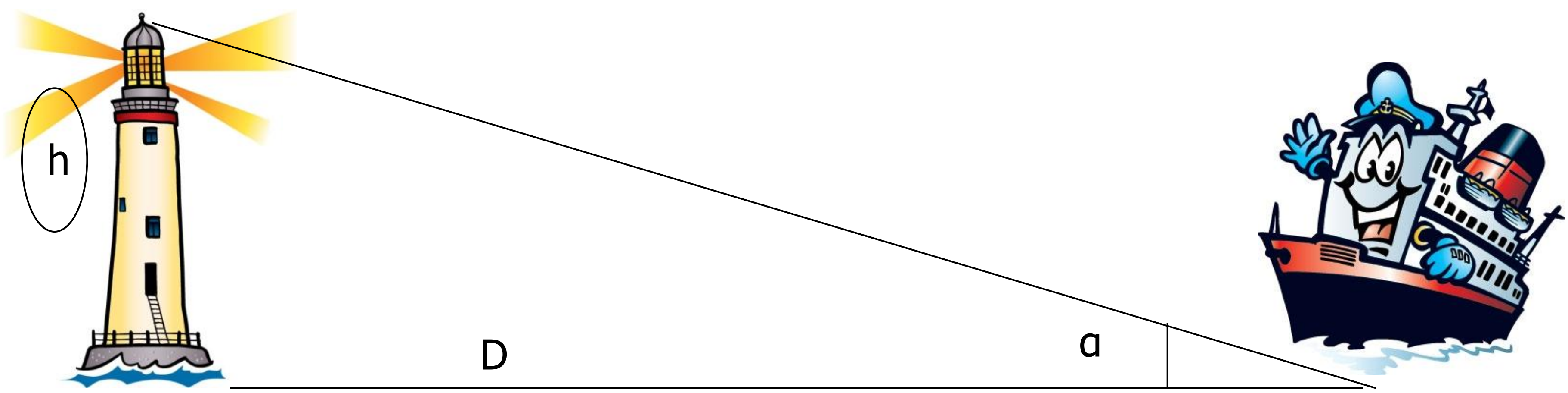
- Для определения места судна по береговым ориентирам. Нахождение средней квадратической ошибки.



$$M = \frac{D}{\sin\theta} \bullet \sqrt{2}$$

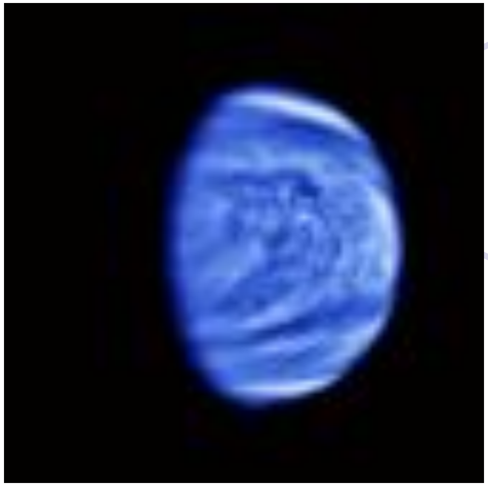
- Определение расстояния по вертикальному углу от судна до маяка

  $D = h \cdot ctg\ \alpha$



Механические колебания применяются

для скорейшей укладки бетона специальными виброукладчиками, для просеивания материалов на вибруситах и даже для почти безболезненного высверливания отверстий в зубах



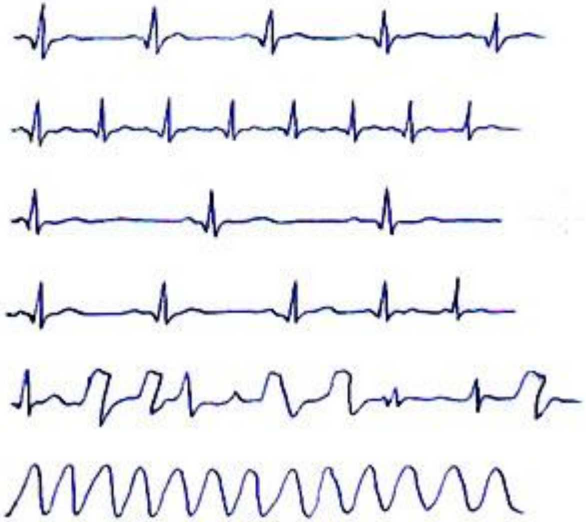
Акустические колебания нужны для приема и воспроизведения звука, а электромагнитные – для радио, телевидения, связи с космическими ракетами.

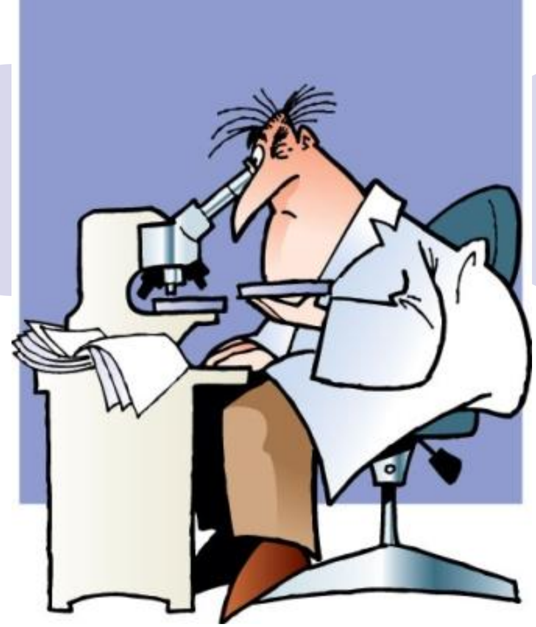
Электромагнитные колебания доносят до нас вести о сложных процессах, происходящих внутри звезд, о взрывах в отдаленных галактиках, о нейтронных звездах.

С помощью электромагнитных колебаний

были получены снимки обратной стороны

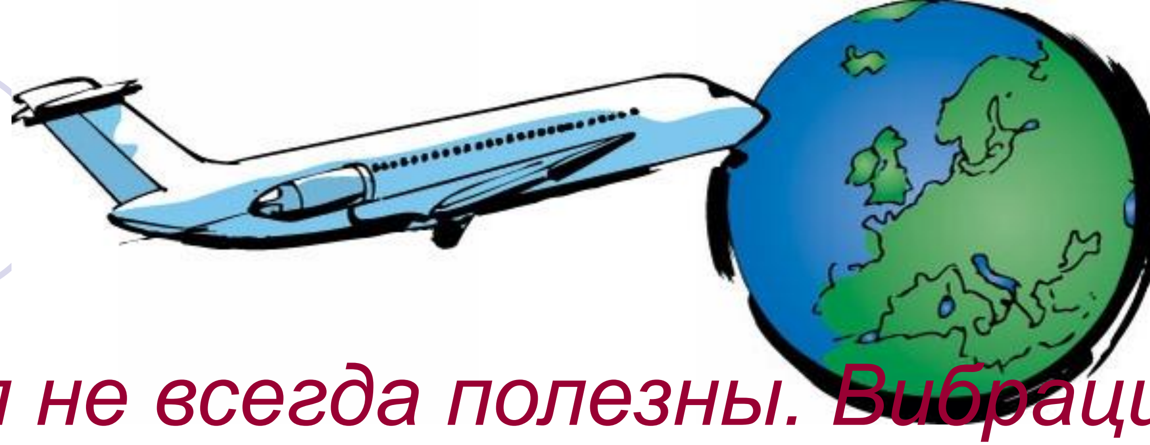
Луны и вечно закрытой облаками Венеры





Колебания сопровождают и биологические процессы, например, слух, зрение, восприятие ультрафиолета, (используемые многими биологическими видами), передачу возбуждения по нервной ткани, работу сердца и мозга.

Записывая работу сердца или мозга, врачи получают электрокардиограммы и энцефалограммы. Как говорил создатель учения о биосфере академик Вернадский: “Кругом нас, в нас самих, всюду и везде, без перерыва, вечно сменяясь, совпадая и сталкиваясь, идут излучения разной длины – от волн, длина которых измеряется десятимиллионными долями миллиметра, до длинных, измеряемых километрами”.



- Но колебания не всегда полезны. Вибрация станка действует на резец и обрабатываемую деталь и может привести к браку; вибрация жидкости в топливных баках ракеты угрожает их целостности, а вибрация самолетных крыльев при неблагоприятных условиях может привести к катастрофе.

- *Даже хорошо затянутая гайка под влиянием вибрации ослабевает и станок разбалтывается. А самое страшное – под действием вибрации меняется внутренняя структура металлов, что приводит к так называемой “усталости” и последующему неожиданному*

  разрушению

  конструкции.

- *Колебаниями объясняются случай падения моста, по которому шло в ногу воинское подразделение, а также разрушение мостов во время ураганов, катастрофы в кузнечных цехах, где несколько механических молотов начинали работать в такт.*

- *Таким образом, отметим, что колебания, контролируемые человеком, весьма полезны. Однако они могут превратиться в опасного врага. Поэтому надо уметь изучать колебания, знать их свойства. А здесь без математических расчетов не обойтись.*