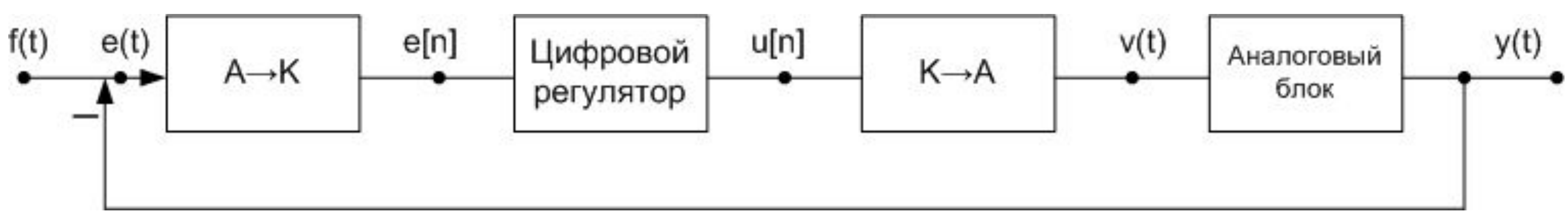
Линейные системы авторегулирования с цифровым регулятором.

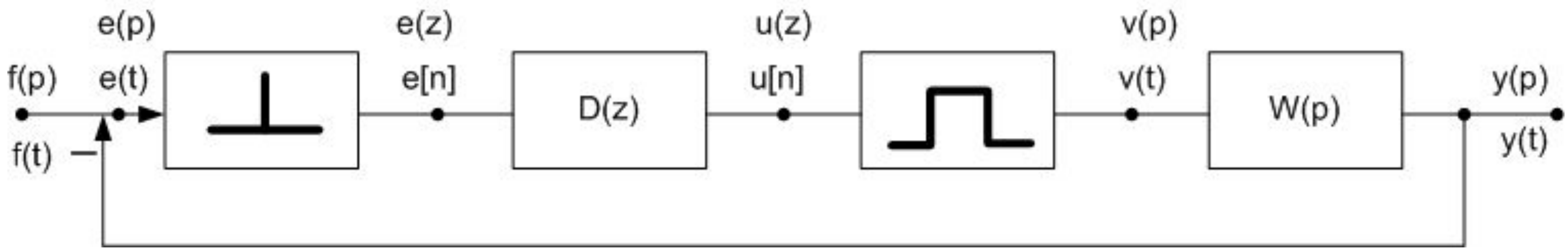
Линейные системы с цифровым регулятором относятся к классу ***линейных импульсных систем автоматического управления*** (ИС).

Основная особенность ИС состоит в том, что ***информация на одном участке цепи передается и преобразуется в цифровой форме, а на другом участке цепи передается и преобразуется в аналоговой форме***. Поэтому необходимыми элементами ИС являются преобразователи «аналог-код» и «код-аналог». Регулятор обычно преобразует информацию в цифровой форме. Отсюда название - ***цифровой регулятор***. В современной терминологии это некоторый процессор, снабженный преобразователями «аналог-код» на входе и «код-аналог» на выходе.

Функциональная схема ИС.



Структурная схема ИС.



Рассмотрим элементы этой схемы.

1. <u>Преобразователь «аналог-код»</u> преобразует сигнал непрерывного элемента **e(t)** в числовую последовательность **e(nT)**, где **n** – целочисленная переменная, **n** = 0, 1, 2, 3…

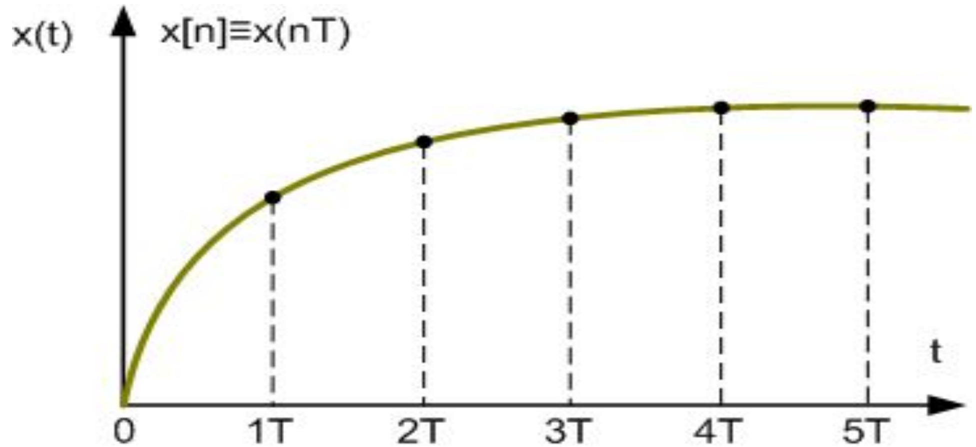
Величина **T** называется ***периодом квантования по времени***.

На структурных схемах преобразователь «аналог-код» изображается так:

или

и называется δ-импульсным элементом или δ-импульсным модулятором.

Преобразователь «аналог-код» служит для перехода от аналоговой формы сигнала к цифровой форме, т.е. для квантования сигнала по времени.



Предполагается, что за бесконечно малый интервал времени фиксируется значение сигнала в момент времени **mT**. Вся информация, заключенная внутри интервала времени **(m-1)T<t< mT** пропадает.

В математике функцию целочисленного аргумента называют ***числовой последовательностью***. В ИС, так как процессы рассматриваются во времени, используется термин ***решётчатая функция***. Причем **n** – переменная, а **T** –параметр.

Для сокращения будем использовать обозначение:

$$\mathbf{f[n] \equiv f(n \cdot T)}$$

2. <u>Цифровой регулятор **D(z)**.</u> Осуществляет преобразование поступающей на его вход числовой последовательности **e[n]** в соответствии с заданным законом в другую числовую последовательность.

$$\mathbf{u(n \cdot T) = F\big(e(n \cdot T)\big)} \qquad \textbf{(1)}$$

Ограничимся случаем, когда закон преобразования линейный. В этом случае сигнал на выходе блока в **n**-ный такт **u[n]** может быть только линейной комбинацией следующих величин:

а) входного сигнала в данный такт **e[n]**;

б) некоторого числа **M** предшествующих значений входного сигнала: **e[n-1], e[n-2], …, e[n-M];**

в) некоторого числа **N** предшествующих значений выходного сигнала: **u[n-1], u[n-2], …, u[n-N].**

Предшествующие данному **n**-ному такту значения входных и выходных сигналов запоминаются в ячейках памяти блока **D**. Таким образом, линейный закон преобразования информации блоком **D** может быть записан в форме:

$$\mathbf{u[n] = a_1 \cdot u[n-1] + \cdots + a_N \cdot u[n-N] + b_0 \cdot e[n] + b_1 \cdot e[n-1] + \cdots + b_M \cdot e[n-M]} \qquad \textbf{(2)}$$

Где $\mathbf{a_i}$ и $\mathbf{b_i}$ – числовые коэффициенты .

Выражения вида **(2)** называются ***рекуррентными*** или ***разностными уравнениями***.

3. <u>Преобразователь код-аналог</u> (амплитудно-импульсный модулятор) называют также ***формирователем***, ***экстраполятором*** или ***амплитудно-импульсным элементом***.

Функцию, задающую форму импульса в общем случае обозначим **s(t)**. Эта функция отлична от нуля только на промежутке времени длительностью **T**.

Импульсная последовательность, которую формирователь модулирует по амплитуде посредством числовой последовательности **u[n]**, описывается запаздывающими функциями **s(t)**:

$$\mathbf{s(t),\ s(t\text{-}T),\ s(t\text{-}2T),\ \ldots,\ s(t\text{-}mT),\ldots} \qquad \textbf{(3)}$$

Причем для любого целого положительного числа **k** функция **s(t-kT)=0** если **t-kT<0** или **t-kT>T.**

Будем обозначать номер такта буквой **m** **(m=0, 1, 2,…)**. Сигнал на выходе формирователя равен:

$$\begin{array}{lll} \mathbf{m = 0,} & \mathbf{0 \le t < T,} & \mathbf{v(t) = u(0) \cdot s(t),} \\ \mathbf{m = 1,} & \mathbf{T \le t < 2T,} & \mathbf{v(t) = u(T) \cdot s(t - T),} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{m = k,} & \mathbf{kT \le t < (k+1)T,} & \mathbf{v(t) = u(kT) \cdot s(t - kT),} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \qquad \textbf{(4)}$$

Функцию **v(t)** можно записать в виде суммы:

$$\mathbf{v(t) = \sum_{m=0}^{\infty} u(mT) \cdot s(t - mT)} \qquad \textbf{(5)}$$

Z-преобразование.

Прямое Z-преобразование:

$$\mathbf{F(z)} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{f}[\mathbf{n}] \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \qquad \textbf{(1)}$$

Часто используется обозначение:

$$\mathbf{F(z)} = \mathbf{Z}\{\mathbf{f}[\mathbf{n}]\}$$

где $\mathbf{f}\,[\mathrm{n}]$ – исходная числовая последовательность.

Обратное Z-преобразование:

$$\mathbf{f}[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{r} \mathbf{F}(z) \cdot z^{n-1} dz \qquad \textbf{(2)}$$

Интегрирование ведется вдоль окружности радиуса $\boldsymbol{r}$, при этом все полюсы $\mathbf{F(z)}z^{n-1}$ располагаются внутри окружности.

Свойства Z-преобразования.

Пусть имеются две функции:

$$\mathbf{f}[\mathbf{n}] = \mathbf{Z}^{-1}\{\mathbf{F(z)}\} \quad \text{или} \quad \mathbf{f}[\mathbf{n}] \Leftrightarrow \mathbf{F(z)}$$

$$\varphi[\mathbf{n}] = \mathbf{Z}^{-1}\{\boldsymbol{\Phi}\mathbf{(z)}\} \quad \text{или} \quad \varphi[\mathbf{n}] \Leftrightarrow \boldsymbol{\Phi}\mathbf{(z)}$$

1. Линейность.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{f}[\mathbf{n}] + \mathbf{b}\cdot\varphi[\mathbf{n}] \Leftrightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{F(z)} + \mathbf{b}\cdot\Phi\mathbf{(z)}$$

2. Теорема об умножении оригинала на линейную последовательность y[n] = n.

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}[\mathbf{n}] \Leftrightarrow -\mathbf{z}\cdot\frac{\mathbf{dF(z)}}{\mathbf{dz}}$$

3. Теорема об умножении оригинала на показательную последовательность $y[n] = d^n$.

$$d^n \cdot f[n] \Leftrightarrow F(d^{-1} \cdot z)$$

4. Теорема целочисленного запаздывания.

$$f[n-k] \cdot 1[n-k] \Leftrightarrow z^{-k} \cdot F(z)$$

5. Теорема упреждения.

$$f[n+k] \Leftrightarrow z^k \cdot F(z) - z^k \cdot \sum_{n=0}^{k-1} f[n] \cdot z^{-n}$$

6. Z-преобразование разности.

$$\Delta f[n] \Leftrightarrow (z-1) \cdot F(z) - z \cdot f(0)$$

7. Z-преобразование суммы числовой последовательности.

$$\sum_{m=0}^{n} f[m] \Leftrightarrow \frac{z}{(z-1)} \cdot F(z)$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} f[m] \Leftrightarrow \frac{1}{(z-1)} \cdot F(z)$$

8. Теорема о начальном значении.

$$f\left[0\right] \Leftrightarrow \lim_{z\to\infty} F(z)$$

9. Теорема о конечном значении.

Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f[n]$

То значение **f[∞]** может быть вычислено по соотношению:

$$f[\infty] = \lim_{n\to\infty} f[n] \Leftrightarrow \lim_{z\to 1+} (z-1)\cdot F(z)$$

10. Теорема свертки.

$$f[n] * \varphi[n] \Leftrightarrow F(z)\cdot \Phi(z)$$

Описание сигналов с помощью δ-функций.

Пусть **x(t)** – некоторая функция. Преобразование Лапласа функции **x(t)** равно **X(p)**. Квантованием функции **x(t)** по времени получаем числовую последовательность (решетчатую функцию) **x(nT).**

<u>Определение.</u> Назовем ***δ-последовательностью*** $\mathbf{x^*(t)}$, соответствующей функции **x(t)**, следующее выражение:

$$\mathbf{x^*(t)} = \begin{cases} \mathbf{x(nT)\cdot\delta(t-nT),} & \text{если}\quad \mathbf{t = nT,}\qquad \mathbf{n = 0, 1, 2, \ldots} \\ \mathbf{0,} & \text{если}\quad \mathbf{t \neq nT} \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

δ-последовательность $\mathbf{x^*(t)}$ можно записать в форме бесконечной суммы:

$$\mathbf{x^*(t)} = \sum_{\mathbf{m}=0}^{\infty} \mathbf{x(mT)\cdot\delta(t - mT)} \qquad \mathbf{(2)}$$

Действительно, если **t** кратно периоду квантования, то при **t=nT** в правой части формулы **(2)** отлично от нуля только одно слагаемое

$$\mathbf{x(nT)\cdot\delta(t-nT)}$$

Если **t** некратно периоду квантования **T**, то **все** слагаемые в формуле **(2)** равны нулю. Следовательно, соотношения **(1)** и **(2)** тождественны.

К δ-последовательности, в отличие от числовой последовательности, можно применить преобразование Лапласа:

$$\mathbf{L}\{\mathbf{x}^*(\mathbf{t})\} = \sum_{\mathbf{m}=0}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{mT}) \cdot e^{-\mathbf{pTm}} \qquad \textbf{(3)}$$

Дискретным преобразованием Лапласа последовательности **x(nT)** называют функцию комплексной переменной **p**, определяемую суммой сходящегося ряда:

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{p}) = \mathbf{D}\{\mathbf{x}(\mathbf{nT})\} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{nT}) \cdot e^{-\mathbf{pTn}} \qquad \textbf{(4)}$$

Обозначим:

$$\mathbf{z} = e^{\mathbf{pT}} \qquad \textbf{(5)}$$

Тогда соотношение **(4)** можно переписать так:

$$\mathbf{X}^*(\mathbf{p}) = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{nT}) \cdot e^{-\mathbf{pTn}} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{x}(\mathbf{nT}) \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = \mathbf{X}(\mathbf{z}) \qquad \textbf{(6)}$$

Таким образом, зная дискретное преобразование Лапласа некоторой последовательности, мы получим Z-преобразование этой последовательности, заменив $e^{\mathbf{pT}}$ на **z**, и наоборот, от Z-преобразования перейдем к дискретному преобразованию Лапласа, заменяя **z** на $e^{\mathbf{pT}}$.

В теории Z-преобразования имеют очень важное значение две последовательности:

1. ***Дискретный единичный скачок*** (дискретная функция Хевисайда)

$$\mathbf{1[n]} = \begin{cases} 1, & \mathbf{n = 0, 1, 2, \ldots} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{n = 0, -1, -2, \ldots} \end{cases}$$

Справедливы следующие равенства:

$$\mathbf{1[n - k]} = \begin{cases} \mathbf{1,} & \mathbf{n \geq k} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{n < k} \end{cases} \qquad \mathbf{1[n + k]} = \begin{cases} \mathbf{1,} & \mathbf{n \geq -k} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{n < -k} \end{cases} \qquad \mathbf{(k > 0)}$$

2. ***Единичная дискрета***:

$$\delta\mathbf{[n]} = \begin{cases} \mathbf{1,} & \mathbf{n = 0} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{n \neq 0} \end{cases}$$

$$\delta\mathbf{[n - k]} = \begin{cases} \mathbf{1,} & \mathbf{n = k} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{n \neq k} \end{cases} \qquad \delta\mathbf{[n + k]} = \begin{cases} \mathbf{1,} & \mathbf{n = -k} \\ \mathbf{0,} & \mathbf{n \neq -k} \end{cases}$$

Z-преобразование от единичной дискреты:

$$\mathbf{Z}\{\delta\mathbf{[n]}\} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \delta\mathbf{[n]} \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = 1 + 0 \cdot \mathbf{z}^{-1} + 0 \cdot \mathbf{z}^{-2} + \ldots = 1$$

$$\mathbf{Z}\{\delta\mathbf{[n - k]}\} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \delta\mathbf{[n - k]} \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = 0 + 0 \cdot \mathbf{z}^{-1} + \ldots + 0 \cdot \mathbf{z}^{-(\mathbf{k}-1)} + 1 \cdot \mathbf{z}^{-\mathbf{k}} + 0 \cdot \mathbf{z}^{-(\mathbf{k}+1)} = \mathbf{z}^{-\mathbf{k}}$$

Z-преобразование от дискретного единичного скачка:

$$\mathbf{Z}\{1[\mathbf{n}]\} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{z}-1}$$

$$\mathbf{Z}\{1[\mathbf{n}-\mathbf{k}]\} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} 1[\mathbf{n}-\mathbf{k}]\cdot\mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{k}}^{\infty} \mathbf{z}^{-\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{z}^{-\mathbf{k}}}{\mathbf{1}-\mathbf{z}^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{z}^{\mathbf{k}-1}\cdot(\mathbf{z}-1)}$$

Мы использовали формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Знаменатель прогрессии $\mathbf{z}^{-1}$. Первый член, соответственно, равен **1** или $\mathbf{z}^{-\mathbf{k}}$. Предполагается, что $|\mathbf{z}| > \mathbf{1}$.

Модифицированное Z-преобразование.

Основная идея метода модифицированного Z-преобразования состоит в следующем. Пусть **x(t)** – функция непрерывного переменного **t**. Перейдем от одного переменного **t** к двум с помощью соотношения:

$$\mathbf{t} = \mathbf{nT} + \varepsilon\mathbf{T} \qquad (1)$$

Где **T** – период квантования,
n – целочисленная переменная,
ε – непрерывная переменная, изменяющаяся от 0 до 1.
Ясно, что для любого значения **t** при фиксированном **T** можно однозначно определить значения **n** и **ε,** при которых будет справедливо равенство **(1).** Таким образом, мы перешли от функции одного переменного **x(t)** к функции двух переменных **x[n, ε]**. Функцию **x[n, ε]** можно рассматривать как последовательность с параметром **ε** и применить к ней Z-преобразование. При этом Z-изображение будет функцией двух аргументов: комплексной переменной **z** и действительной переменной **ε.**

<u>Определение.</u> Модифицированным Z-преобразованием последовательности **x[n, ε]** или функции **x(t)** называется Z-изображение:

$$\mathbf{Z}_\varepsilon\{\mathbf{x(t)}\} \equiv \mathbf{X(z,}\varepsilon\mathbf{)} = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{x[n,}\varepsilon\mathbf{]}\cdot\mathbf{z}^{-\mathbf{n}} \qquad \textbf{(2)}$$

или

$$\mathbf{X(z,}\varepsilon\mathbf{)} = \mathbf{L}\left\{\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{x(nT}+\varepsilon\mathbf{T)}\cdot\delta\mathbf{(t-nT)}\right\} \qquad \textbf{(3)}$$

<u>Теорема об изображении функции, умноженной на экспоненту.</u>

Пусть $\mathbf{Z}_\varepsilon\{\mathbf{x(t)}\} \Leftrightarrow \mathbf{X(z,}\varepsilon\mathbf{)}$

Тогда $\mathbf{Z}_\varepsilon\{e^{\alpha \mathbf{t}}\cdot\mathbf{x(t)}\} \Leftrightarrow \mathbf{d}^{\varepsilon}\cdot\mathbf{X(z\cdot d^{-1},}\varepsilon\mathbf{)}, \qquad \mathbf{d} = e^{\alpha\mathbf{t}}$

(4)

<u>Теорема об изображении оригинала, умноженного на t.</u>

Пусть $\mathbf{Z}_\varepsilon\{\mathbf{x(t)}\} \Leftrightarrow \mathbf{X(z,}\varepsilon\mathbf{)}$

Тогда $\mathbf{Z}_\varepsilon\{\mathbf{t}\cdot\mathbf{x(t)}\} \Leftrightarrow -\mathbf{Tz}\dfrac{\mathbf{dX(z,}\varepsilon\mathbf{)}}{\mathbf{dz}} + \varepsilon\mathbf{TX(z,}\varepsilon\mathbf{)}$

(5)

Теорема запаздывания.

Пусть $\mathbf{Z}_{\varepsilon}[\mathbf{F(p)}] \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{z}, \varepsilon)$

Требуется вычислить $\mathbf{Z}_{\varepsilon}[\mathbf{F(p)} \cdot e^{-\tau \mathbf{p}}]$

Выделим целую и дробную часть периодов квантования в величине запаздывания:

$$\tau = \mathbf{rT} + \gamma \mathbf{T} \qquad (6)$$

Где **r** – целое положительное число или **r = 0**

0 < γ < 1

Теорема запаздывания утверждает, что:

$$\mathbf{Z}_{\varepsilon}[\mathbf{F(p)} \cdot e^{-\tau \mathbf{p}}] = \begin{cases} \mathbf{z}^{-(\mathbf{r}+1)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}, 1 + \varepsilon - \gamma) & \text{если} \quad \mathbf{0} \le \varepsilon < \gamma \\ \mathbf{z}^{-\mathbf{r}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}, \varepsilon - \gamma) & \text{если} \quad \gamma \le \varepsilon \le 1 \end{cases} \qquad (7)$$

При ε = **0** мы получим формулу обычного Z-преобразования

$$\mathbf{Z}[\mathbf{F(p)} \cdot e^{-\tau \mathbf{p}}] = \mathbf{z}^{-(\mathbf{r}+1)} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{z}, 1 - \gamma) \qquad (8)$$

Разностные (рекуррентные) уравнения.

Линейным разностным (рекуррентным) уравнением порядка r называют следующее соотношение:

$$\mathbf{c_r \cdot y[n+r] + c_{r-1} \cdot y[n+r-1] + \dots + c_1 \cdot y[n+1] + c_0 \cdot y[n] = f[n]} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$n = 0, 1, 2\dots$$

Обычно $\mathbf{c_r}$ полагают равным единице.

Решение этого уравнения состоит в определении последовательности **y[n]**. Для этой цели должны быть заданы начальные значения **y[n]**:

y[0], y[1],…, y[r-1] и выражение для функции **f[n]**.

Тогда мы можем вычислить по соотношению **(1)** последовательность **y[n]** для всех **n**.

Если **f[n]** равно нулю, то разностное уравнение **(1)** называется однородным. Его решение определяется аналогично тому, как это делается для однородных линейных дифференциальных уравнений. Ищем решение в форме:

$$\mathbf{y[n] = d^n}$$

где **d –** неизвестное заранее ненулевое число.
Подставляем данное выражение для **y[n]** в **(1)** и получаем:

$$\mathbf{d^{n+r} + c_{r-1} \cdot d^{n+(r-1)} + \cdots + c_1 \cdot d^{n+1} + c_0 \cdot d^n = 0} \qquad \mathbf{(2)}$$

Сокращаем на показательную функцию и получаем алгебраическое уравнение степени **r:**

$$\mathbf{d^{r} + c_{r-1} \cdot d^{r-1} + \cdots + c_1 \cdot d + c_0 = 0} \qquad \mathbf{(3)}$$

Это уравнение называется ***характеристическим уравнением*** для данного разностного уравнения.

Вычислим корни характеристического уравнения:

$$d_1, d_2, \ldots, d_r$$

Для простоты предположим, что среди корней нет кратных.

Последовательность $\tilde{y}[n] = c_1 \cdot d_1^n + \cdots + c_r \cdot d_r^n$

является общим решением разностного уравнения. Постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_r$ вычисляются по заданным начальным условиям.

Устойчивость решения разностного уравнения.

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями разностное уравнение называется:

- *асимптотически устойчивым*, если при $n \to \infty$ $\acute{y}[n] \to 0$
- *неустойчивым*, если при $n \to \infty$ $\acute{y}[n] \to \pm\infty$

  или не имеет предела, но совершает колебания, амплитуда которых неограниченно возрастает;
- *устойчивым, но не асимптотически (нейтральным)*, если при $n \to \infty$

  $\acute{y}[n]$ стремится к конечному ненулевому пределу или не имеет предела, но совершает колебания с ограниченной амплитудой.

Какой из указанных трёх случаев имеет место, зависит от корней характеристического уравнения.

a) Если все корни характеристического уравнения по модулю меньше единицы, то, очевидно, что:

$$|d_m|^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad , \quad m=1,2...r\,.$$

b) Если модуль одного из корней характеристического уравнения больше единицы, то функция

$$\acute{y}[n] \quad \text{неограниченно возрастает.}$$

c) Если характеристическое уравнение имеет пару корней, расположенных на единичном круге:

$$\begin{cases} d_g = \cos\boldsymbol{\varphi} + i \cdot \sin\boldsymbol{\varphi} \\ d_g^* = \cos\boldsymbol{\varphi} - i \cdot \sin\boldsymbol{\varphi} \end{cases}$$

а все остальные корни расположены внутри круга, то уравнение будет нейтральным.

Аналогично, уравнение будет нейтральным, если кроме корней единичного круга, оно имеет некратный корень на круге

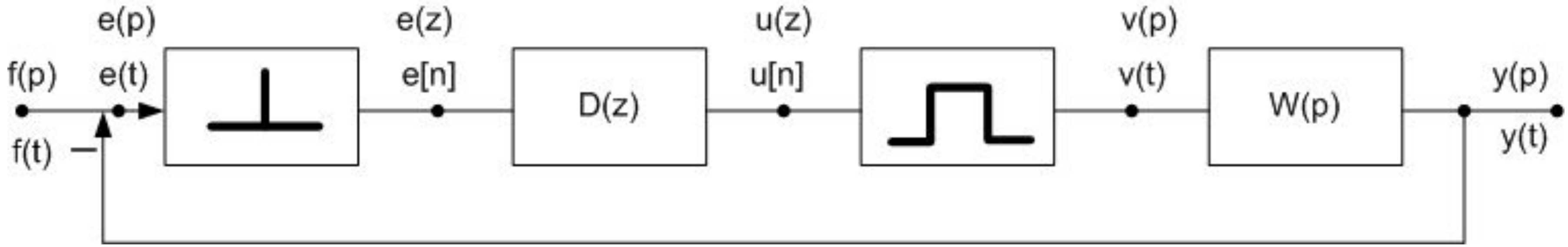
$$d_g = \pm 1$$

Таким образом, для устойчивости решения разностного уравнения все корни его характеристического многочлена должны лежать внутри единичного круга, то есть:

$$\boxed{|q_i| \leq 1}$$

Теперь мы располагаем всем необходимым аппаратом для расчета импульсных систем.

Запишем систему уравнений, следуя движению сигнала по схеме



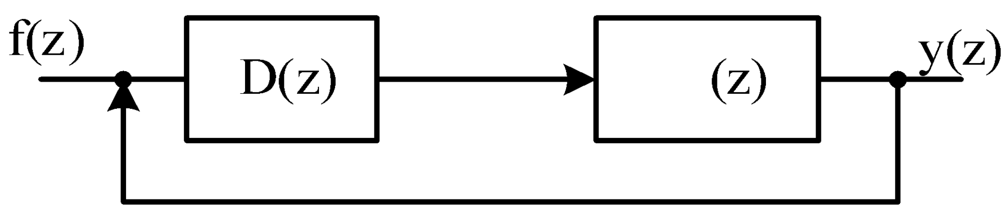
$$\begin{cases} \mathbf{f(p) - y(p) = e(p)} \\ \mathbf{E(z) \cdot D(z) = U(z)} \\ \mathbf{U(z) \cdot W_{П}(p) \cdot W(p) = y(p)} \end{cases} \qquad \textbf{(1)}$$

В эту схему входят различные преобразования, поэтому целесообразно воспользоваться Z_L преобразованием, которое позволяет перейти от функции, заданной преобразованием Лапласа, к Z-преобразованию числовой последовательности (полученной из этой функции квантованием по времени). Применяя Z_L-преобразование к системе уравнений **(1)**, получаем систему:

$$\begin{cases} F(z) - Y(z) = E(z) \\ E(z) \cdot D(z) = U(z) \\ U(z) \cdot \widetilde{W}(z) = Y(z) \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

где $$\widetilde{W}(z) = Z_L\left\{\frac{1}{p} \cdot W(p)\right\} \cdot \frac{z-1}{z}$$

На основании системы **(2)** можно изобразить ***расчетную Z-структурную схему*** замкнутой системы (или расчетную Z-схему):

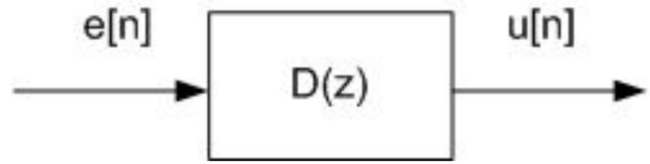


Передаточная функция замкнутой системы:

$$H(z) = \frac{\widetilde{W}(z) \cdot D(z)}{1 + \widetilde{W}(z) \cdot D(z)} \qquad \textbf{(3)}$$

Z- передаточная функция и весовая последовательность цифрового блока.

Цифровой блок



Предположим, что числовые последовательности на входе и выходе блока связаны рекуррентным уравнением:

$$\mathbf{a_0 \cdot u[n] + a_1 \cdot u[n-1] + \ldots + a_N \cdot u[n-N] = b_0 \cdot e[n] + b_1 \cdot e[n-1] + \ldots + b_M \cdot e[n-M]},$$

$$\mathbf{a_0} \neq 0, \qquad \mathbf{n = 0, 1, 2, \ldots}$$

$$\mathbf{u[m] = 0} \quad \text{и} \quad \mathbf{e[m] = 0} \quad \text{при} \quad \mathbf{m < 0, \quad N \geq M}$$

Применяем Z-преобразование и получаем:

$$\mathbf{\left(a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \ldots + a_N \cdot z^{-N}\right) \cdot U(z) = \left(b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \ldots + b_M \cdot z^{-M}\right) \cdot E(z)}$$

Передаточная функция блока равна отношению Z-преобразований сигналов:

$$\mathbf{\frac{U(z)}{E(z)} = D(z) = \frac{b_0 + b_1 \cdot z^{-1} + \ldots + b_M \cdot z^{-M}}{a_0 + a_1 \cdot z^{-1} + \ldots + a_N \cdot z^{-N}} = \frac{b_0 \cdot z^{N} + \ldots + b_M \cdot z^{N-M}}{a_0 \cdot z^{N} + \ldots + a_N}},$$

$$\mathbf{U(z) = D(z) \cdot E(z)}$$

Согласно теореме о свертке выходная и входная последовательность связаны соотношением:

$$\mathbf{u[n]} = \sum_{\mathbf{m=0}}^{\mathbf{n}} \chi\mathbf{[n-m] \cdot e[m]}$$

Где последовательность $\boldsymbol{\chi}\mathbf{[n]}$, которую называют ***весовой последовательностью блока***, вычисляется посредством обратного Z-преобразования от передаточной функции:

$$\chi\mathbf{[n]} = \mathbf{Z^{-1}[D(z)]}$$

Весовая последовательность является сигналом на выходе блока, если на его вход подана единичная дискрета:

$$\mathbf{e[n]} = \delta\mathbf{[n],} \qquad \left(\mathbf{Z}\left\{\delta\mathbf{[n]}\right\} = 1\right)$$

Передаточные функции цифрового регулятора, соответствующие типовым законам регулирования.

В аналоговых регуляторах используются следующие типовые законы регулирования:

пропорциональный (П) $u(t) = K_1 \cdot e(t)$

интегральный (И) $u(t) = K_2 \cdot \int_0^t e(\tau)d\tau$

дифференциальный (Д) $u(nT) = K_3 \cdot \frac{d}{dt} e(t)$

Для обозначения цифровых законов регулирования принято использовать те же буквы:

пропорциональный (П) $u(nT) = K_1 \cdot e(nT)$

суммирующий (И) $u(nT) = K_2 \cdot \sum_{m=0}^{n} e(mT)$

разностный (Д) $u(nT) = K_3 \cdot \left(e(nT) - e(nT - T)\right)$

Z-передаточная функция цифрового ПИД-регулятора имеет вид:

$$\mathbf{D(z)} = \mathbf{K_1} + \mathbf{K_2}\frac{1}{1-\mathbf{z}^{-1}} + \mathbf{K_3}\left(1-\mathbf{z}^{-1}\right), \qquad \text{где} \qquad \mathbf{z} = \mathbf{e}^{pT}$$

Устойчивость импульсных систем.

Устойчивость ИС целиком определяется расположением корней знаменателя Z-передаточной функции замкнутой системы.

Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы все корни знаменателя передаточной функции этой системы находились внутри единичного круга с центром в начале координат на плоскости Z. Иными словами, все корни знаменателя передаточной функции должны иметь модуль меньше единицы. Если хотя бы один корень знаменателя передаточной функции имеет модуль больше единицы (находится вне единичного круга), то система неустойчива.

Методы исследования динамики ИС.

1. Корневой годограф.

Метод корневого годографа одинаков для непрерывных систем и для ИС. В обоих случаях речь идет о миграции корней характеристического многочлена при изменении одного параметра. Особенность только в том, что неустойчивость непрерывных систем возникает, когда корни характеристического уравнения выходят на правую полуплоскость, а ***неустойчивость ИС возникает, когда корни характеристического многочлена выходят за пределы единичной окружности***.

2. Аналог критерия Найквиста.

Частотная передаточная функция ИС имеет вид:

$$W_R(e^{j\omega T}) = \tilde{W}(e^{j\omega T})D(e^{j\omega T}) \qquad \textbf{(1)}$$

Кривая Найквиста строится по выражению **(1)** при изменении

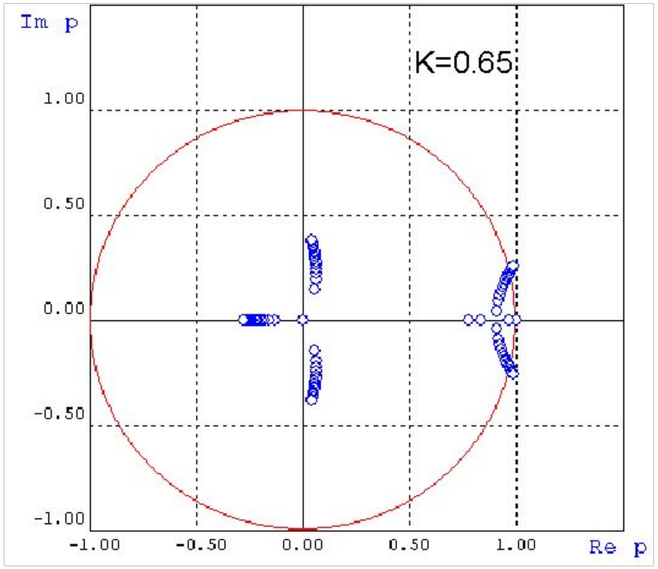
$$0 \le \omega \le \frac{\pi}{T} \qquad \textbf{(2)}$$

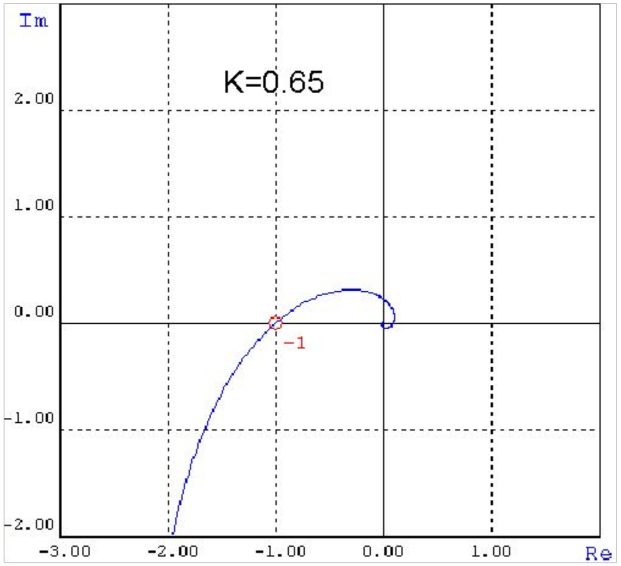
В случае, когда Z-передаточная функция разомкнутой системы имеет полюса на окружности единичного радиуса, *то они обходятся по полуокружностям бесконечно малого радиуса, расположенным вне единичного круга*.

1 **Критерий Найквиста для импульсных систем.**
Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении переменной **z** против часовой стрелки по единичной окружности или модифицированной единичной окружности суммарное число оборотов (равное $\mathbf{r}_\psi$) вектора **Ω**, начало которого находится в точке **(-1, j0)** , а конец – в точке $\mathbf{W}_\Delta(\mathbf{z})$, было равно числу неустойчивых корней разомкнутой импульсной системы $\mathbf{r}_0$.

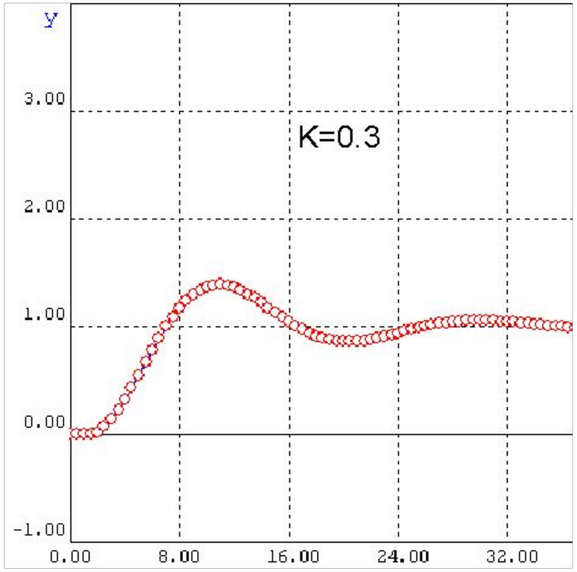
2 Для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы индекс пересечений кривой Найквиста разомкнутой системы, при необходимости дополненной дугами окружностей бесконечного радиуса, был равен половине числа полюсов разомкнутой системы вне единичного круга. $\mathbf{0{,}5r}_0$

3 Пусть знаменатель разомкнутой системы не имеет корней вне единичного круга. Замкнутая импульсная система будет устойчива, если кривая Найквиста разомкнутой системы, при необходимости дополненная дугами окружностей бесконечного радиуса, не охватывает точку **(-1, j0)** .





$$\tilde{W}(z)=\frac{0.058z+0.053}{z^2-1.779z+0.779}$$



при $K=0.3$

$$H(z)=\frac{0.0173z+0.0159}{z^5+1.779z^4+0.779z^2-0.0173z+0.0159}$$