

*Ум человеческий имеет
три ключа, все
открывающих: знание,
мысль, воображение – всё
в этом.*

В. Гюго



Показательные неравенства

Показательные неравенства

Определение

Простейшие
неравенства

Решение неравенств

Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых

неизвестное содержится в

показателе степени.

Примеры: $3^x \leq 9$; $2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$a^x > a^b$$

$$a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b$$

$$a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – любое число.

При решении **простейших** неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

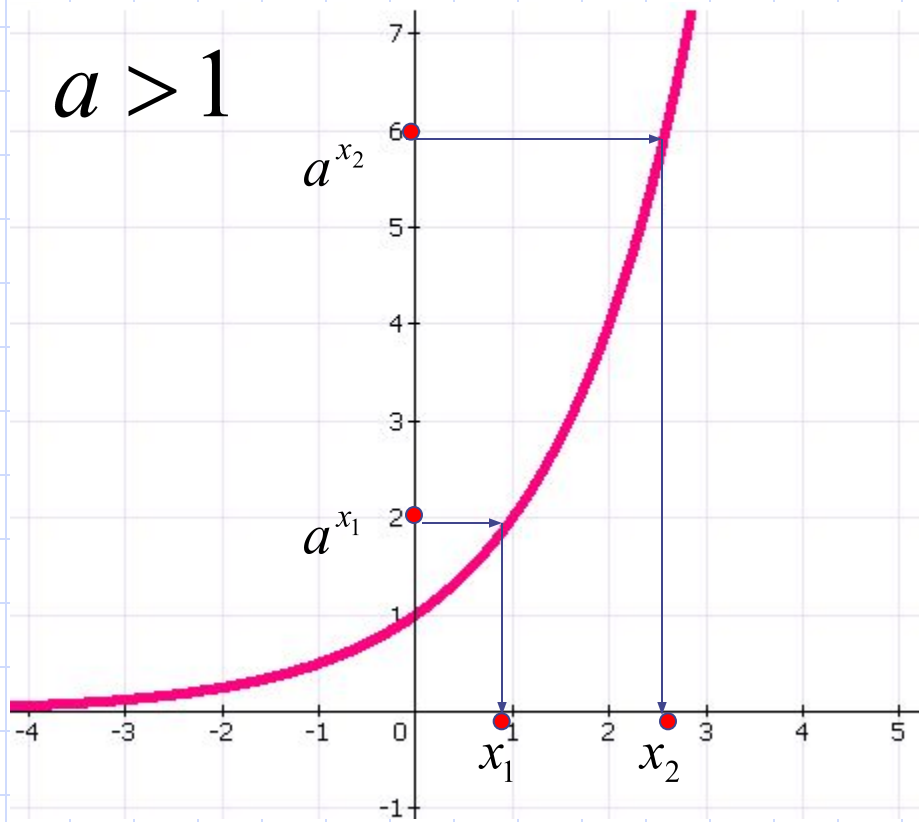
$$\left. \begin{array}{l} a^x > a^b \\ a > 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x > b \quad \left| \quad \left. \begin{array}{l} a^x > a^b \\ 0 < a < 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x < b$$

Для решения более **сложных** показательных неравенств используются те же способы, что и при решении показательных уравнений.

**Решение показательных
неравенств сводится к решению
неравенств**

$$a^x > a^{x_0} \text{ ИЛИ } a^x < a^{x_0}$$

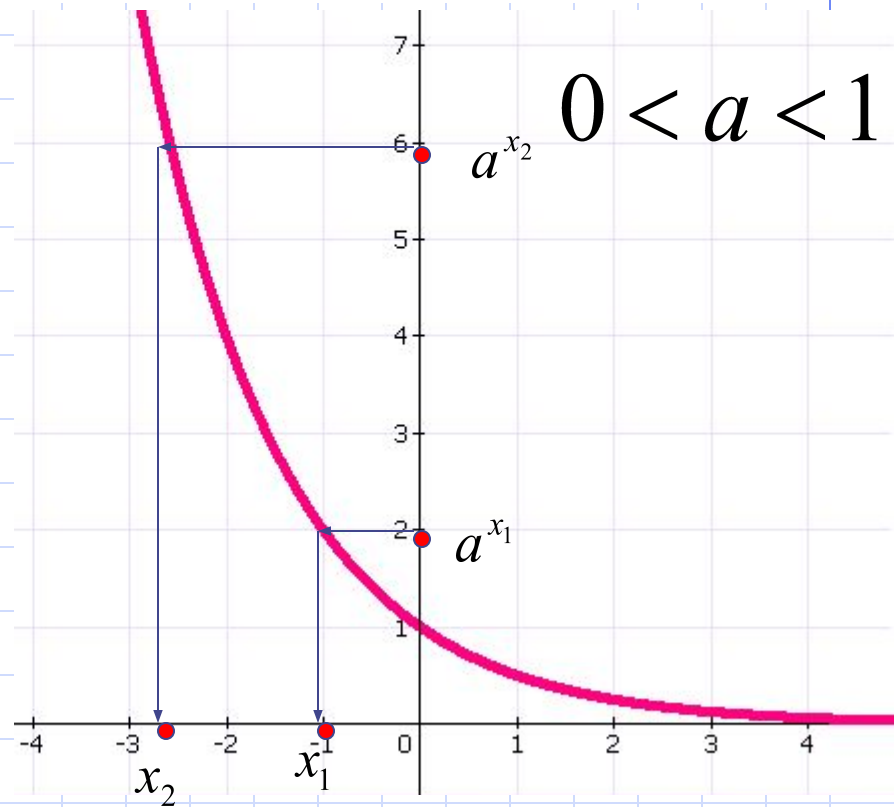
$$a > 1$$



$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$x_1 < x_2$$

$$0 < a < 1$$



$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$x_1 > x_2$$

$$y = a^x$$

решение
неравенств

Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

1) $y = 5^x$ *возрастающая, т.к. $5 > 1$*

2) $y = 0,5^x$ *убывающая, т.к. $0 < 0,5 < 1$*

3) $y = 10^x$ *возрастающая, т.к. $10 > 1$*

4) $y = \pi^x$ *возрастающая, т.к. $\pi > 1$*

[к теме](#)

Какие из функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$5) y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \quad \text{убывающая, т.к. } 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6) y = 49^{-x} \quad \text{убывающая, т.к. } 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

[к теме](#)

Этапы решения показательных неравенств:

1. Приведите неравенство к виду

$$a^x > a^{x_0} \text{ ИЛИ } a^x < a^{x_0}$$

2. Определите, возрастающей или убывающей является показательная функция к
графику

возрастает

$$a^x < a^{x_0}$$

$$a^x > a^{x_0}$$

$$x < x_0$$

$$x > x_0$$

При $0 < a < 1$ функция убывает

$$a^x < a^{x_0}$$

$$a^x > a^{x_0}$$

$$x > x_0$$

$$x < x_0$$

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

т.к. $3 > 1$, то функция $y = 3^x$ возрастающая

$$\underline{x > 4}$$

$$x \in (4; +\infty)$$

к теме

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ убывающая

$$\underline{x \leq \frac{3}{2}}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решите неравенство:

$$2^{3x} \geq \frac{1}{2};$$

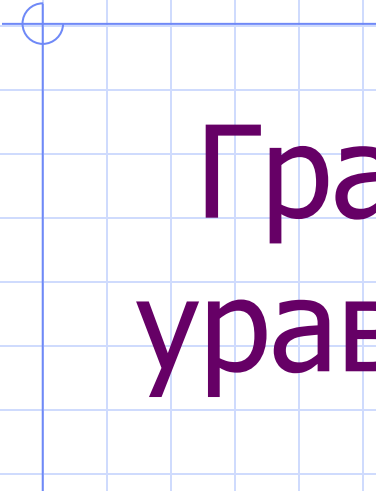
$$2^{3x} \geq 2^{-1};$$

т.к. основание $2 > 1$, то функция возрастающая

$$3x \geq -1;$$

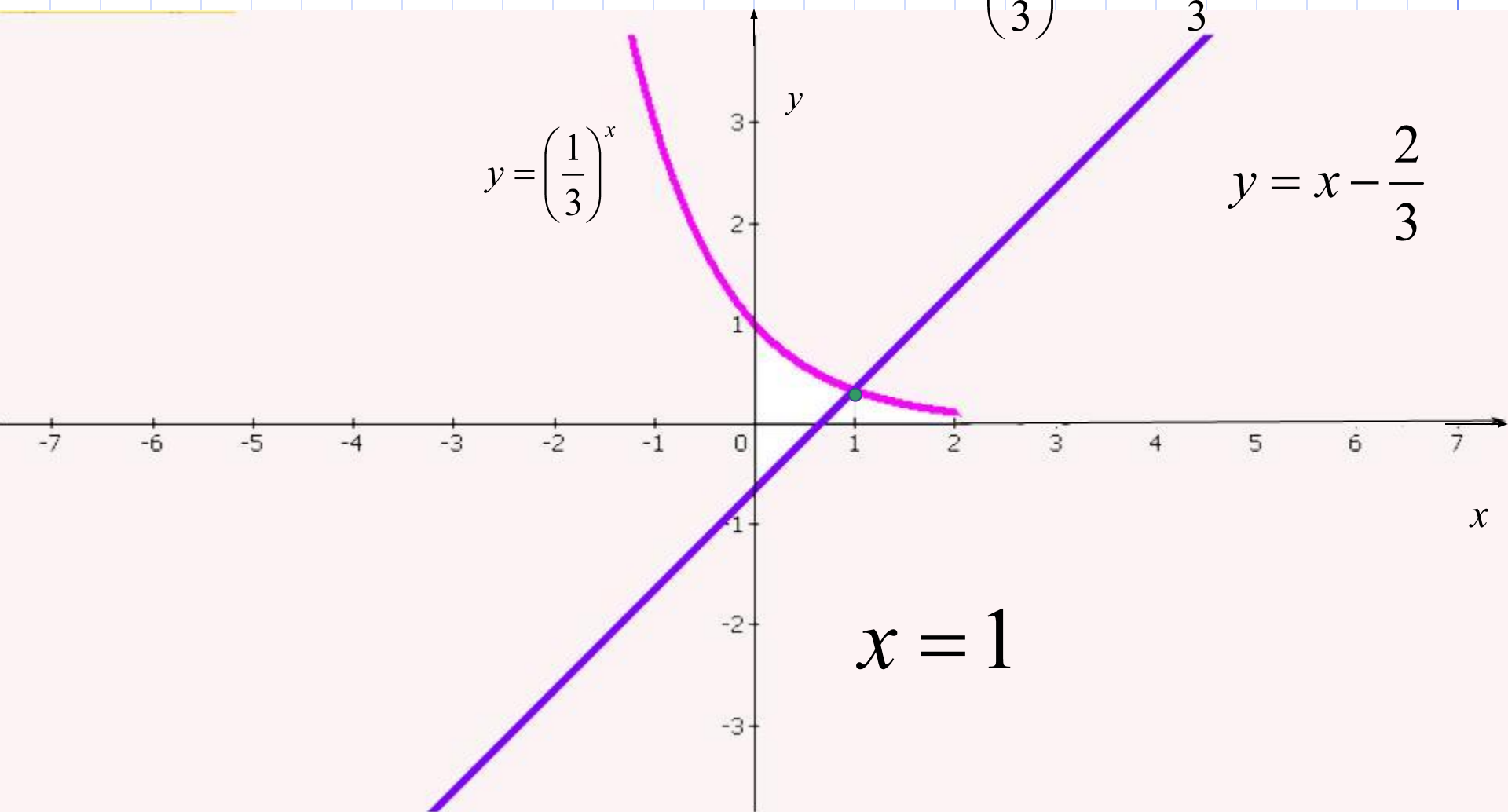
$$\underline{x \geq -\frac{1}{3};}$$

$$x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty \right)$$



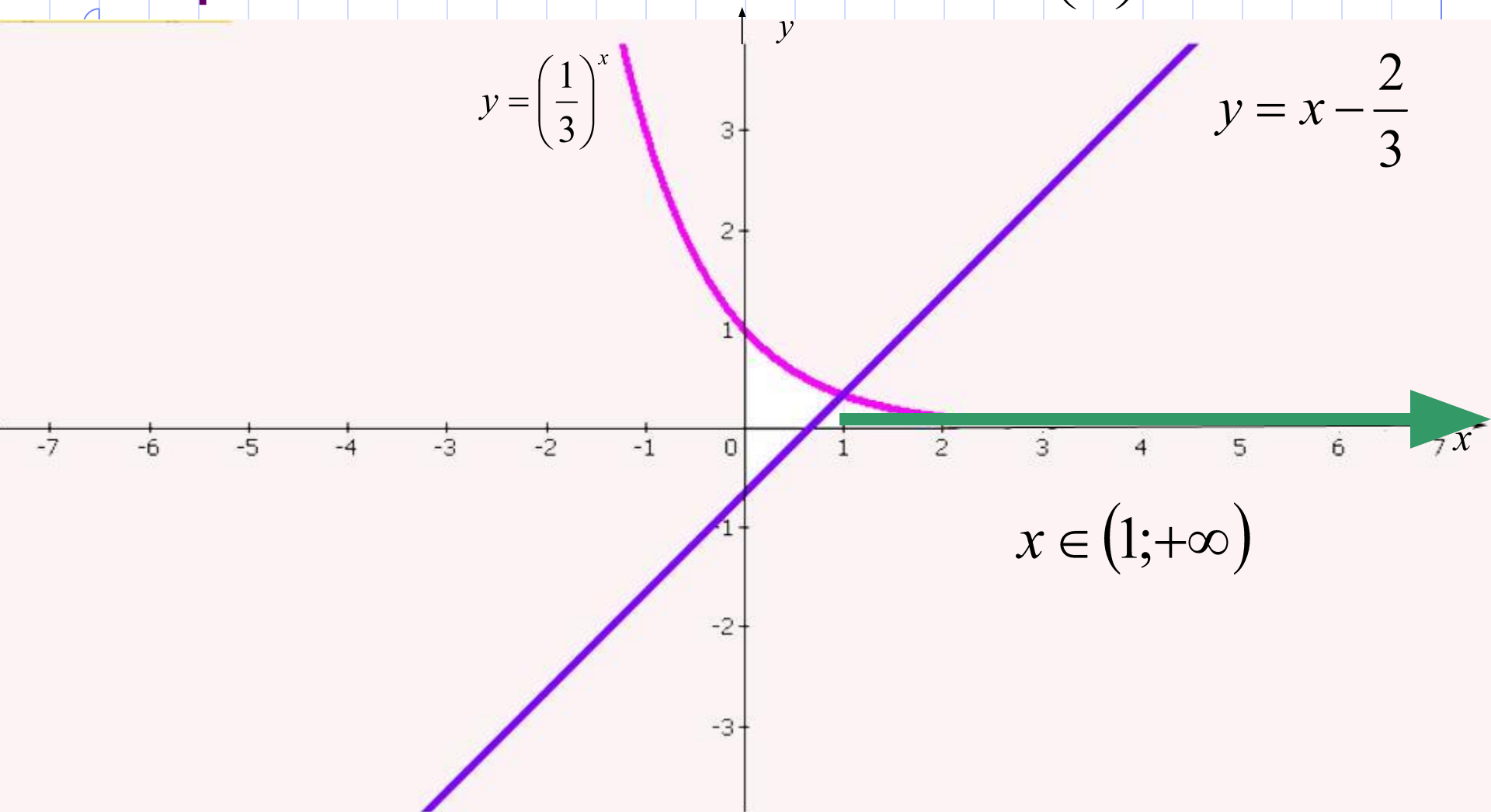
Графическое решение уравнений и неравенств

Решите графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$



Графическое решение неравенства

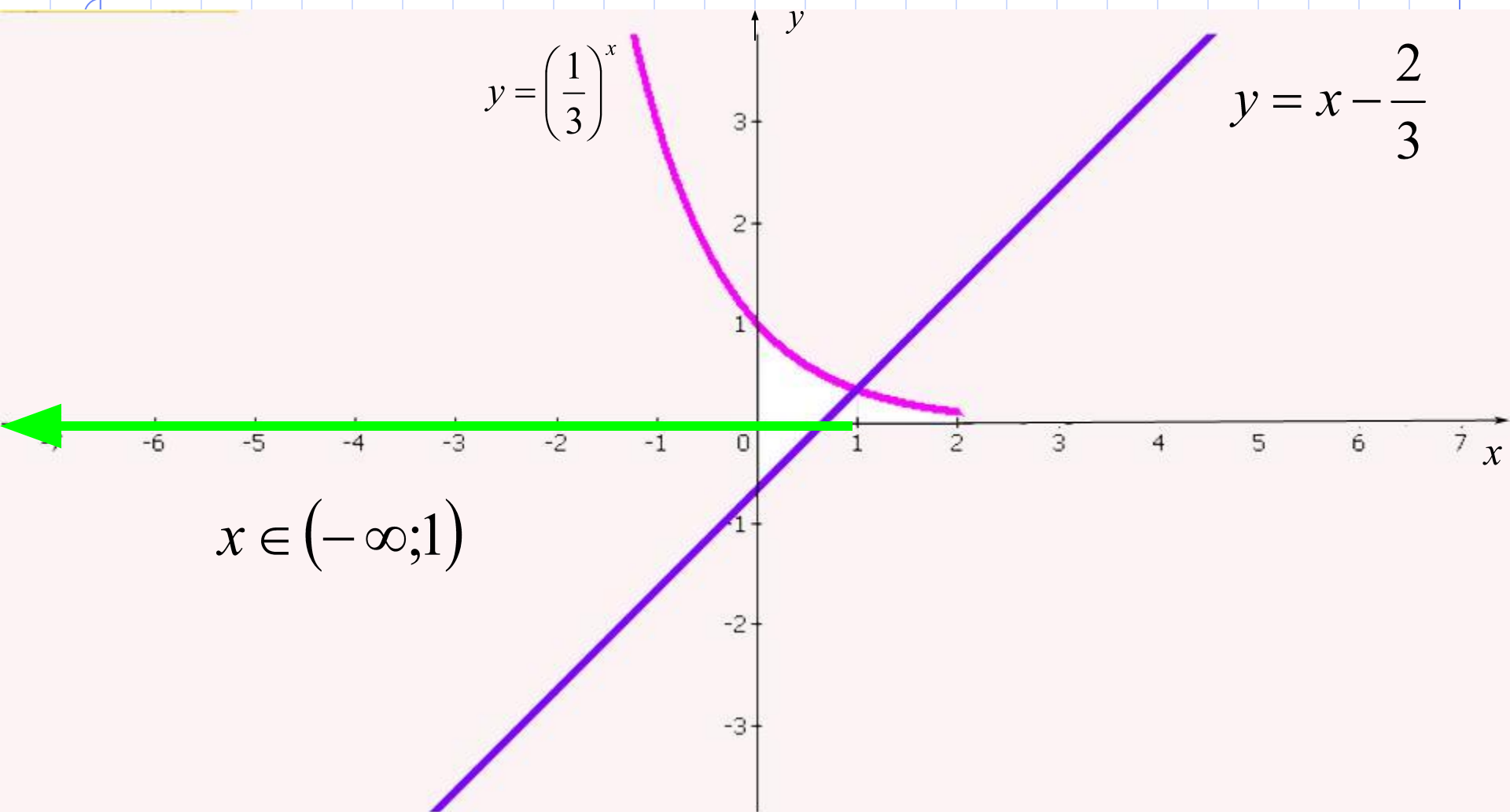
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < x - \frac{2}{3}$$



$$x \in (1; +\infty)$$

Графическое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > x - \frac{2}{3}$$



Тест по теме:

- Показательные неравенства

1. С помощью графика решите неравенство:

$$3^x > 2 - x$$

2. Подчеркните неравенства, которые не имеют решений:

А) $2^x < 0$, Б) $3^x > -4$, В) $3^x < -4$, Г) $-5^x > -5$

Показательные неравенства

- Простейшие показательные неравенства
- Двойные неравенства
- Неравенства, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем
- Неравенства, решаемые заменой переменной

[к теме](#)

Простейшие

[к списку задач](#)

показательные неравенства

$$1). \quad 3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$$

Ответ : $x > 2$.

$$2). \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x < 2$$

Ответ : $x < 2$.

Двойные неравенства

[□ списку задач](#)

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$$

$$3^{-1} < 3^{3+x} < 3^2$$

$3 > 1$, то

$$-1 < 3 + x < 2$$

$$-1 - 3 < x < 2 - 3$$

$$-4 < x < -1$$

Ответ: $(-4; -1)$.

Решение

[□ списку задач](#)

показательных неравенств

Метод: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3} + \frac{1}{3} \cdot 3^x > 10$$

$$3^{x-3} \left(1 + \frac{1}{3} \cdot 3^3\right) > 10$$

$$3^{x-3} (1 + 9) > 10$$

$$3^{x-3} \cdot 10 > 10 \quad | : 10$$

$$3^{x-3} > 1$$

$$3^{x-3} > 3^0$$

$$3 > 1, \text{ то } x - 3 > 0$$

$$x > 3.$$

Ответ: $x > 3$

Решение показательных неравенств

Метод: Замена переменной

[□ списку задач](#)

$$3 \cdot 9^x + 11 \cdot 3^x < 4$$

$$3 \cdot 3^{2x} + 11 \cdot 3^x - 4 < 0$$

$$3^x = t \quad (t > 0)$$

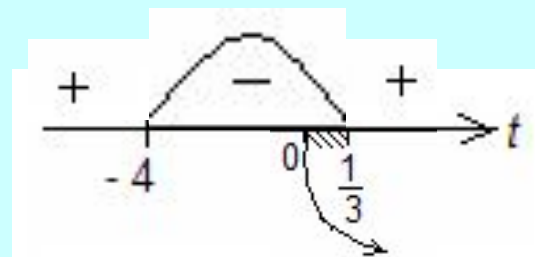
$$3t^2 + 11t - 4 < 0$$

$$D = 11^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 121 + 48 = 169 = 13^2$$

$$t_1 = \frac{-11 + 13}{2 \cdot 3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = \frac{-11 - 13}{6} = \frac{-24}{6} = -4$$

$$3(t + 4) \left(t - \frac{1}{3} \right) < 0$$



$$0 < t < \frac{1}{3}; 0 < 3^x < \frac{1}{3}$$

$$3^x < 3^{-1};$$

$3 > 1$, то $x < -1$.

Ответ: $x < -1$.

- 
- **Графическое решение неравенств**