Ум человеческий имеет три ключа, все открывающих: знание, мысль, воображение – всё в этом.

В. Гюго

Показательные неравенства

Показательные неравенства

[Определение]

[Простейшие неравенства]

[Решение неравенств]

[к теме]

Определение

Показательные неравенства –

это неравенства, в которых неизвестное содержится в показателе степени.

Примеры: $3^x \le 9;\quad 2^x + 5 \cdot 2^{x+1} > 11$

к теме

Простейшие показательные неравенства – это неравенства вида:

$$a^x > a^b \qquad a^x \geq a^b$$

$$a^x < a^b \qquad a^x \leq a^b$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, b – *любое число*.

к теме

При решении **простейших** неравенств используют свойства возрастания или убывания показательной функции.

$$\left.\begin{array}{l} a^x > a^b \\ a > 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x > b \qquad \left.\begin{array}{l} a^x > a^b \\ 0 < a < 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x < b$$

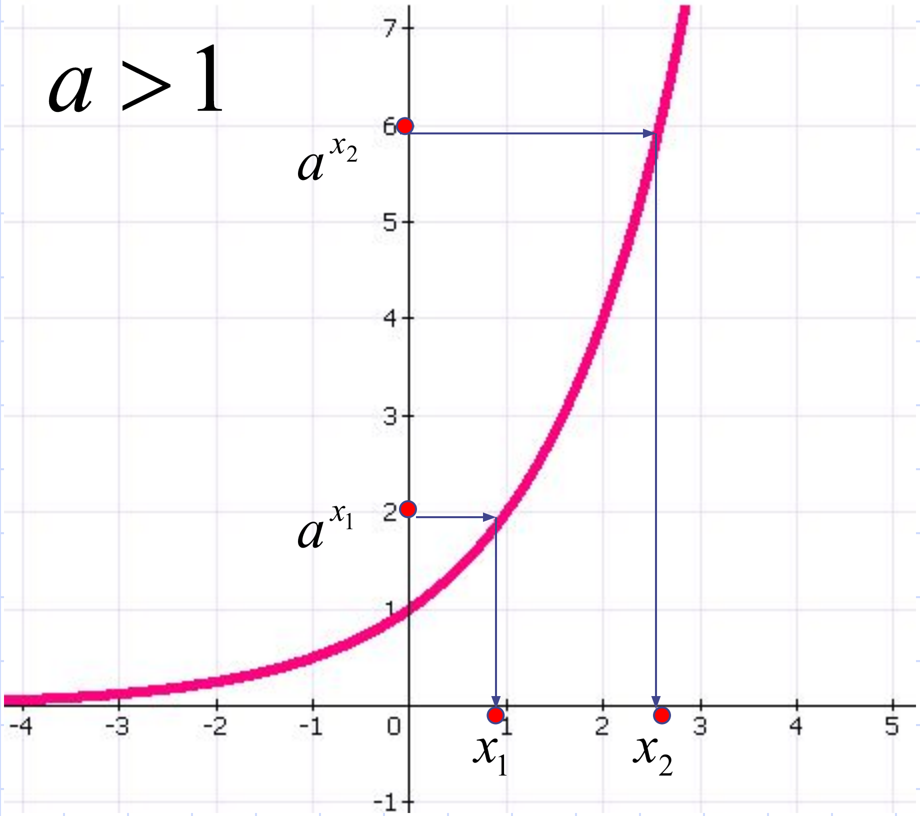
Для решения более **сложных** показательных неравенств используются те же способы, что и при решении показательных уравнений.

к теме

Решение показательных неравенств сводится к решению неравенств

$$a^x > a^{x_0} \text{ или } a^x < a^{x_0}$$

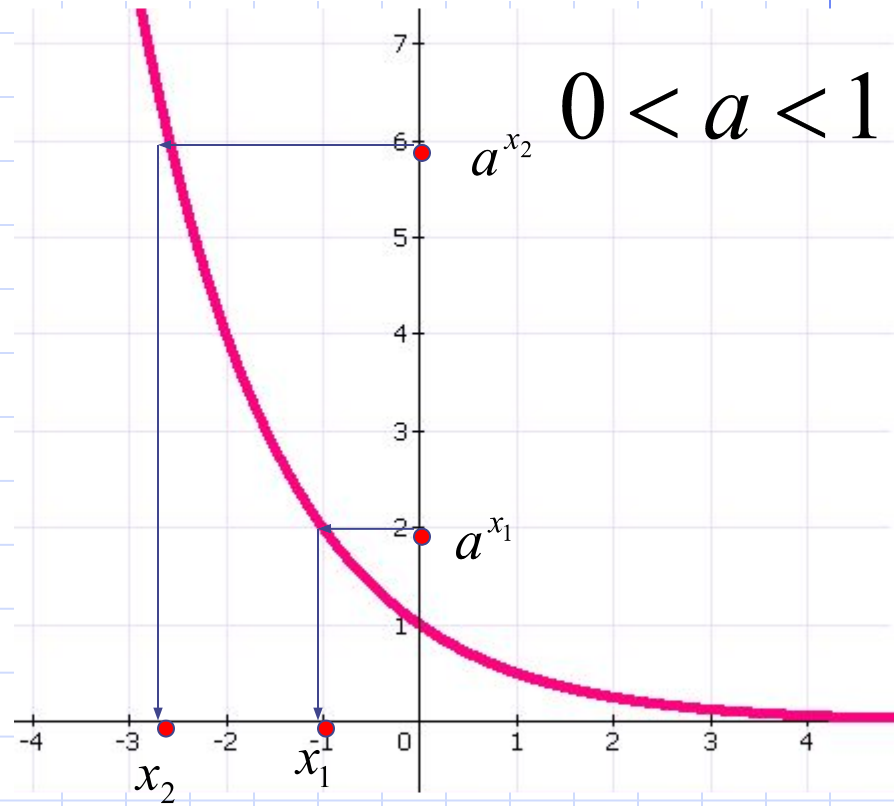
$a > 1$



$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$x_1 < x_2$$

$0 < a < 1$



$$a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$x_1 > x_2$$

$$y = a^x$$

[решение неравенств]

Какие из перечисленных функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$1)\, y = 5^x$ $\quad$ $возрастающая, т.к. 5 > 1$

$2)\, y = 0{,}5^x$ $\quad$ $убывающая, т.к. 0 < 0{,}5 < 1$

$3)\, y = 10^x$ $\quad$ $возрастающая, т.к. 10 > 1$

$4)\, y = \pi^x$ $\quad$ $возрастающая, т.к. \pi > 1$

к теме

Какие из функций являются возрастающими, а какие убывающими?

$$5)\, y = \left(\frac{2}{3}\right)^x \qquad \text{убывающая, т.к.} \; 0 < \frac{2}{3} < 1$$

$$6)\, y = 49^{-x} \qquad \text{убывающая, т.к.} \; 49^{-1} = \frac{1}{49} \text{ и } 0 < \frac{1}{49} < 1$$

к теме

Этапы решения показательных неравенств:

1. Приведите неравенство к виду

$$a^x > a^{x_0} \text{ или } a^x < a^{x_0}$$

2. Определите, возрастающей или убывающей является показательная функция [к графику]

При a>1 функция возрастает

$a^x < a^{x_0}$ $\qquad$ $a^x > a^{x_0}$

$x < x_0$ $\qquad$ $x > x_0$

При 0<a<1 функция убывает

$a^x < a^{x_0}$ $\qquad$ $a^x > a^{x_0}$

$x > x_0$ $\qquad$ $x < x_0$

Решите неравенство:

$$3^x > 81$$

$$3^x > 3^4$$

$$\text{т.к. } 3 > 1, \text{ то функция } y = 3^x \text{ возрастающая}$$

$$x > 4$$

$$x \in (4; +\infty)$$

к теме

Решите неравенство:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \sqrt{\frac{1}{8}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{8}} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$т.к.\ 0 < \frac{1}{2} < 1,\ то\ функция\ y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}\ убывающая$$

$$x \leq \frac{3}{2}$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right]$$

Решите неравенство:

$$2^{3x} \geq \frac{1}{2};$$

$$2^{3x} \geq 2^{-1};$$

$$т.к.\, основание\ 2 > 1, то\ функция\ \ возрастающая$$

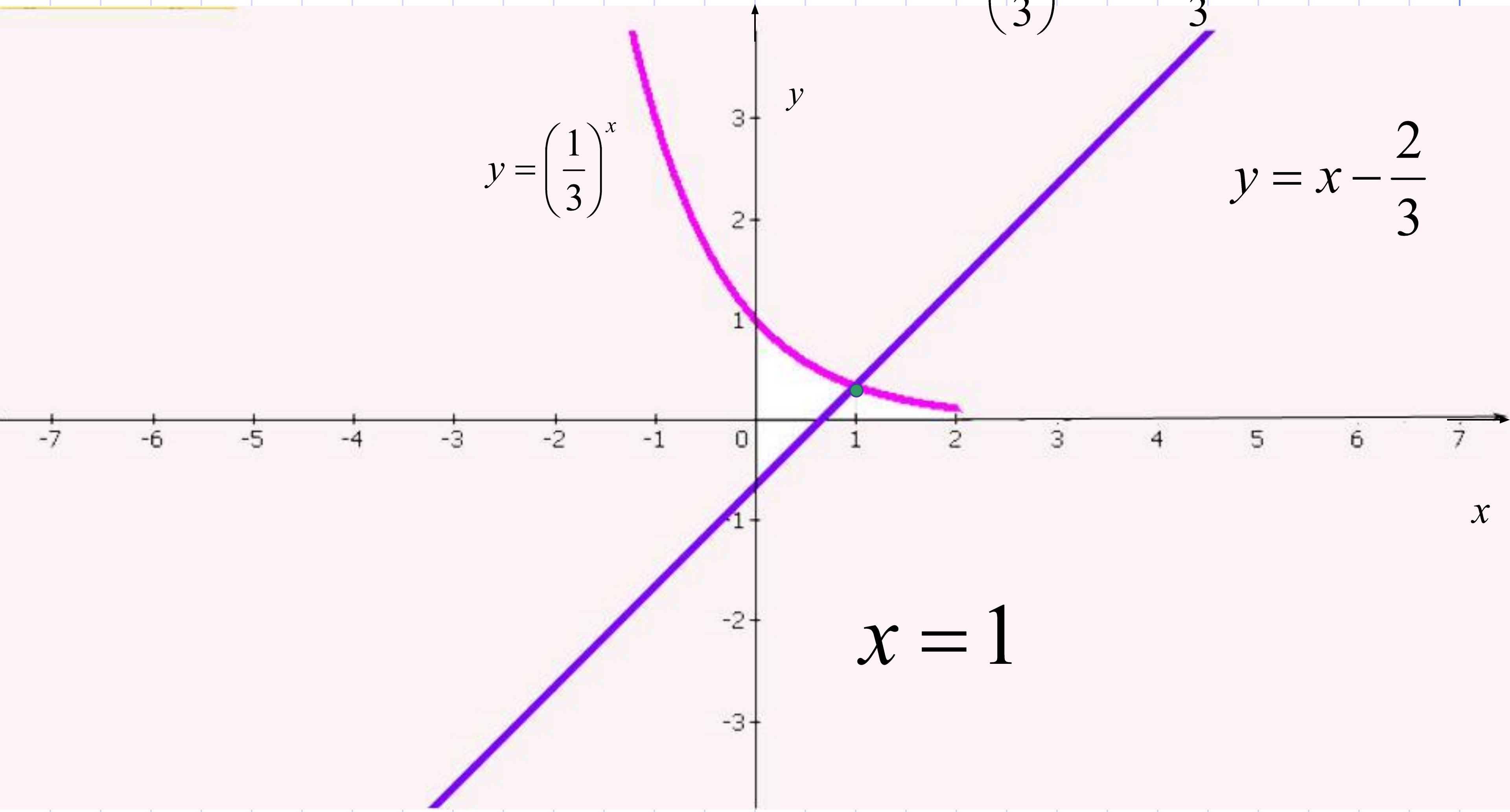
$$3x \geq -1;$$

$$x \geq -\frac{1}{3};$$

$$x \in \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

Графическое решение уравнений и неравенств

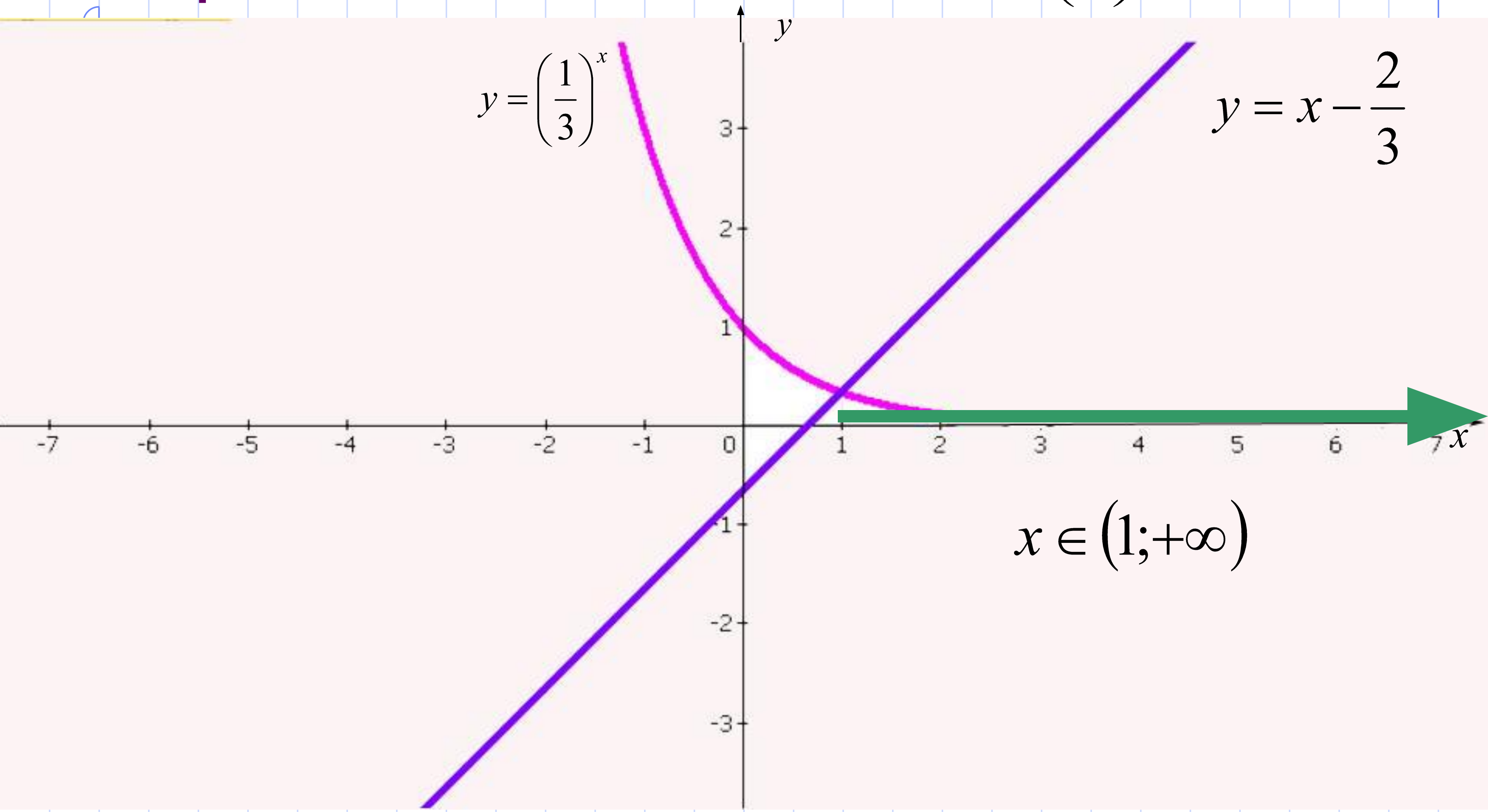
Решите графически уравнение $\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}$



$$x = 1$$

Графическое решение неравенства

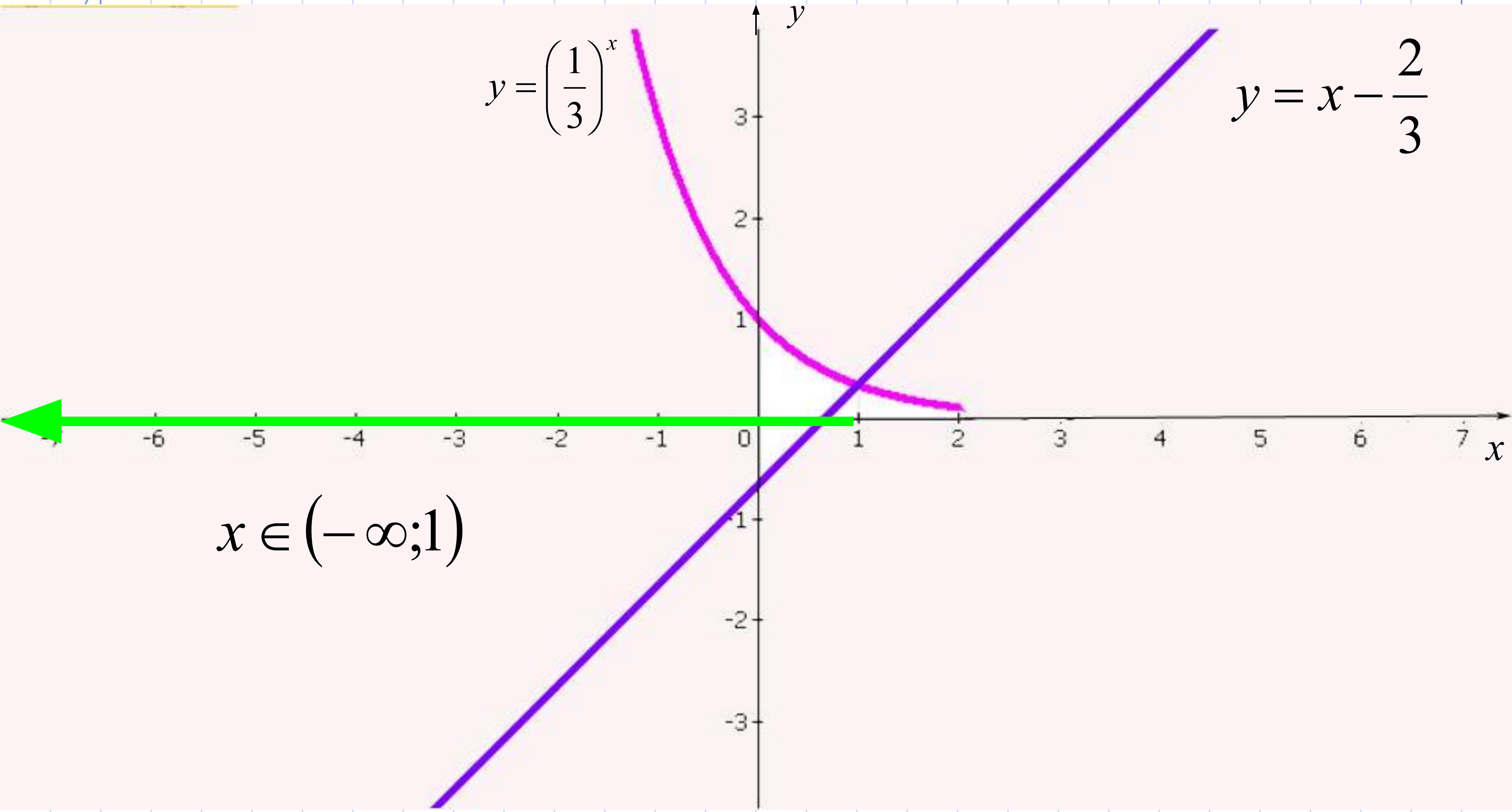
$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < x - \frac{2}{3}$$



$$x \in (1; +\infty)$$

Графическое решение неравенства

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x > x - \frac{2}{3}$$



$$x \in (-\infty; 1)$$

Тест по теме:

- Показательные неравенства

дополнительно

1. С помощью графика решите неравенство:

$3^x > 2 - x$

2. Подчеркните неравенства, которые не имеют решений:

А) $2^x < 0$, Б) $3^x > -4$, В) $3^x < -4$, Г) $-5^x > -5$

Показательные неравенства

- Простейшие показательные неравенства
- Двойные неравенства
- Неравенства, решаемые вынесением за скобки степени с меньшим показателем
- Неравенства, решаемые заменой переменной

к теме

Простейшие показательные неравенства

к списку задач

$$1).\quad 3^x > 9 \Leftrightarrow 3^x > 3^2 \Leftrightarrow x > 2$$

$\text{Ответ}: x > 2.$

$$2).\quad \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x < 2$$

$\text{Ответ}: x < 2.$

Двойные неравенства

□ списку задач

$$\frac{1}{3} < 3^{3+x} < 9$$

$$3^{-1} < 3^{3+x} < 3^{2}$$

3 > 1, то

$$-1 < 3 + x < 2$$

$$-1 - 3 < x < 2 - 3$$

$$-4 < x < -1$$

Ответ: (- 4; -1).

Решение показательных неравенств

□ списку задач

Метод: Вынесение за скобки степени с меньшим показателем

$$3^{x-3}+\frac{1}{3}\cdot 3^{x}>10$$

$$3^{x-3}\left(1+\frac{1}{3}\cdot 3^{3}\right)>10$$

$$3^{x-3}(1+9)>10$$

$$3^{x-3}\cdot 10>10 \quad |:10$$

$$3^{x-3}>1$$

$$3^{x-3}>3^{0}$$

3 > 1, то $x-3>0$

$$x>3.$$

Ответ: $x>3$

Решение показательных неравенств

Метод: Замена переменной

□ списку задач

$$3\cdot 9^{x}+11\cdot 3^{x}<4$$

$$3\cdot 3^{2x}+11\cdot 3^{x}-4<0$$

$$3^{x}=t\quad (t>0)$$

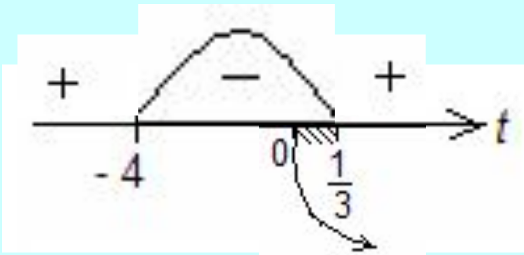
$$3t^{2}+11t-4<0$$

$$D=11^{2}-4\cdot 3\cdot(-4)=121+48=169=13^{2}$$

$$t_1=\frac{-11+13}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$t_2=\frac{-11-13}{6}=\frac{-24}{6}=-4$$

$$3\,(t+4)\left(t-\frac{1}{3}\right)<0$$



$$0<t<\frac{1}{3};\,0<3^{x}<\frac{1}{3}$$

$$3^{x}<3^{-1};$$

3>1, то $x<-1.$

Ответ: $x<-1.$

- Графическое решение неравенств