ЛЕКЦИЯ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная, неопределенный интеграл.

Методы интегрирования.

Определенный интеграл по отрезку. Формула Ньютона –Лейбница.

Несобственные интегралы.

Приближенное вычисление интегралов

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции найти* ее *производную*. Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию, зная ее производную*. Искомую функцию называют первообразной.
- Функция *F(x)* называется *первообразной* функции *f(x)* на интервале (a,b), если для любого $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$
- Теорема. Если функция F(x) является первообразной функции f(x) на (a,b), то множество всех первообразных для f(x) задается формулой, F(x)+C, где C = const

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Множество всех первообразных функций F(x)+C для f(x) называется **неопределенным интегралом** от функции f(x)

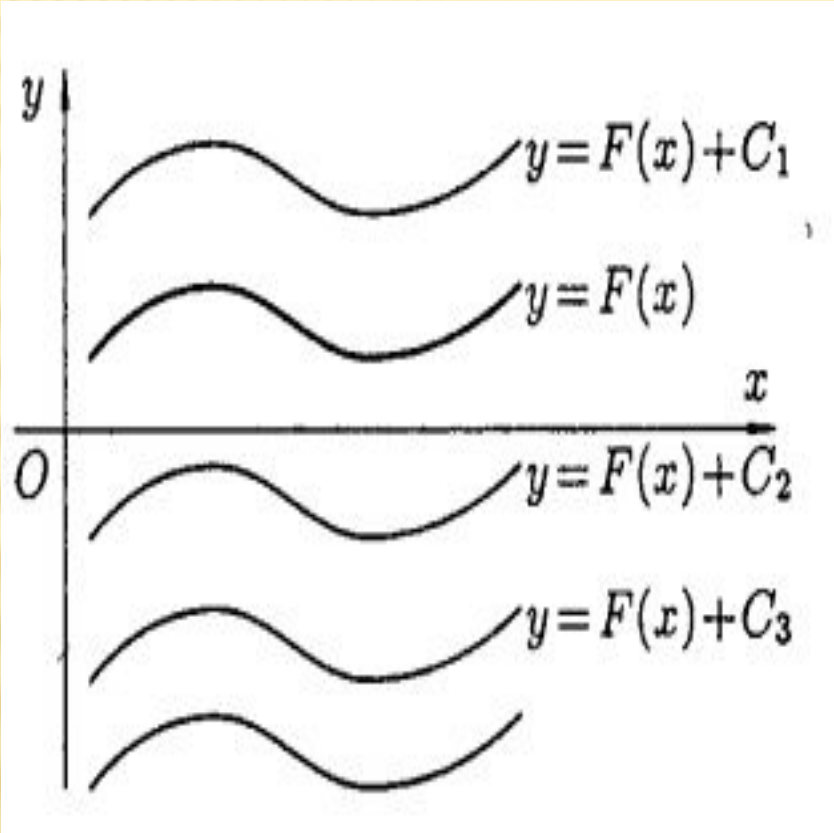
$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

f(x) называется подынтегральной функцией,

x — переменной интегрирования

- Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство изоклин («параллельных» кривых)

$$y = F(x) + C$$

(каждому числовому значению *C* соответствует определенная кривая семейства)

График каждой первообразной (кривой) называется **интегральной *кривой***

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

- Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a \cdot f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$$

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную:

Если $\int f(x)dx = \mathrm{F(x)} + \mathrm{c}$, то и $\int f(u)du = \mathrm{F(u)} + \mathrm{c}$, где u = $\varphi(x)$ —произвольная функция, имеющая непрерывную производную

ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int u^{\alpha}\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$

2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3. $\int a^{u}\,du = \frac{a^{u}}{\ln a} + C;$

4. $\int e^{u}\,du = e^{u} + C;$

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$

7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$

8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$

9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$

10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$

11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$

14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$

15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$

16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$

18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

ПРИМЕРЫ

Найти неопределенные интегралы

- $\int x^2\,dx$
- $\int (2x^4 - 5x^2 + 4x + 3)\,dx$
- $\int \frac{x+1}{x}\,dx$

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

- Метод непосредственного интегрирования
- Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)
- Метод интегрирования по частям

МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

- данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам
- При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция *«подведения под знак дифференциала»*):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число},$$

$$du = \frac{1}{a} d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$

$$u \cdot du = \frac{1}{2} d(u^2),$$

$$\cos u \, du = d(\sin u),$$

$$\sin u \, du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u),$$

$$\frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u).$$

ПРИМЕРЫ

- Найти неопределенные интегралы
- $\int \frac{dx}{x+3}$
- $\int (3x+1)^5\, dx$
- $\int tg(2x)\, dx$
- $\int x(x+2)^7\, dx$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОДСТАНОВКОЙ

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом данный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки).
- Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.
- Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

ПРИМЕРЫ

- $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$ подстановка $x = 4t$, тогда $dx = 4dt$ и

  $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^{t}\,dt = 4e^{t} + c = 4e^{\frac{x}{4}} + c$

- $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

подстановка $\sqrt{x-3} = t$, тогда $x=t^2+3$, $dx=2tdt$ и

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = 2\int (t^2+3)\,tdt = 2\int (t^3+3t)\,dt = \cdots$$

- $\int x(x+2)^7\,dx$
- подстановка $x+2=t$, тогда $x=t-2$, $dx=dt$ и

$$\int x(x+2)^7\,dx = \int (t-2)t^7\,dt = \cdots \ldots$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

- Пусть *u = u(x) и v = v(x)* — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда *d(uv)=udv+vdu.* Интегрируя это равенство, получим формулу интегрирования по частям

$$\int duv = \int udv + \int vdu \text{ или } \int udv = uv + \int vdu$$

- Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

- Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где P(x) — многочлен, к — число. Удобно положить u = P(x), а за dv обозначить все остальные сомножители
- Интегралы вида $\int P(x)lnx\,dx$, $\int P(x)\,arc\sin x\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arccos\,x}\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg\,x}\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg\,x}\,dx$ где P(x) — многочлен, к — число. Удобно положить p(x)dx=dv, а за u обозначить все остальные сомножители
- Интегралы вида $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$, $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$,

  где a и b — числа. За *u* можно принять функцию $u = e^{ax}$.

ПРИМЕРЫ

Найти неопределенные интегралы

- $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$
- $\int lnx\,dx$
- $\int x^2 e^x\,dx$

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Пусть функция y = f(x) определена на отрезке [a,Ь],
- С помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ разобьем отрезок [a,b] на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$,..,$[x_{n-1},x_n]$
- В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};X_i]$, i = 1 , 2 , . . . , n выберем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней f(ci)
- Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка, составим сумму всех таких произведений

$$\boldsymbol{S_n} = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots . + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f(c_i)\Delta x_i}$$

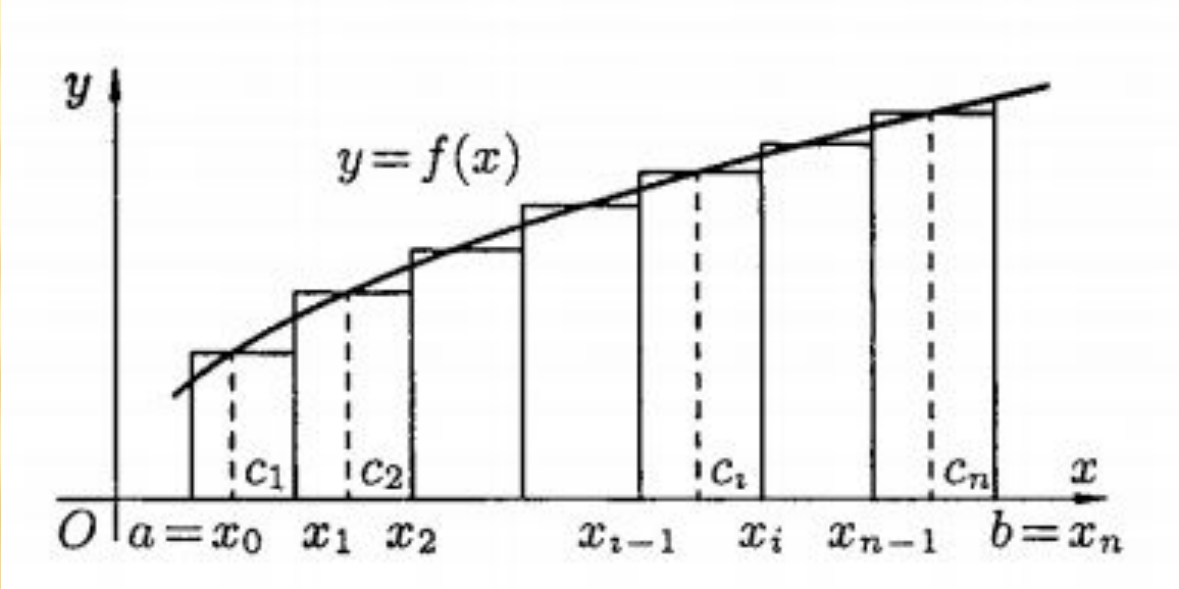
- Эта сумма называется *интегральной суммой* функции *y= f(x)* на отрезке *[a,b]*

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Найдем предел интегральной суммы при n ->∞ Если этот предел существует и равен числу I, то это число и есть значение определенного интеграла
- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(c_i)\Delta x_i}$
- Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, f(x) — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования, отрезок [a,b] — областью (отрезком) интегрирования.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции, заключенной на отрезке интегрирования под графиком интегрируемой функции.



ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

- **Теорема:** Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b]* и *F(x) — это* ее первообразная на *[a,b]* *(F‘(x)* = f(x)), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ПРИМЕРЫ

Вычислить значения определенных интегралов

- $\int_0^3 x^2\,dx$
- $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$
- $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования *[a,b]* конечный, а подынтегральная функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a;b],* называют ***собственным интегралом.***
- Определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв, называют **несобственным интегралом**

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

- - Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования $\int_a^{\infty} f(x)dx$
- Если существует **конечный** предел $\lim\limits_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл сходится и равен этому пределу

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

- Если такого предела не существует, то интеграл расходится

ПРИМЕРЫ

- Вычислить значения определенных интегралов
- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} dx$
- $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^{0} \cos x \, dx$

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

- - Интеграл от разрывной функции
- Пусть функция *f(x)* непрерывна на промежутке *[a,b]* и имеет бесконечный разрыв при *x* = *b*. Если существует **конечный** предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то несобственный интеграл сходится и равен этому пределу

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

- Если такого предела не существует, то интеграл расходится

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

- Аналогично, если функция *f(x)* терпит бесконечный разрыв в точке а, то
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- Если функция f(x) терпит разрыв во внутренней точке с отрезка *[a,b],* то несобственный интеграл второго рода определяется формулой
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ПРИМЕРЫ

- Вычислить значения определенных интегралов
- $\int_0^1 \frac{dx}{x} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

- В основе численного интегрирования лежит идея применения квадратурных формул
- - формулы средних прямоугольников

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-1/2})h,$$

- - формулы трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h$$

- - формулы Симпсона

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i),$$

ПРИМЕРЫ

- Рассчитать приближенное значение интеграла по формуле трапеций, сравнить с точным значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

ПРИМЕРЫ

h	0,1										
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
s	0,1105	0,1325	0,1565	0,1825	0,2105	0,2405	0,2725	0,3065	0,3425	0,3805	
S	2,335										
I	2,333										