ЛЕКЦИЯ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первообразная, неопределенный интеграл.

Методы интегрирования.

Определенный интеграл по отрезку. Формула Ньютона –Лейбница.

Несобственные интегралы.

Приближенное вычисление интегралов

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- В дифференциальном исчислении решается задача: *по данной функции найти* ее *производную*. Интегральное исчисление решает обратную задачу: *найти функцию, зная ее производную*. Искомую функцию называют первообразной.
- Функция *F(x)* называется *первообразной* функции *f(x)* на интервале (a,b*)*, если для любого x∈(a,b*)* выполняется равенство *F'(x) = f(x)*
- Теорема. Если функция F(x) является первообразной функции f(x) на (a,b), то множество всех первообразных для f(x) задается формулой, F(x)+C, где C = const

ПОНЯТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Множество всех первообразных функций F(x)+C для f(x) называется **неопределенным интегралом** от функции f(x)

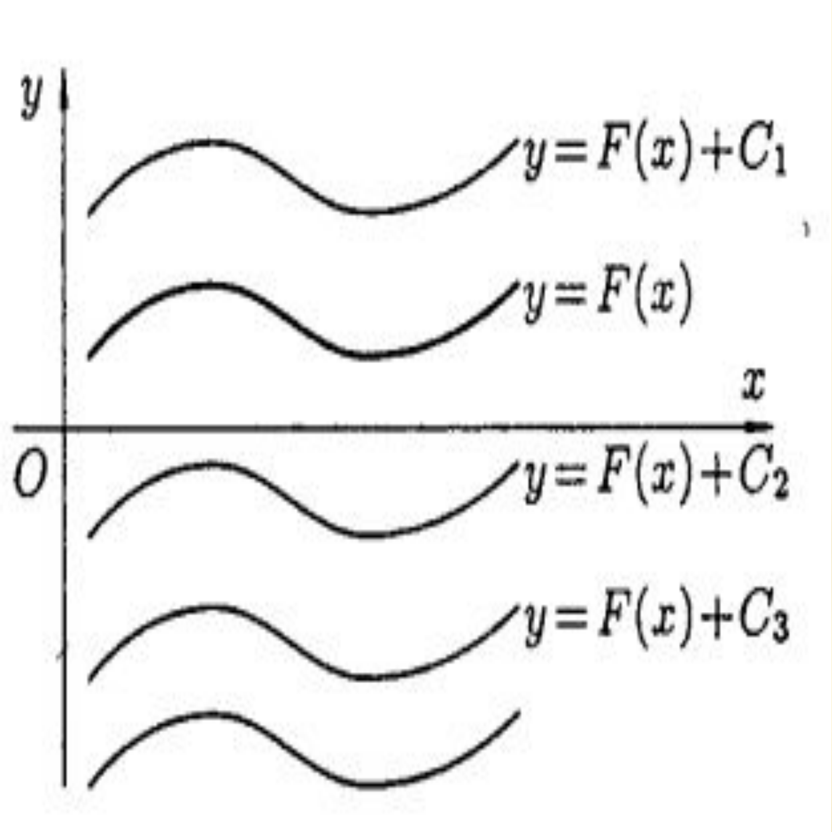
$$\int f(x)\,dx = F(x)+C$$

f(x) называется подынтегральной функцией,

x — переменной интегрирования

- Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА



Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство изоклин («параллельных» кривых)

$$y = F(x) + C$$

(каждому числовому значению *C* соответствует определенная кривая семейства)

График каждой первообразной (кривой) называется **интегральной *кривой***

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

- Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x)+C$$

- Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int a\cdot f(x)dx = a\cdot\int f(x)dx$$

СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

- формула для неопределенного интеграла остается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой функцией от нее, имеющей непрерывную производную:

Если $\int f(x)dx = \mathrm{F(x)} + \mathrm{c}$, то и $\int f(u)du = \mathrm{F(u)} + \mathrm{c}$, где u = $\varphi(x)$ —произвольная функция, имеющая непрерывную производную

Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int u^\alpha\,du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$
2. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3. $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C;$
4. $\int e^u\,du = e^u + C;$
5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C$
6. $\int \cos u\,du = \sin u + C$
7. $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} u\,du = \ln|\sin u| + C;$
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
11. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C;$
12. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$
13. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C;$
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 + a^2}| + C;$
15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C;$
16. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$
17. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C;$
18. $\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du = \frac{u}{2}\cdot\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C.$

ПРИМЕРЫ

Найти неопределенные интегралы

- $\int x^2\,dx$
- $\int (2x^4 - 5x^2 + 4x + 3)\,dx$
- $\int \frac{x+1}{x}\,dx$

ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

- Метод непосредственного интегрирования
- Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)
- Метод интегрирования по частям

МЕТОД НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

- данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам
- При сведении данного интеграла к табличному часто используются следующие преобразования дифференциала (операция *«подведения под знак дифференциала»*):

$$du = d(u + a), \quad a \text{ — число},$$
$$du = \frac{1}{a}d(au), \quad a \neq 0 \text{ — число},$$
$$u \cdot du = \frac{1}{2}d(u^2),$$

$$\cos u\, du = d(\sin u),$$
$$\sin u\, du = -d(\cos u),$$
$$\frac{1}{u}\, du = d(\ln u),$$
$$\frac{1}{\cos^2 u}\, du = d(\operatorname{tg} u).$$

ПРИМЕРЫ

Найти неопределенные интегралы

- $\int \frac{dx}{x+3}$
- $\int (3x+1)^5 \, dx$
- $\int tg(2x) \, dx$
- $\int x(x+2)^7 \, dx$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПОДСТАНОВКОЙ

- Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования. При этом данный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки).
- Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.
- Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную. Тогда $dx = \varphi'(t)dt$ и

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

ПРИМЕРЫ

- $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx$ подстановка x = *4t*, тогда *dx = 4dt и*

  $\int e^{\frac{x}{4}}\,dx = 4\int e^{t}\,dt = 4e^{t}+c = 4e^{\frac{x}{4}} + c$

- $\int x\sqrt{x-3}\,dx$

подстановка $\sqrt{x-3} = t$, тогда x=t²+3,dx=2tdt и

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx = 2\int (t^2+3)\,tdt = 2\int (t^3+3t)\,dt = \cdots$$

- $\int x(x+2)^7\,dx$
- подстановка x+2=t, тогда x=t-2, dx=dt и

$$\int x(x+2)^7\,dx = \int (t-2)t^7\,dt = \cdots \ldots$$

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

- Пусть *u* = *u*(*x*) и *v* = *v*(*x*) — функции, имеющие непрерывные производные. Тогда *d*(*uv*)=*udv*+*vdu*. Интегрируя это равенство, получим формулу интегрирования по частям

$$\int duv = \int udv + \int vdu \text{ или } \int udv = uv + \int vdu$$

- Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

- Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x)\sin kx\,dx$, $\int P(x)\cos kx\,dx$, где P(x) — многочлен, к — число. Удобно положить u = P(x), а за dv обозначить все остальные сомножители
- Интегралы вида $\int P(x) lnx\,dx$, $\int P(x)\, arc\sin x\,dx$, $\int P(x)\arccos x\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}\, x\,dx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}\, x\,dx$ где P(x) — многочлен, к — число. Удобно положить p(x)dx=dv, а за u обозначить все остальные сомножители
- Интегралы вида $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$, $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx$,

  где a и b — числа. За *u* можно принять функцию *u* = e^{ax}.

ПРИМЕРЫ

Найти неопределенные интегралы

- $\int (2x+1)e^{3x}\,dx$
- $\int lnx\,dx$
- $\int x^2 e^x\,dx$

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке [a,Ь],
- С помощью точек $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., $x_n = b$ разобьем отрезок [a,b] на n частичных отрезков $[x_0;x_1]$, $[x_1;x_2]$,...,$[x_{n-1},x_n]$
- В каждом частичном отрезке $[x_{i-1};X_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ выберем произвольную точку c_i и вычислим значение функции в ней f(ci)
- Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ соответствующего частичного отрезка, составим сумму всех таких произведений

$$\boldsymbol{S_n} = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \cdots . + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f(c_i)\Delta x_i}$$

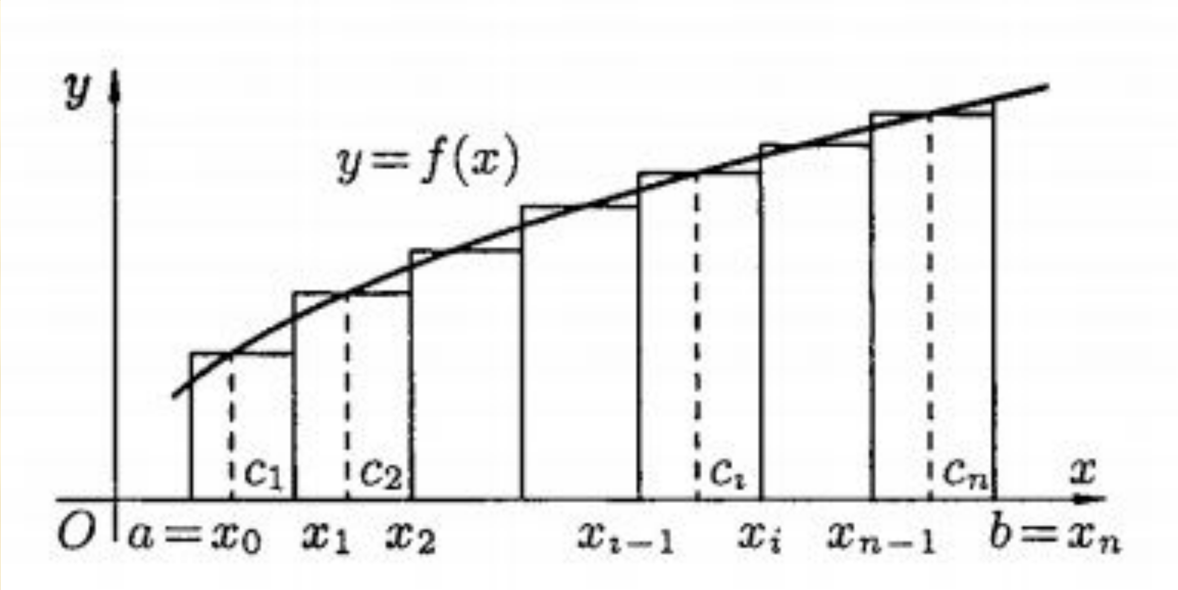
- Эта сумма называется *интегральной суммой* функции *y= f(x)* на отрезке *[a,b]*

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- Найдем предел интегральной суммы при n ->∞ Если этот предел существует и равен числу I, то это число и есть значение определенного интеграла
- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c_i})\Delta \boldsymbol{x_i}$
- Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования, f(x) — подынтегральной функцией, x — переменной интегрирования, отрезок [a,b] — областью (отрезком) интегрирования.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

- определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади криволинейной трапеции, заключенной на отрезке интегрирования под графиком интегрируемой функции.



ФОРМУЛА НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА

- **Теорема:** Если функция *y = f(x)* непрерывна на отрезке *[a,b]* и *F(x) – это* ее первообразная на *[a,b]* *(F'(x)* = f(x)), то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

ПРИМЕРЫ

Вычислить значения определенных интегралов

- $\int_0^3 x^2\,dx$
- $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$
- $\int_0^{\pi} x \sin x\,dx$

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

- Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования *[a,b]* конечный, а подынтегральная функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[а;Ь],* называют ***собственным интегралом.***
- Определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв, называют **несобственным интегралом**

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ I РОДА

- \- Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования $\int_a^\infty f(x)dx$
- Если существует **конечный** предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$, то несобственный интеграл сходится и равен этому пределу

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

- Если такого предела не существует, то интеграл расходится

ПРИМЕРЫ

Вычислить значения определенных интегралов

- $\int_1^\infty \frac{dx}{x} dx$
- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} dx$
- $\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx$

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

- \- Интеграл от разрывной функции
- Пусть функция *f(x)* непрерывна на промежутке *[a,b]* и имеет бесконечный разрыв при *x = b.* Если существует **конечный** предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то несобственный интеграл сходится и равен этому пределу

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

- Если такого предела не существует, то интеграл расходится

НЕСОБСТВЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ II РОДА

- Аналогично, если функция *f(x)* терпит бесконечный разрыв в точке а, то
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx$$
- Если функция f(x) терпит разрыв во внутренней точке с отрезка *[a,b]*, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

ПРИМЕРЫ

Вычислить значения определенных интегралов

- $\int_0^1 \frac{dx}{x} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{x^2} dx$
- $\int_0^1 \frac{dx}{\sin x}$

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

- В основе численного интегрирования лежит идея применения квадратурных формул
- - формулы средних прямоугольников

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx f(x_{i-1/2})h,$$

- - формулы трапеций

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}h$$

- - формулы Симпсона

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{6}(f_{i-1} + 4f_{i-1/2} + f_i),$$

ПРИМЕРЫ

- Рассчитать приближенное значение интеграла по формуле трапеций, сравнить с точным значением, вычисленным по формуле Ньютона-Лейбница

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f(x)	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4

ПРИМЕРЫ

h	0,1										
x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2
f	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	2,89	3,24	3,61	4
s	0,1105	0,1325	0,1565	0,1825	0,2105	0,2405	0,2725	0,3065	0,3425	0,3805	
S	2,335										
I	2,333										