ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИОННЫЕ КОНСТАНТЫ НЕКОТОРЫХ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ И СЕМИМЕРНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ ПРОСТРАНСТВ l_1^7, l_1^{10}

Актуальность:

Работа посвящёна одной из неразрешённых в общем виде проблем функционального анализа, а именно проблеме нахождения значений относительных проекционных констант.

Операторы проектирования дают приближение того же порядка, что и наилучшее, и, следовательно, находят применение в вычислительной математике.

Рассматривается несколько новых классов подпространств пространств l_1^γ, l_1^0.

Цели :

1). Получить значения относительных проекционных констант для некоторых подпространств пространств L_1^n ;

2). Получить оценки снизу чисел $\lambda(4,7)$ и $\lambda(7,10)$, точные значения которых неизвестны.

Содержание :

Глава 2. Относительные проекционные константы.

2.1 Относительная проекционная константа четырёхмерного подпространства $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^7, где $f = (1,0,0,0,1,1,1), g = (0,1,0,1,0,1,1), h = (0,0,1,1,1,0,1)$.

2.2 Относительная проекционная константа четырёхмерного подпространства $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^7, где $f = (1,0,0,0,1,1,r), g = (0,1,0,1,0,1,r), h = (0,0,1,1,1,0,r)$.

2.3 Относительная проекционная константа четырёхмерного подпространства $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^7, где $f = (1,0,0,0,s,s,1), g = (0,1,0,s,0,s,1), h = (0,0,1,s,s,0,1)$.

2.4 Относительная проекционная константа четырёхмерного подпространства $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^7, где $f = (1,0,0,0,s,s,r), g = (0,1,0,s,0,s,r), h = (0,0,1,s,s,0,r)$.

2.5 Относительная проекционная константа семимерного подпространства $Y_7 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^{10}, где

$$f = (1,1,0,0,0,0,1,1,0,1),\ g = (0,0,1,1,0,0,1,0,1,1),\ h = (0,0,0,0,1,1,0,1,1,1).$$

2.6 Относительная проекционная константа семимерного подпространства $Y_7 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^{10}, где

$$f = (1,1,0,0,0,0,1,1,0,r),\ g = (0,0,1,1,0,0,1,0,1,r),\ h = (0,0,0,0,1,1,0,1,1,r).$$

2.7 Относительная проекционная константа семимерного подпространства $Y_7 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$ пространства l_1^{10}, где

$$f = (1,1,0,0,0,0,s,s,0,1),\ g = (0,0,1,1,0,0,s,0,s,1),\ h = (0,0,0,0,1,1,0,s,s,1).$$

Заключение

Список используемой литературы

Глава 1. Основные положения теории относительных проекционных констант.

Определение. Отображение A линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y называется линейным оператором, если оно однородно и аддитивно, т.е. $(\forall x \in X)\ (\forall \alpha \in R)\ A\,\alpha x = \alpha A x$ и $(\forall x, y \in X)\ A(x+y) = Ax + Ay$. Линейный оператор со значениями в R, т.е. $f : X \to R$, называется линейным функционалом.

Утверждение. Любой линейный функционал f, определённый на X_n, имеет вид

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i,$$ где $f_i = f(e_i)$.

Определение. Пусть X – линейное нормированное пространство, $Y \subset X$ - его подпространство. Линейный оператор $\pi : X \to Y$ называется оператором проектирования, или проектором, если $\pi^2 = \pi$, то есть $\pi(\pi(x)) = \pi(x)$. Здесь $\pi(x) \in Y$, если $x \in Y$, то $\pi(x) = x$.

Теорема. Любой оператор проектирования линейного нормированного пространства X_n на Y_{n-3} имеет вид $\pi x = x - \alpha f(x) - \beta g(x) - \gamma h(x)$, где $\alpha, \beta, \gamma \in X_n$ и $f(\alpha) = g(\beta) = h(\gamma) = 1$, $f(\beta) = f(\gamma) = g(\alpha) = g(\gamma) = h(\alpha) = h(\beta) = 0$.

Теорема. Пусть f, g, h – линейные функционалы, определённые на l_1^n, f, g, h линейно независимы, выполняются условия $f(\alpha) = g(\beta) = h(\gamma) = 1$, $f(\beta) = f(\gamma) = g(\alpha) = g(\gamma) = h(\alpha) = h(\beta) = 0$, $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n \in l_1^n$, $\beta = (\beta_i)_{i=1}^n \in l_1^n$, $\gamma = (\gamma_i)_{i=1}^n \in l_1^n$. Тогда $\|\pi_{\alpha\beta\gamma}\|_1 = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^n \left|\delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j\right|$.

Глава 2. Относительные проекционные константы.

1). Функционалы f, g, h определим следующим образом:

$$f = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1),\ g = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 1),\ h = (0,0,1,1,1,0,1). \qquad \textbf{(1)}$$

Теорема:

Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 7$ на подпространство $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (1).

Тогда $\lambda(Y_4, l_1^7) = \dfrac{5}{3}$.

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(4,7)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(4,7) \geq \lambda(Y_4, l_1^7) \geq \frac{5}{3}.$$

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой, полученной по формуле

$$\lambda(k,n) \leq f(k,n) = \frac{k + \sqrt{k(n-k)(n-1)}}{n}$$ меньше 0,12.

$$\lambda(4;\ 7) \le \frac{4+\sqrt{4(7-1)(7-4)}}{7} = \frac{4+\sqrt{4\cdot 6\cdot 3}}{7} = \frac{4+6\sqrt{2}}{7} \approx 1{,}7836.$$

$$\frac{5}{3} \le \lambda(4,7) \le \frac{4+6\sqrt{2}}{7}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками равна 0,117….

2). Функционалы f, g, h определим следующим образом:

$$f = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ r),\ g = (0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ r),\ h = (0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ r),\ \ r > 0. \qquad \textbf{(2)}$$

Теорема:

Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 7$ на подпространство $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (2).

Тогда $\lambda(Y_4, l_1^7) = \dfrac{33r^2+23r+4}{21r^2+11r+4}$.

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(4,7)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(4,7) \ge \lambda(Y_4, l_1^7) \ge \frac{33r^2+23r+4}{21r^2+11r+4}$$

Пусть $\varphi(r) = \dfrac{33r^2+23r+4}{21r^2+11r+4}$. Наибольшее значение $\varphi(r)$

достигается при $r=\frac{2+\sqrt{14}}{5}$; $\varphi_{\max}=\frac{179+48\sqrt{14}}{215}\approx 1{,}667905.$

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой меньше 0,12.

$$\lambda(4;\ 7)\le\frac{4+\sqrt{4(7-1)(7-4)}}{7}=\frac{4+\sqrt{4\cdot 6\cdot 3}}{7}=\frac{4+6\sqrt{2}}{7}\approx 1{,}7836.$$

$$\frac{179+48\sqrt{14}}{215}\le\lambda(4{,}7)\le\frac{4+6\sqrt{2}}{7}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками равна 0,1156….

3).Функционалы f,g,h определим следующим образом:

$$f=(1{,}0{,}0{,}0,s,s,1),\ g=(0{,}1{,}0,s,0,s,1),\ h=(0{,}0{,}1,s,s,0{,}1). \quad \textbf{(3)}$$

Теорема:

Пусть $\pi_{a,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n=7$ на подпространство $Y_4=f^{-1}(0)\cap g^{-1}(0)\cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (3).

Тогда $\lambda(X_4,\ l_1^7)=\frac{4s^2+8s+3}{4s^2+2s+3}.$

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(4,7)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(4,7) \geq \lambda(Y_4, l_1^7) \geq \frac{4s^2+8s+3}{4s^2+2s+3}$$

Пусть $\psi(s) = \dfrac{4s^2+8s+3}{4s^2+2s+3}$. Наибольшее значение $\psi(s)$ достигается при $s = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и

$$\psi_{\max} = \frac{8+6\sqrt{3}}{11} \approx 1,6720.$$

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой меньше 0,12.

$$\lambda(4;\ 7) \leq \frac{4+\sqrt{4(7-1)(7-4)}}{7} = \frac{4+\sqrt{4\cdot 6\cdot 3}}{7} = \frac{4+6\sqrt{2}}{7} \approx 1,7836.$$

$$\frac{8+6\sqrt{3}}{11} \leq \lambda(4,7) \leq \frac{4+6\sqrt{2}}{7}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками менее 0,1116….

4). Функционалы f, g, h определим следующим образом:

$$f = (1,0,0,0,s,s,r),\ g = (0,1,0,s,0,s,r),\ h = (0,0,1,s,s,0,r). \quad \textbf{(4)}$$

Теорема:

Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 7$ на подпространство $Y_4 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (4).

Тогда $\lambda(Y_4, l_1^7) = \dfrac{18r^2s + 9r^2 + 8rs^2 + 6r^2s^2 + 12rs + 3r + 2s^2 + 2s}{6r^2s + 6r^2s^2 + 8rs^2 + 9r^2 + 3r + 2s^2 + 2s}$.

$r < 1$

$0 \le s \le \dfrac{r+1}{1-r}$

Доказательство:

Рассмотрим значения M_j, где $M_j = \sum_{i=1}^{7} \left| \delta_{ij} - \alpha_i f_j - \beta_i g_j - \gamma_i h_j \right|$.

$$M_1 = |1 - \alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| + |\alpha_4| + |\alpha_5| + |\alpha_6| + |\alpha_7|;$$

$$M_2 = |\beta_1| + |1 - \beta_2| + |\beta_3| + |\beta_4| + |\beta_5| + |\beta_6| + |\beta_7|;$$

$$M_3 = |\gamma_1| + |\gamma_2| + |1 - \gamma_3| + |\gamma_4| + |\gamma_5| + |\gamma_6| + |\gamma_7|;$$

$$M_4 = s(|\beta_1 + \gamma_1| + |\beta_2 + \gamma_2| + |\beta_3 + \gamma_3|) + |1 - s(\beta_4 + \gamma_4)| + s(|\beta_5 + \gamma_5| + |\beta_6 + \gamma_6| + |\beta_7 + \gamma_7|);$$

$$M_5 = s(|\alpha_1 + \gamma_1| + |\alpha_2 + \gamma_2| + |\alpha_3 + \gamma_3| + |\alpha_4 + \gamma_4|) + |1 - s(\alpha_5 + \gamma_5)| + s(|\alpha_6 + \gamma_6| + |\alpha_7 + \gamma_7|);$$

$$M_6 = s(|\alpha_1 + \beta_1| + |\alpha_2 + \beta_2| + |\alpha_3 + \beta_3| + |\alpha_4 + \beta_4| + |\alpha_5 + \beta_5|) + |1 - s(\alpha_6 + \beta_6)| + s|\alpha_7 + \beta_7|;$$

$$M_7 = r(|\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1| + |\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2| + |\alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3| + |\alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4| + |\alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5| +$$
$$+ |\alpha_6 + \beta_6 + \gamma_6|) + |1 - r(\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7)|;$$

$$f(\alpha) = g(\beta) = h(\gamma) = \mathbf{1},\ f(\beta) = f(\gamma) = g(\alpha) = g(\gamma) = h(\alpha) = h(\beta) = 0. \qquad (*)$$

$$f(\alpha) = \alpha_1 + s\alpha_5 + s\alpha_6 + r\alpha_7 = \mathbf{1},$$

$$g(\alpha) = \alpha_2 + s\alpha_4 + s\alpha_6 + r\alpha_7 = 0,$$

$$h(\alpha) = \alpha_3 + s\alpha_4 + s\alpha_5 + r\alpha_7 = 0,$$

$$f(\beta) = \beta_1 + s\beta_5 + s\beta_6 + r\beta_7 = 0,$$

$$g(\beta) = \beta_2 + s\beta_4 + s\beta_6 + r\beta_7 = 1,$$

$$h(\beta) = \beta_3 + s\beta_4 + s\beta_5 + r\beta_7 = 0,$$

$$f(\gamma) = \gamma_1 + s\gamma_5 + s\gamma_6 + r\gamma_7 = 0,$$

$$g(\gamma) = \gamma_2 + s\gamma_4 + s\gamma_6 + r\gamma_7 = 0,$$

$$h(\gamma) = \gamma_3 + s\gamma_4 + s\gamma_5 + r\gamma_7 = 1$$

$$M_1 \geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7;$$

$$M_2 \geq -\beta_1 + 1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 - \beta_5 + \beta_6 + \beta_7;$$

$$M_3 \geq -\gamma_1 + 1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_6 + \gamma_7;$$

$$M_4 \geq -s\beta_1 - s\gamma_1 + s\beta_2 + s\gamma_2 + s\beta_3 + s\gamma_3 + 1 - s\beta_4 - s\gamma_4 + \mu s(\beta_5 + \gamma_5 + \beta_6 + \gamma_6) + s\beta_7 + s\gamma_7;$$

$$M_5 \geq s\alpha_1 + s\gamma_1 - s\alpha_2 - s\gamma_2 + s\alpha_3 + s\gamma_3 + 1 + s\mu(\alpha_4 + \gamma_4 + \alpha_6 + \gamma_6) - s\alpha_5 - s\gamma_5 +$$
$$+ s\alpha_7 + s\gamma_7;$$

$$M_6 \geq s\alpha_1 + s\beta_1 + s\alpha_2 + s\beta_2 - s\alpha_3 - s\beta_3 + 1 + s\mu(\alpha_4 + \beta_4 + \alpha_5 + \beta_5) - s\alpha_6 - s\beta_6 + s\alpha_7 + s\beta_7;$$

$$M_7 \geq r(\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 + \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 + \alpha_4 + \beta_4 + \gamma_4 + \alpha_5 + \beta_5 + \gamma_5 + \alpha_6 +$$
$$+ \beta_6 + \gamma_6) + 1 - r(\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7);$$

$$B = \alpha_5 + \alpha_6 + \beta_4 + \beta_6 + \gamma_4 + \gamma_5;\ A = \alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6;\ C = \alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7$$

$$M_1 + M_2 + M_3 \geq 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 - \beta_1 + 1 - \beta_2 - \beta_3 + \beta_4 - \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 -$$
$$- \gamma_1 - \gamma_2 + 1 - \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_6 + \gamma_7 = (s\alpha_5 + s\alpha_6 + r\alpha_7) + (s\alpha_4 + s\alpha_6 + r\alpha_7) + (s\alpha_4 + s\alpha_5 +$$
$$+ r\alpha_7) - \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_7 + (s\beta_5 + s\beta_6 + r\beta_7) + (s\beta_4 + s\beta_6 + r\beta_7) + (s\beta_4 + s\beta_5 + r\beta_7) +$$
$$+ \beta_4 - \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 + (s\gamma_5 + s\gamma_6 + r\gamma_7) + (s\gamma_4 + s\gamma_6 + r\gamma_7) + (s\gamma_4 + s\gamma_5 + r\gamma_7) + \gamma_4 + \gamma_5 - \gamma_6 +$$
$$+ \gamma_7 = (2s - 1)(\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6) + (2s + 1)(\alpha_5 + \alpha_6 + \beta_4 + \beta_6 + \gamma_4 + \gamma_5) + (3r + 1)(\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7) =$$
$$= (2s - 1)A + (2s + 1)B + (3r + 1)C;$$

$$M_4 + M_5 + M_6 \geq 3 + s(2(\alpha_1 + \beta_2 + \gamma_3) + 2\mu(\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6) + (\mu - 1)(\alpha_5 + \alpha_6 + \beta_4 + \beta_6 + \gamma_4 + \gamma_5) +$$
$$+ 2(\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7)) = 3 + 6s + (s(\mu - 1) - 2s^2)(\alpha_5 + \alpha_6 + \beta_4 + \beta_6 + \gamma_4 + \gamma_5) + 2\mu s(\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6) +$$
$$+ s(2 - 2r)(\alpha_7 + \beta_7 + \gamma_7) = 3 + 6s + 2\mu sA + (s(\mu - 1) - 2s^2)B + (2s - 2rs)C.$$

$$M_7 \geq 1 + 3r + r(1 - 2s)(\alpha_4 + \beta_5 + \gamma_6) + r(1 - 2s)(\beta_4 + \gamma_4 + \alpha_5 + \gamma_5 + \alpha_6 + \beta_6) - (r + 3r^2)(\alpha_7 +$$
$$+ \beta_7 + \gamma_7) = (3r + 1) + r(1 - 2s)A + r(1 - 2s)B - (3r^2 + r)C.$$

$$(3m+3n+p)\|\pi\| \geq (3+6s)n+(3r+1)p+A((2s-1)m+2\mu sn+r(1-2s)p)+B((2s+1)m+$$
$$+(s(\mu-1)-2s^2)n+r(1-2s)p)+C((3r+1)m+(2s-2rs)n-r(3r+1)p)=(3+6s)n+(3r+1)p$$

Составляем систему и находим m, n и p

$$\begin{cases} (2s-1)m+2\mu sn+r(1-2s)p=0 \\ (2s+1)m+(s(\mu-1)-2s^2)n+r(1-2s)p=0 \\ (3r+1)m+(2s-2rs)n-r(3r+1)p=0 \end{cases}$$

$$m=r(sr+s+r),\ n=\frac{r(3r+1)}{2s},\ p=(sr+s+1).$$

$$\|\pi\| \geq \frac{18r^2s+9r^2+8rs^2+6r^2s^2+12rs+3r+2s^2+2s}{6r^2s+6r^2s^2+8rs^2+9r^2+3r+2s^2+2s}.$$

Положим, что $\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 \geq 0;\ \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 \leq 0;$ $\alpha_5 = \alpha_6 = \beta_4 = \beta_6 = \gamma_4 = \gamma_5 \geq 0;\ \alpha_4 = \beta_5 = \gamma_6 \leq 0;\ \alpha_7 = \beta_7 = \gamma_7 \geq 0$. Запишем

$$M_1 = M_2 = M_3 = |1-\alpha_1| + 2|\alpha_2| + |\alpha_4| + 2|\alpha_5| + |\alpha_7|;$$

$$M_4 = M_5 = M_6 = s(2|\alpha_1 + \alpha_2| + 2|\alpha_2| + 2|\alpha_4 + \alpha_5|) + |1 - 2s\alpha_5| + 2s|\alpha_7|;$$

$$M_7 = 3r|\alpha_1 + 2\alpha_2| + 3r|\alpha_4 + 2\alpha_5| + |1 - 3r\alpha_7|;$$

$$\alpha_1 = 1 - 2s\alpha_5 - r\alpha_7,\ \alpha_2 = -s\alpha_4 - s\alpha_5 - r\alpha_7.$$

$$M_1 = 1 - \alpha_1 - 2\alpha_2 - \alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_7 = 2s\alpha_5 + r\alpha_7 + 2s\alpha_4 + 2s\alpha_5 + 2r\alpha_7 - \alpha_4 + 2\alpha_5 +$$
$$+ \alpha_7 = (2s-1)\alpha_4 + (4s+2)\alpha_5 + (3r+1)\alpha_7;$$
$$M_4 = s(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_2 + 2\mu(\alpha_4 + \alpha_5)) + 1 - 2s\alpha_5 + 2s\alpha_7 = s(2 - 4s\alpha_5 -$$
$$- 2r\alpha_7 + 2\mu(\alpha_4 + \alpha_5)) + 1 - 2s\alpha_5 + 2s\alpha_7 = (2s+1) + 2\mu s\alpha_4 + (2\mu s - 4s^2 -$$
$$- 2s)\alpha_5 + s(2 - 2r)\alpha_7;$$

$$M_7 = 3r\alpha_1 + 6r\alpha_2 + 3r\alpha_4 + 6r\alpha_5 + 1 - 3r\alpha_7 = r(3 - 6s\alpha_5 - 3r\alpha_7 - 6s\alpha_4 - 6s\alpha_5 -$$
$$-6r\alpha_7 + 3\alpha_4 + 6\alpha_5) + 1 - 3r\alpha_7 = (3r+1) + 3r(1-2s)\alpha_4 + 6r(1-2s)\alpha_5 - 3r(3r+1)\alpha_7;$$

Составляем систему для нахождения $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$

$$\begin{cases} (2s-1)\alpha_4 + (4s+2)\alpha_5 + (3r+1)\alpha_7 = \dfrac{18r^2s + 9r^2 + 8rs^2 + 6r^2s^2 + 12rs + 3r + 2s^2 + 2s}{6r^2s + 6r^2s^2 + 8rs^2 + 9r^2 + 3r + 2s^2 + 2s} \\ (2s+1) + 2s\cdot\dfrac{(1-r)(2s-1)}{3r+1}\alpha_4 + \left(2s\cdot\dfrac{(1-r)(2s-1)}{3r+1} - 4s^2 - 2s\right)\alpha_5 + (2s-2rs)\alpha_7 = \\ = \dfrac{18r^2s + 9r^2 + 8rs^2 + 6r^2s^2 + 12rs + 3r + 2s^2 + 2s}{6r^2s + 6r^2s^2 + 8rs^2 + 9r^2 + 3r + 2s^2 + 2s} \\ (3r+1) + (3r-6rs)\alpha_4 + (6r-12sr)\alpha_5 - 3r(3r+1)\alpha_7 = \dfrac{18r^2s + 9r^2 + 8rs^2 + 6r^2s^2 + 12rs + 3r + 2s^2 + 2s}{6r^2s + 6r^2s^2 + 8rs^2 + 9r^2 + 3r + 2s^2 + 2s} \end{cases}$$

$$\alpha_5 = \frac{(3r+1)(rs+s)}{6r^2s+6r^2s^2+8rs^2+9r^2+3r+2s^2+2s} = \alpha_6 = \beta_4 = \beta_6 = \gamma_4 = \gamma_5;$$

$$\alpha_4 = -\frac{(3r+1)(rs+s)}{6r^2s+6r^2s^2+8rs^2+9r^2+3r+2s^2+2s} = \beta_5 = \gamma_6;$$

$$\alpha_7 = \frac{3rs+3r-s}{6r^2s+6r^2s^2+8rs^2+9r^2+3r+2s^2+2s} = \beta_7 = \gamma_7;$$

$$\alpha_2 = -s\alpha_4 - s\alpha_5 - r\alpha_7 = -r\alpha_7 = -\frac{3rs+3r-s}{6r^2s+6r^2s^2+8rs^2+9r^2+3r+2s^2+2s} = \alpha_3 =$$

$$= \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2;$$

$$\alpha_1 = 1 - 2s\alpha_5 - r\alpha_7 = \frac{3r^2s+6r^2+3r+rs+2s}{6r^2s+6r^2s^2+8rs^2+9r^2+3r+2s^2+2s} = \beta_2 = \gamma_3;$$

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(4,7)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(4,7) \ge \lambda(Y_4, l_1^7) \ge \frac{18r^2s + 9r^2 + 8rs^2 + 6r^2s^2 + 12rs + 3r + 2s^2 + 2s}{6r^2s + 6r^2s^2 + 8rs^2 + 9r^2 + 3r + 2s^2 + 2s}$$

Пусть $\varphi(r) = \dfrac{18r^2s + 9r^2 + 8rs^2 + 6r^2s^2 + 12rs + 3r + 2s^2 + 2s}{6r^2s + 6r^2s^2 + 8rs^2 + 9r^2 + 3r + 2s^2 + 2s}$. Наибольшее значение $\varphi(r)$

достигается при $r = 0{,}8355\ldots$, $s = 0{,}8263\ldots$; $\varphi_{\max} \approx \mathbf{1{,}6721}$. (Рис. 1)

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой, меньше 0,12.

$$\lambda(4;\ 7) \le \frac{4 + \sqrt{4(7-1)(7-4)}}{7} = \frac{4 + \sqrt{4 \cdot 6 \cdot 3}}{7} = \frac{4 + 6\sqrt{2}}{7} \approx 1{,}7836.$$

$$1{,}6701 \le \lambda(4,7) \le \frac{4 + 6\sqrt{2}}{7}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками равна 0,1115….

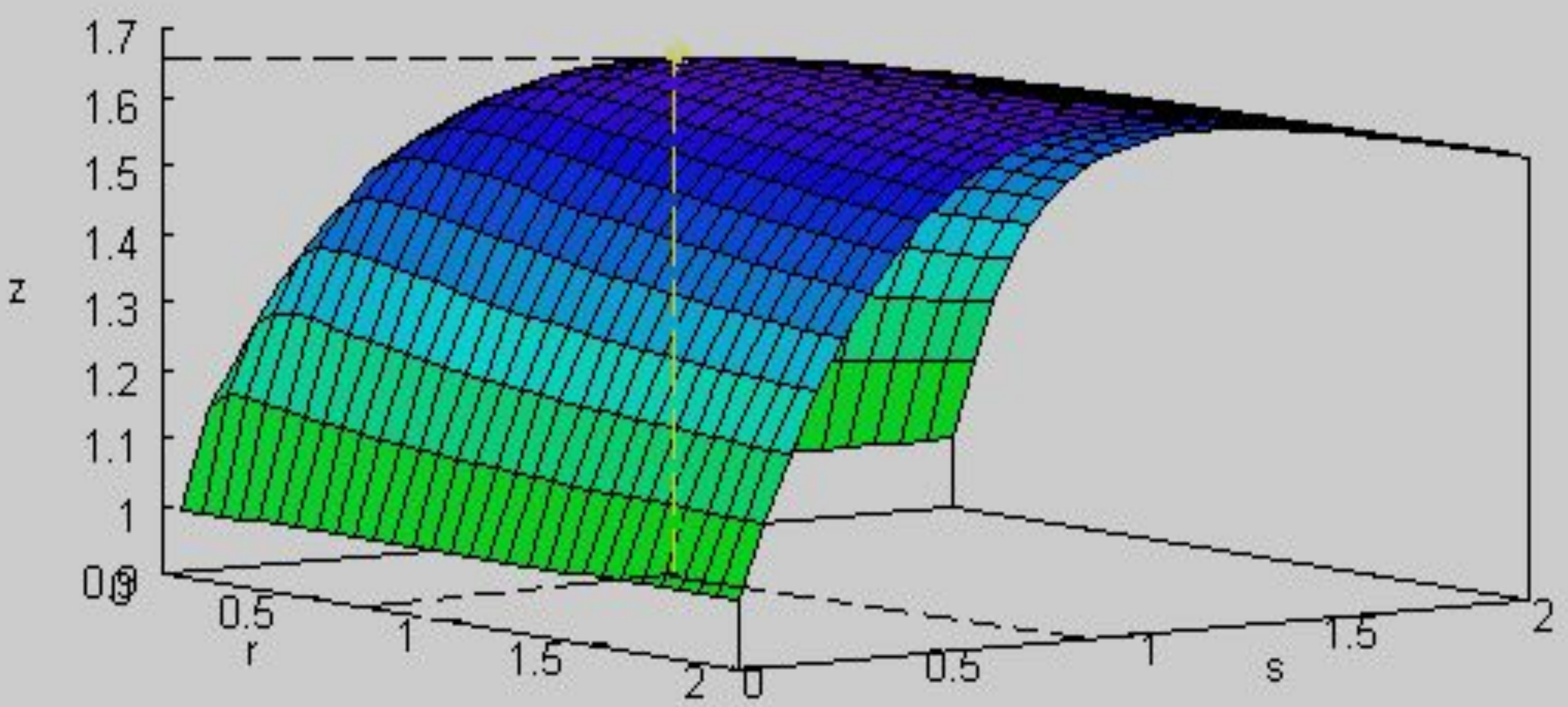

Рис. 1

5). Функционалы f, g, h определим следующим образом:

$$f = (1,1,0,0,0,0,1,1,0,1), g = (0,0,1,1,0,0,1,0,1,1),\ h = (0,0,0,0,1,1,0,1,1,1). \quad \textbf{(5)}$$

Теорема:

Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 10$ на подпространство $Y_7 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (5). Тогда $\lambda(Y_7, l_1^{10}) = \dfrac{25}{13}$.

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(7,10)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(7,10) \geq \lambda(Y_7, l_1^{10}) \geq \frac{25}{13} \approx 1{,}923077.$$

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой меньше 0,16.

$$\lambda(7;10) \le \frac{7+\sqrt{7(10-7)(10-1)}}{10} = \frac{7+3\sqrt{21}}{10} \approx 2{,}07477.$$

$$\frac{25}{13} \le \lambda(4,7) \le \frac{7+3\sqrt{21}}{10}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками равна 0,1517….

6).Функционалы f,g,h определим следующим образом:

$f=(1,1,0,0,0,0,1,1,0,r), g=(0,0,1,1,0,0,1,0,1,r),\ h=(0,0,0,0,1,1,0,1,1,r)$. **(6)**

Теорема:

Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n=10$ на подпространство $Y_7=f^{-1}(0)\cap g^{-1}(0)\cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (6). Тогда $\lambda(Y_7,l_1^{10}) \ge \dfrac{43r^2+28r+4}{23r^2+12r+4}$.

$r\in(-\infty;-2]\cup[0;+\infty)$

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(7,10)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(7,10) \geq \lambda(Y_7, l_1^{10}) \geq \frac{43r^2+28r+4}{23r^2+12r+4}.$$

Пусть $\varphi(r) = \frac{43r^2+28r+4}{23r^2+12r+4}$. Наибольшее значение $\varphi(r)$

достигается при $r = \frac{5+\sqrt{57}}{8} \approx 1{,}5687$; $\varphi_{\max} = \frac{\mathbf{114+19\sqrt{57}}}{\mathbf{133}} \approx \mathbf{1{,}9357}.$

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой меньше 0,14.

$$\lambda(7;10) \leq \frac{7+\sqrt{7(10-7)(10-1)}}{10} = \frac{7+3\sqrt{21}}{10} \approx 2{,}0748$$

$$\frac{114+19\sqrt{57}}{133} \leq \lambda(4,7) \leq \frac{7+3\sqrt{21}}{10}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками равна 0,1391….

7). Функционалы f, g, h определим следующим образом:

$$f = (1,1,0,0,0,0,s,s,0,1), g = (0,0,1,1,0,0,s,0,s,1), \quad h = (0,0,0,0,1,1,0,s,s,1). \textbf{(7)}$$

Теорема:

Пусть $\pi_{\alpha,\beta,\gamma}$ - оператор проектирования с минимальной нормой пространства $l_1^{(n)}$, $n = 10$ на подпространство $Y_7 = f^{-1}(0) \cap g^{-1}(0) \cap h^{-1}(0)$, где функционалы имеют вид (7). Тогда $\lambda(Y_7, l_1^{10}) \geq \dfrac{20s^2 + 40s + 15}{20s^2 + 4s + 15}$.

$$\frac{-3-\sqrt{73}}{2} < s < \frac{5}{2}$$

Замечание:

Для абсолютной проекционной константы $\lambda(7,10)$ имеем следующую оценку:

$$\lambda(7,10) \geq \lambda(Y_7, l_1^{10}) \geq \frac{20s^2 + 40s + 15}{20s^2 + 4s + 15}.$$

Пусть $\varphi(r) = \dfrac{20s^2 + 40s + 15}{20s^2 + 4s + 15}$.

Наибольшее значение $\varphi(r)$ достигается при $s = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\varphi_{\max} = \dfrac{65 + 45\sqrt{3}}{74} \approx 1{,}9316.$

Покажем, что разность между этой оценкой и оценкой меньше 0,15.

$$\lambda(7;10) \le \frac{7 + \sqrt{7(10-7)(10-1)}}{10} = \frac{7 + 3\sqrt{21}}{10} \approx 2{,}0748$$

$$\frac{65 + 45\sqrt{3}}{74} \le \lambda(4,7) \le \frac{7 + 3\sqrt{21}}{10}$$

Полученная оценка снизу достаточно точная, разность между верхней и нижней оценками равна $0{,}1432\ldots$.

Результаты:

1. Вычислены относительные проекционные константы $\lambda(Y_4;l_1^7)$ и $\lambda(Y_7;l_1^{10})$ некоторых классов подпространств.
2. Для данных относительных проекционных констант найдена оценка снизу.
3. Показано, что найденные значения $\lambda(Y_4;l_1^7)$ и $\lambda(Y_7;l_1^{10})$ дают достаточно хорошую оценку снизу соответственно для $\lambda(4,7)$ и $\lambda(7,10)$, точные значения которых неизвестны.
4. Наилучшее приближение для $\lambda(4,7)$ было получено в случае, когда $f=(1,0,0,0,s,s,r), g=(0,1,0,s,0,s,r), h=(0,0,1,s,s,0,r)$.
5. Для $\lambda(7,10)$ наилучшее приближение получено, когда

$f=(1,1,0,0,0,0,1,1,0,r), g=(0,0,1,1,0,0,1,0,1,r), h=(0,0,0,0,1,1,0,1,1,r)$.

Публикации:

1. Локоть, В. В. Проекционные константы [Текст] / В. В. Локоть., Дроздова А.С., Низовцева Е.В., Попова А.О // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2012. Материалы научной конференции, 16-21 апреля 2012 г. – СПб.: БАН, 2012. – 130-132 с.
2. Локоть, В. В. Оценка снизу относительной проекционной константы $\lambda(4,7)$ [Текст] / В. В. Локоть., Васин С.М., Дроздова А.С., Низовцева Е.В., Попова А.О // Некоторые актуальные проблемы современной математики и математического образования. Герценовские чтения – 2011. Материалы научной конференции, 11-16 апреля 2011 г. – СПб.: БАН, 2011. – 148-152 с.

Список литературы:

1. Blatter, J. Minimal projections onto hyperplanes in sequence spaces [Текст] / J. Blatter, E. W. Cheney // Annali di Matematica Pura ed Applicata. – 1974. – № 101. – P. 215 – 227.
2. Bohnenblust, F. Convex regions and projections in Minkowski spaces [Текст] / F. Bohnenblust // Annals of Mathematics. Vol 39. – 1938. – № 2. – P. 301 – 308.
3. Вайнберг, М. М. Функциональный анализ [Текст]: спец. курс. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / М. М. Вайнберг. – М.: Просвещение, 1979. – 128 с.
4. König, H. P. Finite dimensional projections [Текст] / H. P. König, D. R. Lewis, P.-K. Lin // Stud. math. (PRL). Vol. 75. – 1983. – № 3. – P. 341 –358.

5. Локоть, В. В. О нормах операторов проектирования в пространстве l_1^n [Текст] / В. В. Локоть // Применение функционального анализа в теории приближений. – Калинин, 1978. – С. 108 – 115.

6. Одинец, В. П. Проекторы и базисы в нормированных пространствах [Текст] / В. П. Одинец, М. Я. Якубсон. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 152 с

7. Садовничий, В. А. Теория операторов [Текст]: учеб. для вузов / В. А. Садовничий. – 3-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 1999. – 368 с.

8. Мартынов, О. М. Относительные проекционные константы некоторых классов подпространств коразмерности четыре в пространстве $l_1^{(n)}$ [Текст] / О.М. Мартынов // Ученые записки МГТУ. Физико-математические науки: сборник статей / науч. ред. Б.М.Верешагин. Вып. 7. – Мурманск: МГТУ, 2012. – С. 45 – 59.

9. Мартынов, О.М. Об относительных проекционных константах конечномерных пространств [Текст] / О.М. Мартынов., Джаврук, Т.Д. // Ученые записки МГТУ. Физико-математические науки: сборник статей / науч. ред. Б.М.Верешагин. Вып. 7. – Мурманск: МГТУ, 2012. – С. 60 – 74.