



СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Выполнила:
Рубцова Анна (10А класс)

Учитель:
Давтян Римма Артемовна

ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

- Приведение к простейшим тригонометрическим уравнениям
- Замена переменной
- Метод понижения порядка уравнения
- Однородные уравнения
- Метод преобразования уравнения с помощью тригонометрических формул

1. ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШИМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ – СХЕМА РЕШЕНИЯ

Шаг 1. Выразить тригонометрическую функцию через известные компоненты.

Шаг 2. Найти аргумент функции по формулам:

$$\cos x = a; x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\sin x = a; x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{tg} x = a; x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{ctg} x = a; x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Шаг 3. Найти неизвестную переменную.

1. ПРИВЕДЕНИЕ К ПРОСТЕЙШИМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ – ПРИМЕР

$$2 \cos(3x - \pi/4) = -\sqrt{2}.$$

Решение.

$$1) \cos(3x - \pi/4) = -\sqrt{2}/2.$$

$$2) 3x - \pi/4 = \pm(\pi - \pi/4) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$3x - \pi/4 = \pm 3\pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$3) 3x = \pm 3\pi/4 + \pi/4 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm 3\pi/12 + \pi/12 + 2\pi n/3, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm \pi/4 + \pi/12 + 2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \pm \pi/4 + \pi/12 + 2\pi n/3, n \in \mathbb{Z}.$$

2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ – СХЕМА РЕШЕНИЯ

Шаг 1. Привести уравнение к алгебраическому виду относительно одной из тригонометрических функций.

Шаг 2. Обозначить полученную функцию переменной t (если необходимо, ввести ограничения на t).

Шаг 3. Записать и решить полученное алгебраическое уравнение.

Шаг 4. Сделать обратную замену.

Шаг 5. Решить простейшее тригонометрическое уравнение.

2. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ – ПРИМЕР

$$2\cos^2(x/2) - 5\sin(x/2) - 5 = 0.$$

Решение.

$$1) 2(1 - \sin^2(x/2)) - 5\sin(x/2) - 5 = 0;$$

$$2\sin^2(x/2) + 5\sin(x/2) + 3 = 0.$$

2) Пусть $\sin(x/2) = t$, где $|t| \leq 1$.

$$3) 2t^2 + 5t + 3 = 0;$$

$t = 1$ или $t = -3/2$, не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$.

$$4) \sin(x/2) = 1.$$

$$5) x/2 = \pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

3. МЕТОД ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ – СХЕМА РЕШЕНИЯ

Шаг 1. Заменить данное уравнение линейным, используя для этого формулы понижения степени:

$$\sin^2 x = 1/2 \cdot (1 - \cos 2x);$$

$$\cos^2 x = 1/2 \cdot (1 + \cos 2x);$$

$$\operatorname{tg}^2 x = (1 - \cos 2x) / (1 + \cos 2x).$$

Шаг 2. Решить полученное уравнение с помощью методов I и II.

3. МЕТОД ПОНИЖЕНИЯ ПОРЯДКА УРАВНЕНИЯ – ПРИМЕР

$$\cos 2x + \cos^2 x = 5/4.$$

Решение.

$$1) \cos 2x + 1/2 \cdot (1 + \cos 2x) = 5/4.$$

$$2) \cos 2x + 1/2 + 1/2 \cdot \cos 2x = 5/4;$$

$$3/2 \cdot \cos 2x = 3/4;$$

$$\cos 2x = 1/2;$$

$$2x = \pm\pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \pm\pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \pm\pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ – СХЕМА РЕШЕНИЯ

Шаг 1. Привести данное уравнение к виду

а) $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение первой степени)

или к виду

б) $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение второй степени).

Шаг 2. Разделить обе части уравнения на

а) $\cos x \neq 0$;

б) $\cos^2 x \neq 0$;

и получить уравнение относительно $\operatorname{tg} x$:

а) $a \operatorname{tg} x + b = 0$;

б) $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{arctg} x + c = 0$.

Шаг 3. Решить уравнение известными способами.

4. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ – ПРИМЕР

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4 = 0.$$

Решение.

$$1) 5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0;$$

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\sin^2 x - 4\cos^2 x = 0;$$

$$\sin^2 x + 3\sin x \cdot \cos x - 4\cos^2 x = 0/\cos^2 x \neq 0.$$

$$2) \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0.$$

3) Пусть $\operatorname{tg} x = t$, тогда

$$t^2 + 3t - 4 = 0;$$

$t = 1$ или $t = -4$, значит

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ или } \operatorname{tg} x = -4.$$

Из первого уравнения $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; из второго уравнения $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $x = -\operatorname{arctg} 4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

5. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ – СХЕМА РЕШЕНИЯ

Шаг 1. Используя всевозможные тригонометрические формулы, привести данное уравнение к уравнению, решаемому методами I, II, III, IV.

Шаг 2. Решить полученное уравнение известными методами.

5. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФОРМУЛ – ПРИМЕР

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

Решение.

$$1) (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x = 0;$$

$$2\sin 2x \cdot \cos x + \sin 2x = 0.$$

$$2) \sin 2x \cdot (2\cos x + 1) = 0;$$

$$\sin 2x = 0 \text{ или } 2\cos x + 1 = 0;$$

Из первого уравнения $2x = \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; из второго уравнения $\cos x = -1/2$.

Имеем $x = \pi/4 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}$; из второго уравнения $x = \pm(\pi - \pi/3) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

В итоге $x = \pi/4 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}; x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi/4 + \pi n/2, n \in \mathbb{Z}; x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.



СПАСИБО

