Бином Ньютона

«Эка, сложность какая!
Прямо Бином Ньютона!»

А.П. Чехов

Рассмотрим выражение $(a+b)^n$

$(a+b)=a+b$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$

…

Отметим, что k-ый член суммы в данном разложении можно записать как $S_k \cdot a^{n-k}\, b^k$, где $0 \le k \le n$, S_k – числовой коэффициент

Выпишем коэффициенты данных разложений S_k

n \ k	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

формула бинома Ньютона

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a^1 + \ldots + C_n^m x^{n-m} a^m + \ldots + C_n^n x^0 a^n$$

Числа C_n^m называют *биномиальными коэффициентами,* которые могут быть найдены по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot m}, \quad C_n^0 = 1$$

Докажем этот факт

$(a+b)^n$ можно записать как

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ произведений}}$$

Нас интересует элемент $S_k a^{n-k} b^k$.

Давайте рассмотрим как он получается…

$(a+b)(a+b)(a+b)\ldots(a+b)= \ldots+S_k a^{n-k}b^k+\ldots$

Очевидно что элемент $a^{n-k}b^k$ образуется при произведении n скобок, причем из n-k скобок на его образование взято слагаемое ”a”, а из k скобок взято слагаемое ”b”.

Тогда S_k можно рассматривать как число способов, каким может быть получена степень “k” при “b”, т.е. число скобок, из которых выбрано “b”.

Тогда: $S_k = C_n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Треугольник Паскаля

Запишем коэффициенты разложения $(a+b)^n$ в таблицу, добавив вариант $n=0$.

$(a+b)^0=1$

Получим таблицу, получившую название «треугольник Паскаля»:

n k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Данную таблицу можно записать и в следующей форме

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

Заметим, что каждый элемент таблицы является суммой двух над ним стоящих

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

10=4+6

Для примера с помощью треугольника Паскаля разложим в многочлен сумму двучленов в шестой степени:

$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$

При записи разложения степени бинома полезно контролировать следующие моменты:

1. число членов получаемого многочлена на единицу больше показателя n степени бинома, т. е. равно n + 1;
2. показатели степени первого слагаемого бинома (*a*) последовательно убывают на единицу от n до 0, а показатели второго (*b*) последовательно возрастают на единицу от 0 до n;
3. биномиальные коэффициенты, равноудалённые от начала и конца разложения по формуле, равны между собой.

Домашнее задание:

- Страницы 47-50 п.2.6 (формулы записать в тетрадь). Иметь понятие о биноме Ньютона.