<u>Тема:</u> Исследование функции на монотонность и экстремумы.

- <u>Монотонность функции</u>
- <u>Экстремумы функции</u>

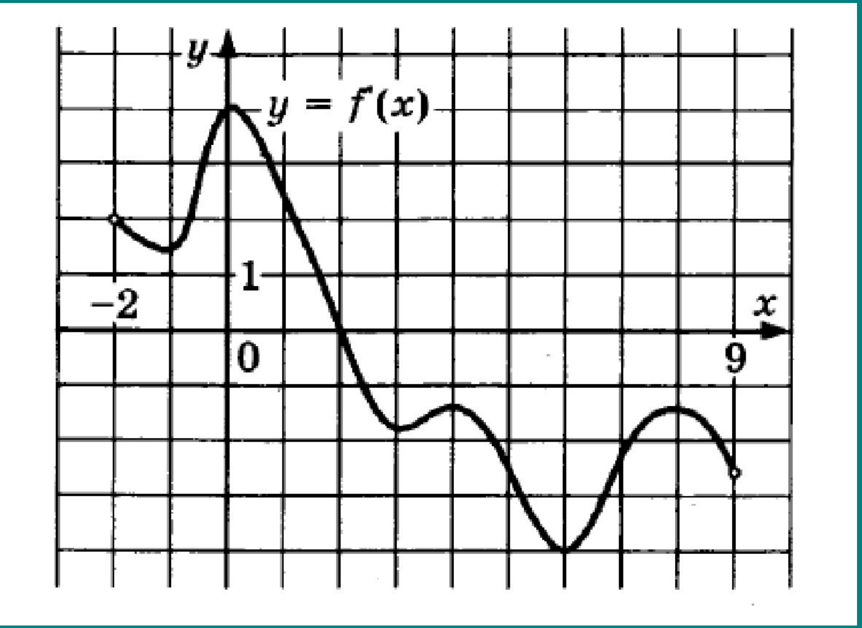
Учитель математики КОР №1

Березина М.Г.

Исследование функции по графику

По графику функции найдите:

1) промежуткивозрастания и убывания функции;
2) точки экстремума и экстремумы функции

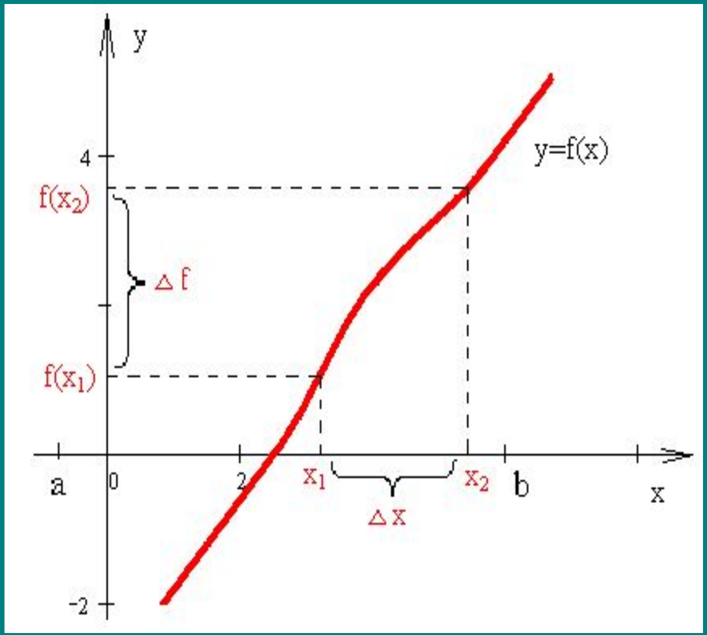


Возрастание и убывание функции

Опр. 1 Функция $y=f(x)$, определяемая на интервале $(a;b)$, называется ***возрастающей*** на этом интервале, если из неравенства $x_2>x_1$, где x_2 и x_1 – любые две точки из интервала, следует неравенство $f(x_2)>f(x_1)$.

Если обозначить $\Delta x= x_2-x_1$ и $\Delta f= f(x_2)-f(x_1)$, то

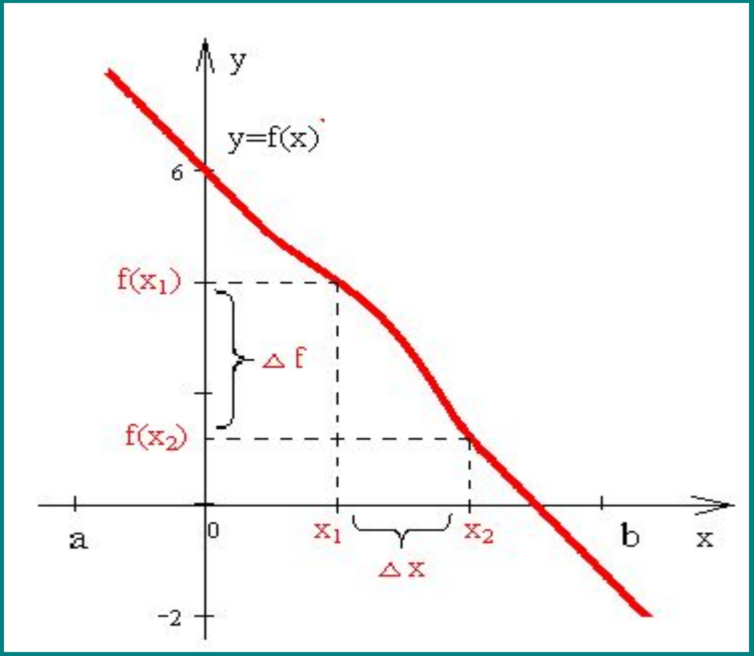
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$$



Опр. 2 Функция y=f(x), определяемая на интервале (a;b), называется ***убывающей*** на этом интервале, если из неравенства $x_2>x_1$, следует неравенство $f(x_2)<f(x_1)$.

Заметим, что

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} < 0$$

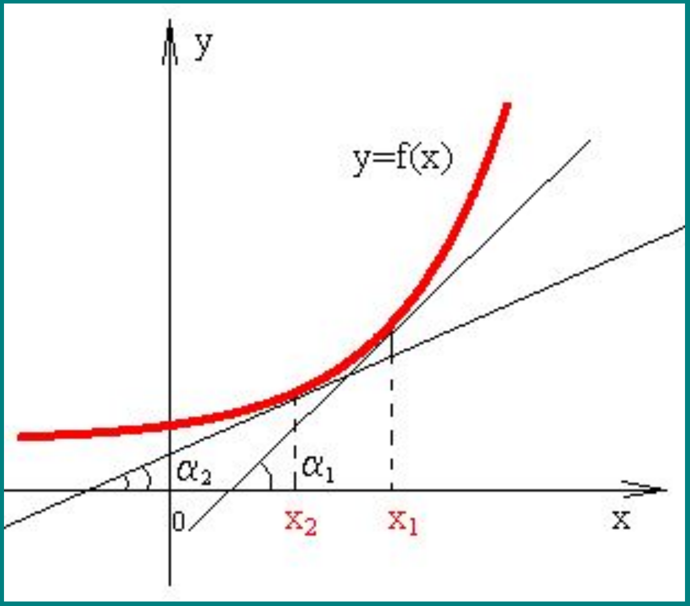


Теорема 1. (необходимое условие возрастания функции)

Если дифференцируемая в интервале (a;b) функция y=f(x) возрастает, то ее производная не может быть отрицательной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \geq 0$ для $a<x<b$.

Доказательство: Пусть y=f(x) возрастает на (a;b),

тогда $$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0$$



Тогда при Δx□0, то

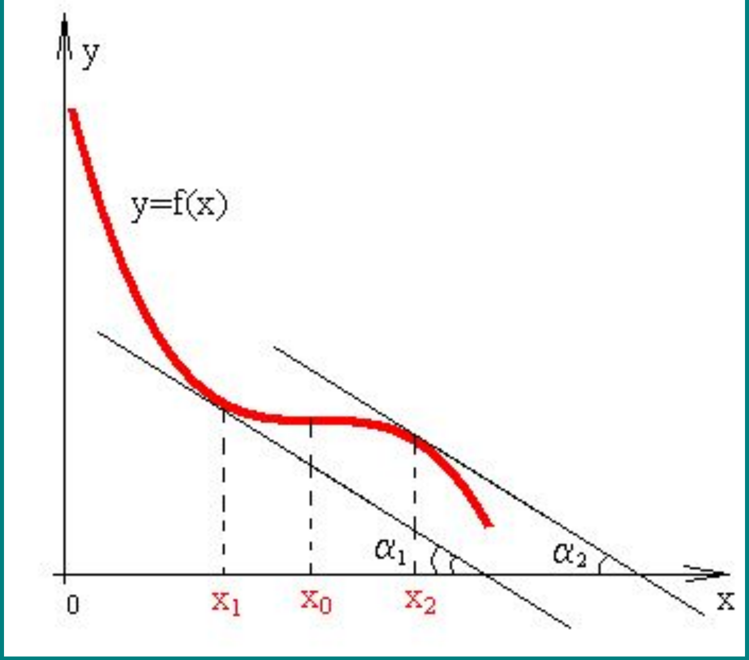
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$$

т.к. $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x), \text{ то } f'(x) > 0$$

ч.т.д.

Теорема 2. (Необходимое условие убывания функции)

Если дифференцируемая в интервале (a;b) функция y=f(x) убывает, то ее производная не может быть положительной ни в одной точке этого интервала, т.е. $f'(x) \leq 0$ для a <x<b.



Теорема 3. (Достаточное условие возрастания функции)

Если непрерывная на [a;b] функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет положительную производную, то функция возрастает на [a;b]

Доказательство: Пусть $y=f'(x)$ для всех $a<x<b$. Рассмотрим $x_2>x_1$ из [a;b].

По теореме Лагранжа $f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)\,f'(c)$, где $x_1\le c<x_2$,

поэтому $$f'(c)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$ по условию $f'(c)>0$

и $x_2-x_1>0$ имеем $f(x_2)-f(x_1)>0$, т.е. из $x_2>x_1$ следует $f(x_2)>f(x_1)$, т. е. функция возрастает, ч.т.д.

Теорема 4. (Достаточное условие убывания функции)

Если непрерывная на [a;b] функция $y=f(x)$ в каждой внутренней точке имеет отрицательную производную, то функция убывает на [a;b].

Пример 1. Найти интервал монотонности функции $y=x^3-3x$.

Решение. *Находим область определения функции* $D(y)=R$

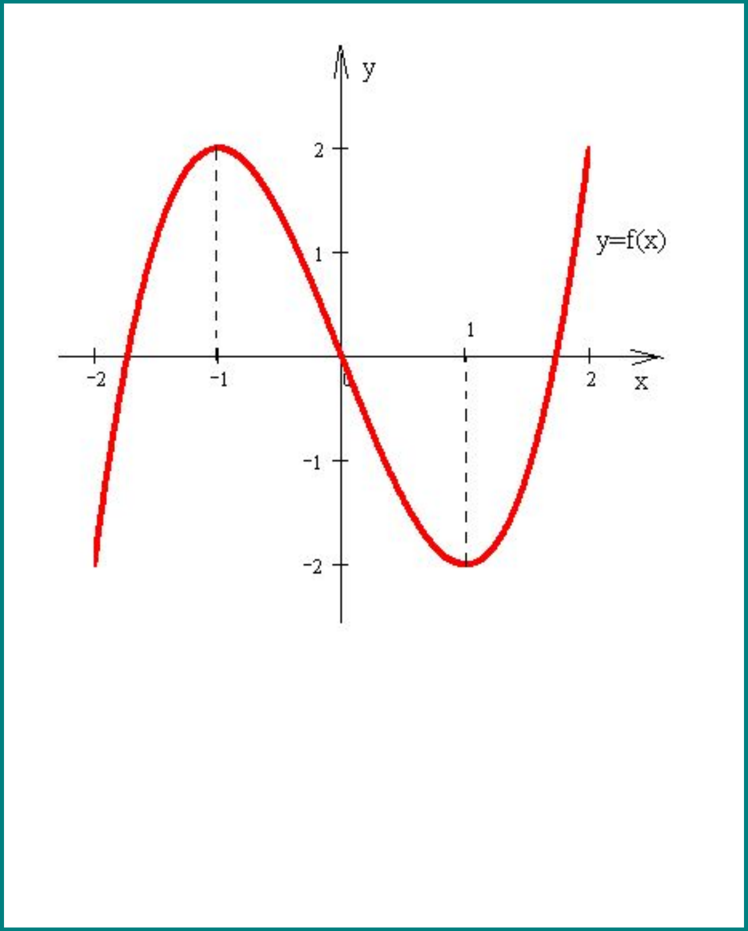
Находим производную функции

$y' = 3x^2 - 3$

$y' > 0$, если $3x^2 - 3 > 0$ при

$x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

$y' < 0$ при $x \in (-1; 1)$



__Ответ:__

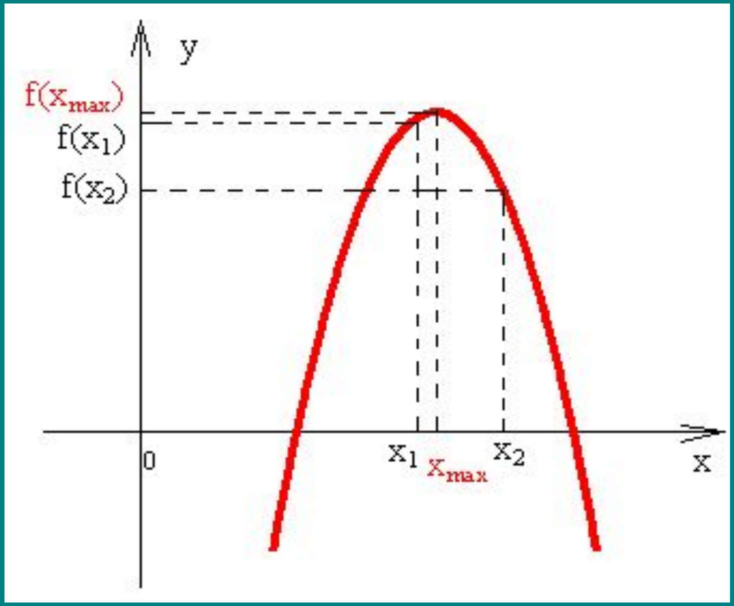
функция возрастает

на $(-\infty; -1]$ и на $[1; +\infty)$,

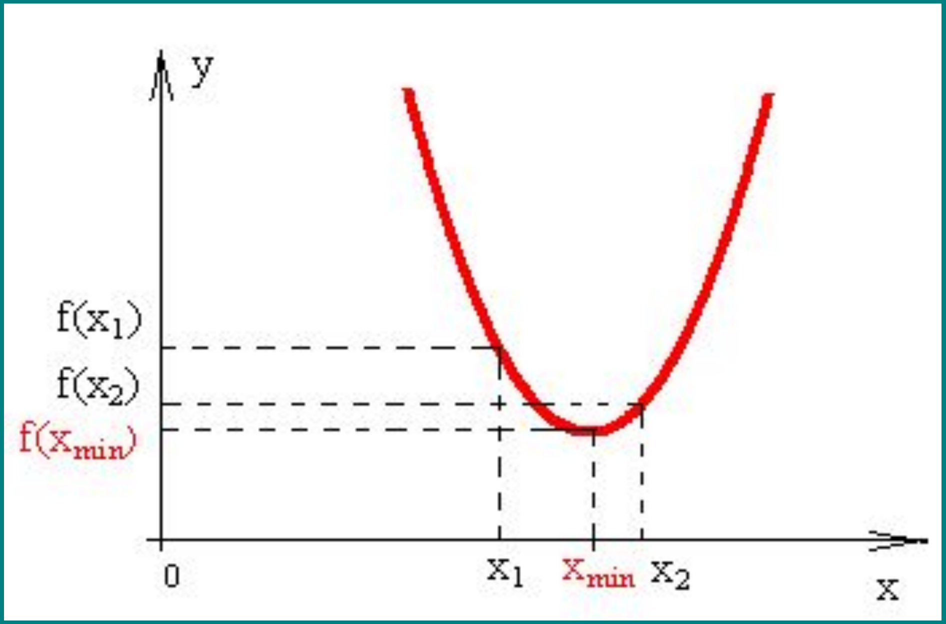
функция убывает на $[-1; 1]$

Точки экстремума и экстремумы функции

<u>Опр. 3</u> Точка x_0 называется точкой максимума функции $y=f(x)$, если существует такая δ-окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется $f(x) < f(x_0)$



Опр. 4 Точка x_0 называется точкой минимума функции $y=f(x)$, если существует число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-x_0|<\delta$, выполняется $f(x)>f(x_0)$



Точка максимума и точка минимума называются точками ***экстремума***.

Значение функции в точках экстремума называется **экстремумом функции**, т.е.

$f_{max}=f(x_{max})$ – максимум функции
$f_{min}=f(x_{min})$ – минимум функции.

Теорема 5. (Необходимое условие экстремума)

Если дифференциальная функция y=f(x) имеет экстремум в точке x_0, то ее производная в этой точке равна 0, т.е. $f'(x_0)=0$.

Доказательство: Пусть x_0 – точка максимума, тогда в окрестности точки x_0 выполняется $f(x_0)>f(x)$, поэтому

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}<0, если \Delta x>0$$

и

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)}{\Delta x}>0, если \Delta x<0$$

По условию существует производная, которая равна

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Имеем: $f'(x_0)\le 0$ при $\Delta x>0$ и $f'(x_0)\ge 0$ при $\Delta x<0$, следовательно $f'(x_0)=0$, ч.т.д.

Теорема 6. (Достаточное условие экстремума)

Если непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема в δ-окружности критической точки x_0 и при переходе через нее (слева направо) $f'(x)$ меняет знак, то x_0 – точка экстремума, причем,

если с «+» на «-», то x_0 – точка максимума,

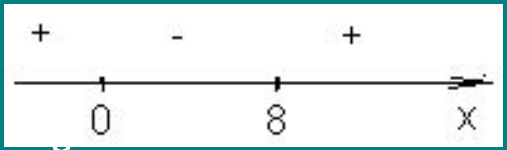
с «-» на «+», то x_0 – точка минимума.

<u>*Доказательство:*</u> Рассмотрим δ-окр-сть точки x_0. Пусть $f'(x)>0$ при любых $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ и $f'(x)<0$ при любых $x \in (x_0; x_0 + \delta)$. Тогда функция $f(x)$ возрастает на $(x_0 - \delta; x_0)$ и убывает на $(x_0; x_0 + \delta)$, следовательно $f(x_0)$ – наибольшее значение на

$(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, т.е. $f(x) < f(x_0)$ для $x \in (x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$, следовательно точка x_0 – точка максимума функции, ч.т.д.

Пример 2. Найти экстремумы функции $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$

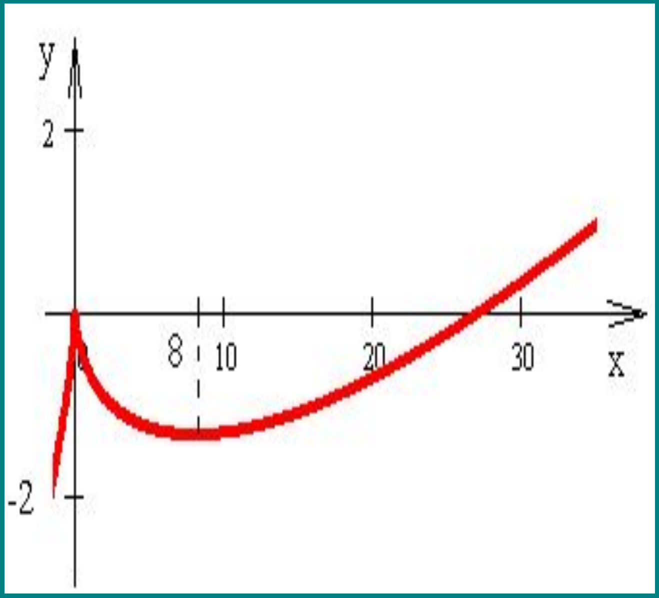
<u>*Решение*</u>. D(y)=R, $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$. $y'=0$ при x=8



и y' не существует при x=0

Поставим эти точки на числовой прямой и расставим знаки

производной.



$x_{max}=0$, $x_{min}=8$

$y_{max}=0$, $y_{min}=8/3-4=-4/3$

Ответ: $y_{min}=-4/3$; $y_{max}=0$