Теория вероятностей

Основные комбинаторные объекты

Задачи в которых производится подсчет всех возможных комбинаций составленных по некоторому правилу, называются комбинаторными. Раздел математики занимающийся их решением называется комбинаторикой.

Правило умножения

Размещения

Правило сложения

Перестановк а

Сочетания

Введение

Теория вероятностей возникла как наука из убеждения, что в основе массовых случайных событий лежат детерминированные закономерности, теория вероятностей изучает эти закономерности.

Математическая статистика это наука изучающая методы обработки результатов наблюдения массовых случайных явлений, обладающих статистической устойчивостью, с целью выявления этих закономерностей

Правило умножения

Если требуется выполнить одно за другим какие то К действий при чем 1 действие можно выполнить a_1 способами, 2 действие – a_2 способами, и так до К-го действия , которое можно выполнить $a_к$ способами, то все К действий вместе могут быть выполнены $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_к$ способами.

4 мальчика 4 девочки садятся на 8 расположенных подряд стульев, причем мальчики садятся на места с четными номерами, а девочки – на места с нечетными номерами. Сколькими способами это можно сделать ?

Первый мальчик может сесть на любое из четырех четных мест, второй - на любое из оставшихся трех мест, третий – на любое оставшихся двух мест. Последнему мальчику предоставляется всего одна возможность. Согласно правилу умножения, мальчики могут занять четыре места $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами. Столько же возможностей имеют и девочки. Таким образом, согласно правилу умножения, мальчики и девочки могут занять все стулья $24 \cdot 24 = 576$ способами.

Правило сложения

Если два действия взаимно исключают друг друга, при чем одно из них можно выполнить m способами, а другое – n способами, то выполнить одно любое из этих действий можно m+n способами.

Это правило легко распространить на любое конечное число действий

Размещения

Размещением из n элементов по m называется любое упорядоченное подмножество из m элементов множества, состоящего из n различных элементов

Теорема: число размещений из n по m равно

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример задачи

1) В журнале 10 страниц , необходимо на страницах поместить 4 фотографии. Сколькими способами это можно сделать , если ни одна страница газеты не должна содержать более одной фотографии ?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

2)Сколько можно записать четырехзначных чисел , используя без повторения все десять цифр?

$$A_{10}^{4} = \frac{10!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 5040_{сп}$$

$$A_{9}^{3} = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504_{сп}$$

$$Ответ : 5040 - 504 = 4536_{способов}$$

Перестановки

Перестановкой из n элементов называется любое упорядоченное множество, в которое входят по одному разу все n различных элементов данного множества

Теорема: Число перестановок n различных элементов равно n!

$$P_n = n!$$

Пример задачи

1) Записать все возможные перестановки для чисел 3,5,7

3,5,7 ; 3,7,5 ; 5,3,7 ; 5,7,3 ; 7,3,5 ; 7,5,3

2) Сколькими способами можно расставить девять различных книг на полке, чтобы определенные четыре книги стояли рядом?

$$P_6 = 6! = 720$$

$$P_4 = 4! = 24$$

$$P_6 \cdot P_4 = 720 \cdot 24 = 17280$$

Сочетания

Сочетанием из n элементов по m называется любое подмножество из m элементов, которые принадлежат множеству, состоящему из n различных элементов

Теорема: Число сочетаний из n по m равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример задачи

Следствие: Число сочетаний из n элементов по n-m равно числу сочетаний из n элементов по m

$$C_n^{m-n} = C_n^m$$

1) Имеется 10 белых и 5 черных шаров. Сколькими способами можно выбрать 7 шаров , что бы среди них были 3 черных ?

Решение: среди выбранных шаров 4 белых и 3 черных.

$$C_{10}^{4} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = 210$$ Способов выбора былых шаров

$$C_{5}^{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$ Способов выбора черных шаров

По правилу умножения искомое число способов равно $C_{10}^{4} \cdot C_{5}^{3} = 2100$

2) Сколькими способами можно группу из 12 человек разбить на две подгруппы, в одной из которых должно быть не более 5 , а во второй- не более 9 человек ?

$$C_{12}^{3} = 220$$ Подгруппа из 3 человек

$$C_{12}^{4} = 495$$ Подгруппа из 4 человек

$$C_{12}^{5} = 792$$ Подгруппа из 5 человек

Выбор первой подгруппы однозначно определяет вторую, по правилу сложения искомое число способов равно: $C_{12}^{3} + C_{12}^{4} + C_{12}^{5} = 1507$

Случайные события. Операции над событиями

Событие- явление , которое происходит в результате осуществления какого-либо определенного комплекса условий. Осуществление комплекса условий называется опытом или испытанием. Событие- результат испытания.

Случайным событием называется событие, которое может произойти или не произойти в результате некоторого испытания (при бросании монеты может выпасть орел , а может и не выпасть).

Достоверным событием называется событие, которое обязательно произойдет в результате испытания (извлечение белого шарика из ящика с белыми шарами).

Невозможным считается событие, которое не может произойти в результате данного испытания(извлечение черного шарика из ящика с белыми шарами).

Случайные события

Событие А называется благоприятствующим событию В , если появление события А влечет за собой появление события В.

События А и В называются не совместными, если в результате данного испытания появление одного из них исключает появление другого (испытание: стрельба по мишени ; А-выбивание четного числа очков; В- не четного).

События А и В называются совместным, если в результате данного испытания появление одного из них не исключает появление другого(А- в аудиторию вошел учитель; В- вошел студент).

Случайные события

Два события А и $\overline{A}$ называются противоположными, если не появление одного из них в результате испытания влечет появление другого($\overline{A}$ отрицание А).

Если группа событий такова, что в результате испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них и любые два из них несовместны, то эта группа событий называется полной группой событий.

События называются равновозможными , если по условию испытания нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем любое другое (А-орел; В-решка).

Операции над событиями

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них в результате испытания.

Пример: в ящике находится красный, черный и белый шары.

A- извлечение черного шара

B- извлечение красного шара

C- извлечение белого шара

A+B – извлечен черный или красный шар

B+C – извлечен красный или белый шар

A+C – извлечен черный или белый шар

Операции над событиями

Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в совместном наступлении всех этих событий в результате испытания.

Пример: происходят следующие события:

A- из колоды карт вынута ”дама”

B- вынута карта пиковой масти

$A \cdot B$ – событие – вынута карта “дама пик”

Классическая формула вероятности

Вероятность события- это численная мера объективной возможности ее появления. Если имеется полная группа попарно несовместных и равновозможных событий, то вероятность P(A) наступления события A вычисляется как отношение числа исходов, благоприятствующих наступлению события, к числу всех исходов испытания.

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

N – число всех исходов испытания

M – число исходов благоприятствующих событию A

Пример задачи

Свойство вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна 1

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

2) Вероятность невозможного события равна 0

$$P(A) = \frac{M}{N} = \frac{0}{N} = 0$$

3) Вероятность события A удовлетворяет двойному неравенству

$$0 \le P(A) \le 1$$

1) В ящике 4 черных и 6 белых шаров, извлекают 1 шар , какова вероятность что шар будет белым, черным ?

N=10; M=6; A- Извлечение белого шара $P(A)=\frac{6}{10}=0{,}6$

N=10; M=4; A- Извлечение черного шара $P(A)=\frac{4}{10}=0{,}4$

2) В ящике 10 шаров 2 черных, 4 белых, 4 красных, извлекают 1 шар. Какова вероятность, что он:

A- черный; B- белый; C- красный; D- зеленый

N=10; M=2 $$P(A)=\frac{2}{10}=0{,}2$$

N=10; M=4 $$P(B)=\frac{4}{10}=0{,}4$$

N=10; M=4 $$P(C)=\frac{4}{10}=0{,}4$$

N=10; M=0 $$P(D)=\frac{0}{10}=0$$

Статистическая и геометрическая вероятности

Было замечено , что при многократном повторении опытов относительная частота появления события в этих опытах стремится к устойчивости. Под относительной частотой появления события понимается отношение M/N , где N- число опытов; M-число появления события. При увеличении опытов относительная частота появления события будет практически сколь угодно мало отличаться от некоторого постоянного числа, которое и принимается за вероятность события в отдельном опыте. Относительную частоту появления события называют статистической вероятностью. С возрастанием числа опытов, относительная частота стремится к вероятности Р(Г)=0,5. Относительную частоту при достаточно большем числе опытов , можно считать приближенным значению вероятности.

Геометрической вероятностью события называется отношение меры области, благоприятствующей появлению события , к мере всей области.